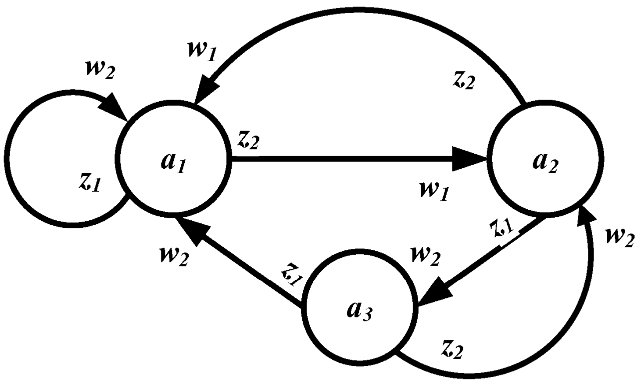
ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

Материал для практических заданий, разработанный для самостоятельного освоения в условиях удаленной системы обучения

часть 10



Материал для проведения практических занятий по одному из основных разделов дисциплины “Теория автоматов” – “Логические основы цифровых автоматов”.

Целью занятий является практическое закрепление знаний о формах представления и методах преобразования логических функций, а также методике синтеза комбинационных схем.

Каждое практическое занятие включает в себя постановку цели занятия, краткий теоретический материал по теме, характерные примеры, контрольные вопросы и упражнения для самостоятельной работы.

До проведения занятия студент должен уяснить его цель и ответить на контрольные вопросы. Во время занятия разбираются примеры и выполняются упражнения по вариантам. Контроль знаний проводится по результатам ответов на контрольные вопросы и выполнения упражнений.

2.6 Основные понятия и определения

Любая научно - техническая дисциплина использует специфическую терминологию, что позволяет лаконично и однозначно обмениваться информацией между специалистами соответствующего профиля.

Рассмотрим основные термины и понятия, наиболее широко пользуемые в алгебре логике.

Логическая (двоичная) переменная характеризует простое высказывание, которое содержит одну законченную мысль. Она обозначается буквой, например, x и может принимать значения 0 или 1.

Логическая функция — это сложное высказывание, состоящее из нескольких простых, связанных между собой соединительными союзами. Она записывается аналитически в виде $Y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где x_i— двоичная переменная, $x_i \in \{0,1\}; Y \in \{0,1\}$.

Входной набор — это определенная комбинация значений двоичных переменных в логической функции. Максимальное число входных наборов определяется выражением $m = 2^n$, где n — число переменных. Максимальное число логических функций n переменных определяется выражением $N = 2^m = 2^{2^n}$.

Полностью определенная функция – это логическая функция, имеющая определенные значения 0 или 1 на всех входных наборах.

Частично определенная функция – это логическая функция, значения которой определены не на всех входных наборах. На тех входных наборах, где функция не определена, проставляется прочерк (или любой другой символ, отличный от 0 и 1).

Рабочие наборы – это входные наборы, для которых логическая функция полностью определена.

Безразличные наборы - это входные наборы, для которых логическая функция не определена. Частично определенную функцию, в конечном счете, делают полностью определенной (доопределяют), приписав безразличным наборам 0-е или 1-е значения функции. Простейший способ доопределения логической функции - произвольный (случайный) выбор значений, равных 0 или 1.

В алгебре логики существуют понятия: элементарная конъюнкция/дизъюнкция, конституента единицы/нуля, ранг элементарной конъюнкции/дизъюнкции, соседние элементарные конъюнкции/дизъюнкции.

Элементарные конъюнкция/дизъюнкция - это конъюнкция/дизъюнкция входных переменных, имеющих или не имеющих отрицаний. Любой символ переменной в элементарной конъюнкции/дизъюнкции может встречаться один раз.

Например, f_1 (x_1, x_2, x_3, x_4)= $x_1x_2x_3x_4$ есть элементарная конъюнкция, а $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1\overline{x_2x_3}x_4$ и $f_2(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4x_1$ не являются элементарными конъюнкциями.

Ранг элементарной конъюнкции/дизъюнкции - число входных переменных в элементарной конъюнкции/дизъюнкции. Так, f_1 (x_1)= x_1- это элементарная конъюнкция первого ранга; f_2(x_1, x_2 , x_3)= $x_1x_2x_3$ — элементарная конъюнкция третьего ранга.

Конституента единицы (минтерм) - логическая функция от n аргументов, которая принимает значение, равное единице, только на одном наборе аргументов. На остальных наборах функция равна нулю. *Минтерм* можно также определить как элементарную конъюнкцию максимального ранга, на которой значение логической функции равно 1. Логическая сумма всех минтермов равна 1.

Конституента нуля (макстерм) - логическая функция от n аргументов, которая принимает значение, равное нулю, только на одном наборе аргументов. На остальных наборах функция равна единице. *Макстерм* можно также определить как элементарную дизъюнкцию максимального ранга, на которой значение логической функции равно 0. Логическое произведение всех макстермов равно 0.

Соседние элементарные конъюнкции /дизъюнкции — две элементарные конъюнкции /дизъюнкции одного и того же ранга, если они являются функциями одних и тех же переменных и отличаются только знаком отрицания (инверсии) одной из переменных. Например, конъюнкции $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4$ и $x_1 x_2 \overline{x_3} x_4$ являются соседними, так как они - функции одних и тех же переменных и отличаются знаком инверсии только одной переменной x_1.

На основе законов алгебры логики могут быть сформулированы правила преобразования логических выражений .

Правило склеивания для соседних элементарных конъюнкций: логическую сумму двух соседних элементарных конъюнкции некоторого ранга r можно заменить одной элементарной конъюнкцией ранга r-1, являющейся общей частью исходных слагаемых. Это правило является следствием распределительного закона. Например,

$$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 = x_2 \overline{x_3} x_4, \ \overline{x_1} x_2 \vee x_1 x_2 = x_2$$

Правило склеивания для соседних элементарных дизъюнкций: логическое произведение двух соседних элементарных дизъюнкций ранга r можно заменять одной элементарной дизъюнкцией ранга r - 1, являющейся общей частью исходных дизъюнкций. Это правило является следствием распределительного закона и применяется для упрощения логических выражений. Например:

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) = x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4,$$

$$(x_2 \vee x_4)(x_2 \vee \overline{x_4}) = x_2$$

Правило поглощения для элементарных конъюнкций: дизъюнкцию двух элементарных конъюнкций разных рангов, из которых одна является собственной частью другой, можно заменить конъюнкцией, имеющей меньший ранг. Это правило является следствием распределительного закона. Например,

$$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 = \overline{x_1} x_2, \ x_1 \vee x_1 x_2 = x_1,$$

Кроме того, справедливы выражения:

$$x_1 \vee \overline{x_1} x_2 = x_1 \vee x_2, \ \overline{x_1} \vee x_1 x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

Правило поглощения для элементарных дизъюнкций: логическое произведение двух элементарных дизъюнкций разных рангов, из которых одна является общей частью другой, можно заменить дизъюнкцией, имеющей меньший ранг. Это правило является следствием распределительного закона и находит широкое применение для упрощения логических функций. Например,

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4)(\overline{x_1} \vee x_2) = \overline{x_1} \vee x_2, \ x_2 (x_2 \vee \overline{x_4}) = x_2$$

Задание N2.2

1. Воспользовавшись определениями элементарной конъюнкции/дизъюнкции и ее ранга, определить, являются ли следующие функции элементарной конъюнкцией/дизъюнкцией и, если являются, то найти их ранг:

1. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$;
2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2x_3x_4$;
3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2\overline{x_3x_4}$;
4. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4\overline{x_1}$;
5. $f(x_1, x_2, x_3) = x_2x_3$;
6. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2\overline{x_3x_4}$;
7. $f(x_1) = x_1$;
8. $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$;
9. $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_1}$;
10. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \vee \overline{x_2 \vee x_3}$;

2. Являются ли соседними и элементарными следующие конъюнкции/дизъюнкции:

1. $x_1x_2x_3\overline{x_4}$ $и$ $x_1x_2x_3x_4$;
2. $x_1x_2x_3\overline{x_4}$ $и$ $\overline{x_1}x_2x_3x_4$;
3. $x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$ $и$ $x_1x_2\overline{x_3}x_4$;
4. $x_1x_2x_3\overline{x_4}$ $и$ $x_1\overline{x_2}x_3x_4$;
5. $x_1x_2x_3\overline{x_4}$ $и$ $x_1\overline{x_2x_3}x_4$;
6. $x_1x_2x_3\overline{x_4}$ $и$ $\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$;
7. $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ $и$ $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$;
8. $x_1 \vee \overline{x_2 \vee x_3}$ $и$ $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$;
9. $x_1 \vee \overline{x_2 \vee x_3}$ $и$ $x_1 \vee x_2 \vee x_3$;
10. $x_1x_2x_3\overline{x_4}$ $и$ $\overline{x_1}x_2\overline{x_3x_4}$;

3. Используя правила поглощения и склеивания для соседних элементарных конъюнкций/дизъюнкций упростить следующие логические выражения:

1. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4 + x_1x_2\overline{x_3}x_4$;
2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + x_1x_2\overline{x_3} + x_1x_2 + x_2x_3$;
3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}\overline{x_2}x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$;
4. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$;
5. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3$;
6. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4)$;
7. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 + \bar{x}_1x_2 + x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_3$;
8. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 + (x_1 + x_2)\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2 + (x_1 + x_2)x_3 + x_1x_2\bar{x}_1$;
9. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4)(\bar{x}_1 + x_2)$;

10. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_1x_2 + \bar{x}_1x_3 + x_2x_3)$;

Контрольные вопросы:

2.2.1 Какая логическая функция называется полностью определенной, частично определенной?

2.2.2 Что такое входной набор и как определить максимальное число входных наборов?

2.2.3 Сформулируйте правила поглощения для элементарных дизъюнкций/конъюнкций.

2.2.4 Сформулируйте правила склеивания для соседних элементарных конъюнкций/дизъюнкций.