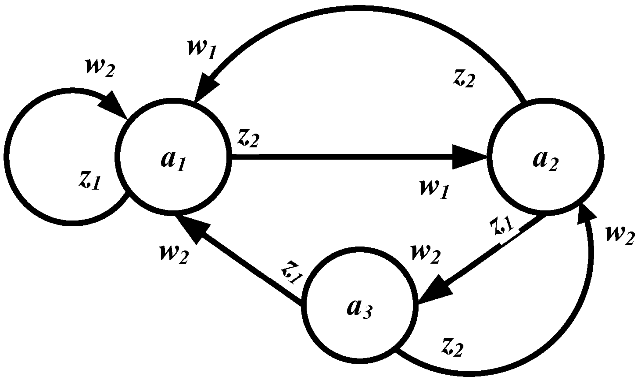
ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

Материал для практических заданий, разработанный для самостоятельного освоения в условиях удаленной системы обучения

часть 9



Материал для проведения практических занятий по одному из основных разделов дисциплины “Теория автоматов” – “Логические основы цифровых автоматов”.
Целью занятий является практическое закрепление знаний о формах представления и методах преобразования логических функций, а также методике синтеза комбинационных схем.
Каждое практическое занятие включает в себя постановку цели занятия, краткий теоретический материал по теме, характерные примеры, контрольные вопросы и упражнения для самостоятельной работы.
До проведения занятия студент должен уяснить его цель и ответить на контрольные вопросы. Во время занятия разбираются примеры и выполняются упражнения по вариантам. Контроль знаний проводится по результатам ответов на контрольные вопросы и выполнения упражнений.

2.1 Формальное определение алгебры логики

Алгебра логики является теоретической основой проектирования современных цифровых автоматов и базируется на символической логике, предложенной математиком Джорджем Булем. Существует множество формальных определений булевых алгебр [1,2], зависящих от различных подходов к выбранной системе аксиом.

Булева алгебра может быть определена как алгебраическая система, удовлетворяющая следующим аксиомам [3].

Булевой алгеброй является система, состоящая из множества $B = \{a, b, c...\}$ и двух типов операторов $+$ и $*$ (логическая сумма и логическое произведение), для которых справедливы следующие пять соотношений:

$a + b = b + a, \quad a * b = b * a \quad \text{для любых} \quad a, b \in B$
(коммутативность); (2.1)

$a + (b * c) = (a + b) * (a + c), \quad a * (b + c) = a * b + a * c$
$\text{для любых} \quad a, b, c \in B$
(дистрибутивность); (2.2)

найдутся, $1 \in B$ и $0 \in B$ такие, что $a + 0 = a$, $a * 1 = a$
для любого $a \in B$ (единичные элементы); (2.3)

найдется, $\overline{a} \in B$ такой, что $a + \overline{a} = 1$, $a * \overline{a} = 0$ для любого $a \in B$ (дополнение); (2.4)

$a + b + c + ... = \max(a, b, c, ...);$
$a * b * c * ... = \min(a, b, c, ...);$ (2.5)
с учетом того, что 1 > 0.

Одним из вариантов булевой алгебры может служить алгебраическая система, в которой множество В содержит всего два элемента $B = \{0,1\}$, и которые одновременно являются единичными элементами. При этом, соотношение (2.4) можно трактовать как введение дополнительной (третьей) логической операцией, которую называют "отрицание" или "инверсия". Именно такую, самую простую, алгебраическую систему булевой алгебры, и принято называть в научно-технической литературе алгеброй логики, переключательной алгеброй, алгеброй релейно - контактных схем.

2.2 Аксиомы, теоремы и законы алгебры логики

Алгебра логики в качестве аргументов использует логические переменные. Логические переменные и функции от них могут быть либо истинными (равными 1), либо ложными (равными 0). Логические переменные принято обозначать строчными латинскими буквами, а логические функции - прописными латинскими буквами.

В алгебре логики определены отношение эквивалентности (=) и три логические операции [4]: дизъюнкция (логическое сложение, операция ИЛИ); конъюнкция (логическое умножение, операция И); отрицание (инверсия, операция НЕ).

По аналогии с обычной алгеброй операцию ИЛИ обозначают в виде $+$ или $\vee$ (знак дизъюнкции); операцию И обозначают *, или $\wedge$, или & (знак конъюнкции); операцию НЕ обозначают чертой над переменными или над значениями переменных, например, $\overline{x}$, $\overline{0}$, $\overline{1}$. Знак *, как и в обычной алгебре, чаще всего опускают (например, x * y = xy).

Отношение эквивалентности удовлетворяет следующим свойствам: x = x – рефлективность; если x = y, то y = x – симметричность; если x = y и y = z, то x = z –

транзитивность. Из отношения эквивалентности следует принцип подстановки: если x = y, то в любой формуле, содержащей x, можно подставить y и будет получена эквивалентная формула.

2.3 Аксиомы алгебры логики

$$\begin{cases} x = 0, \text{ если } x \neq 1 \\ x = 1, \text{ если } x \neq 0 \end{cases} \qquad (2.6)$$

Аксиома (2.6) утверждает, что значения логических переменных и функций могут принимать всего два взаимоисключающих значения. Данную аксиому иногда называют "закон исключенного третьего". Следует помнить, что "1" и "0" - это не количественные характеристики, а качественные. Однако принимается, что 1 › 0.

$$c = a + b = \max(a,b) = \begin{cases} 0+0=0 \\ 0+1=1 \\ 1+0=1 \\ 1+1=1 \end{cases} \qquad (2.7)$$

Аксиома (2.7) определяет операцию дизъюнкции (логического сложения). Аксиома справедлива для любого числа слагаемых.

$$c = a * b = \min(a,b) = \begin{cases} 0*0=0 \\ 0*1=0 \\ 1*0=0 \\ 1*1=1 \end{cases} \qquad (2.8)$$

Аксиома (2.8) определяет операцию конъюнкции (логического умножения). Аксиома справедлива для любого числа сомножителей.

$$c = \overline{a} = \begin{cases} 0, & \text{при } a = 1; \\ 1, & \text{при } a = 0. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Аксиома (2.9) определяет операцию логического отрицания (инверсию).

В алгебре логики действует закон двойственности, который определяет соотношение между логической операцией «или», логической операцией «и» и логической операцией «не». Суть этого закона такова: если в уравнениях все переменные поменять на инверсные (противоположные) значения и заменить знак «ИЛИ» на знак «И» и наоборот, то получим эквивалентные уравнения.

2.4 Теоремы алгебры логики

$$x + 0 = x \quad (2.10) \qquad\qquad x * 0 = 0 \quad (2.15)$$
$$x + 1 = 1 \quad (2.11) \qquad\qquad x * 1 = x \quad (2.16)$$
$$x + x = x \quad (2.12) \qquad\qquad x * x = x \quad (2.17)$$
$$x + \overline{x} = 1 \quad (2.13) \qquad\qquad x * \overline{x} = 0 \quad (2.18)$$
$$\overline{\overline{x}} = x \quad (2.14) \qquad\qquad \overline{\overline{\overline{x}}} = \overline{x} \quad (2.19)$$

Теоремы (2.10 - 2.19) легко доказываются с помощью аксиом (2.6- 2.9) и метода подстановки возможных значений аргументов x.

2.5 Законы алгебры логики

Коммутативный закон (переместительный закон):
относительно логического сложения

$$x + y = y + x, \qquad (2.20\text{ a})$$

относительно логического умножения

x * y = y * x .   (2.20 б)

Данный закон гарантирует получение тождественного результата при перестановке местами аргументов.

Ассоциативный закон (сочетательный закон):
относительно логического сложения

x + y + z = y + (x + z) = (y + x) + z,   (2.21 а)

относительно логического умножения

x * y * z = y * (x * z) = (y * x) * z.   (2.21 б)

Данный закон позволяет при помощи скобок изменять порядок вычислений и гарантирует получение правильного результата, а также утверждает, что вычисление логической функции большого количества аргументов может быть сведено к последовательному ее вычислению суперпозицией функций двух аргументов.

Дистрибутивный закон (распределительный закон):
относительно логического сложения

x + (y * z) = (x + y) *(x + z),   (2.22 а)

относительно логического умножения
x *(y + z) = (x * y) + (x * z).   (2.22 б)
Данный закон устанавливает правила раскрытия скобок относительно операций логического сложения и умножения.

Законы (правила) де Моргана:

$$\overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \ldots + \overline{x_n} \qquad (2.23\ а)$$

$$\overline{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} = \overline{x_1} * \overline{x_2} * \ldots * \overline{x_n} \qquad (2.23\ б)$$

Законы де Моргана определяют правила перехода от логической операции умножения к сложению (2.23 а) и наоборот (2.23 б).
Закон (2.23 а) утверждает, что отрицание конъюнкции, есть дизъюнкция отрицаний.
Закон (2.23 б) утверждает, что отрицание дизъюнкции, есть конъюнкция отрицаний.
Законы де Моргана называют также законами двойственности.
Как и в обычной алгебре в алгебре логики определен порядок выполнения логических операций: первой выполняется операция инверсии; второй - конъюнкции; третьей - дизъюнкции.

<u>Задание N2.1</u>
Используя законы, аксиомы и теоремы алгебры логики упростить следующие выражения:

1. $\overline{(\overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2})} * x_3$;   6. $\overline{x_1 + \overline{(\overline{x_1} + x_2)} x_3}$;
2. $\overline{(\overline{\overline{x_1} x_2} + \overline{x_1 \overline{x_2}})} * \overline{x_3}$;   7. $\overline{\overline{(x_1 + x_2)} x_3 + x_1 x_2}$;

3. $\overline{(x_1x_2+\overline{x_2}x_3)}*\overline{x_1x_2}$; 8. $\overline{(x_1+x_2)\overline{x_3}+\overline{x_1}x_2}$;

4. $\overline{(\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}}*x_1)+\overline{(x_1+x_3)}}$; 9. $\overline{\overline{(\overline{x_1}+\overline{x_2}+x_2\overline{x_3})}}*x_1*\overline{x_1x_2}$;

5. $\overline{(x_1+x_2)+\overline{x_2}x_3)}*\overline{x_1x_2}$; 10. $\overline{(x_1+\overline{x_2})*x_3}+x_1x_2\overline{x_3(x_1+x_3)}$;

Контрольные вопросы:

2.1.1 Сформулируйте законы алгебры логики.

2.1.2 Перечислите аксиомы алгебры логики.

2.1.3 Докажите теоремы алгебры логики с помощью аксиом.

2.1.4 В чем состоит суть закона двойственности?