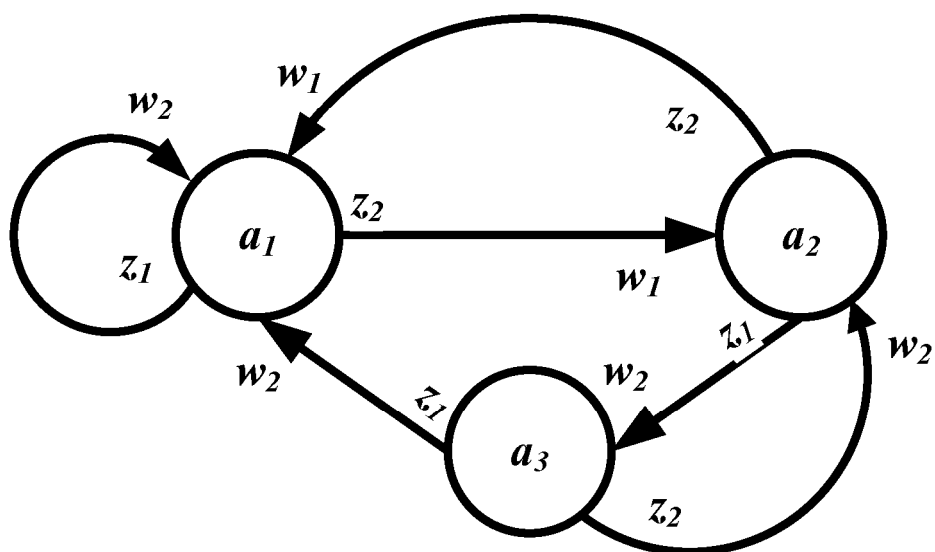


ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

Лекционный материал, разработанный
для самостоятельного освоения
в условиях удаленной системы обучения

часть 8



Тема 7.3. Асинхронные схемы

Ранее было показано, что автоматы можно разделить на:

- комбинационные
- асинхронные
- синхронные

Причем, каждый последующий является обобщением предыдущего.

Приведем обобщенную схему классификации дискретных устройств:



Комбинационная схема – это дискретное устройство, функционирование или поведение которого в каждый момент времени определяется только входными сигналами, воздействующими на него.

Последовательная схема – это дискретное устройство, функционирование или поведение которого зависит от предыстории воздействия на него входных знаков.

Эта схема имеет более одного внутреннего состояния. Теоретической моделью для этих схем являются конечные автоматы Милли или Мура.

Синхронный автомат (схема) – это дискретное устройство, такты функционирования которого определяются в моменты импульсного воздействия тактового сигнала, когда остальные входные сигналы удерживаются или остаются неизменными.

Асинхронный автомат (схема) – это дискретное устройство, такты функционирования которого определяются в момент смены входных сигналов.

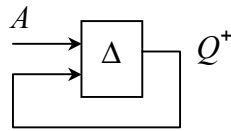
Асинхронный потенциальный автомат (схема) – воспринимает воздействия при активных значениях входных сигналов, которые продолжаются до тех пор, пока сохраняется их активный уровень.

(Асинхронный) импульсный автомат – воспринимает воздействия только при изменении входных сигналов, т.е. входные сигналы оказывают на него импульсное воздействие.

Асинхронный потенциальный автомат с простыми переходами – это автоматы, у которых все возможные переходы из одного состояния в другое являются простыми.

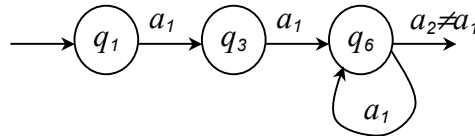
Асинхронный потенциальный автомат со сложными переходами – это автоматы, у которых имеются переходы из одного состояния в другое, которые являются сложными, т.е. это автоматы, у которых возможны неоднократные изменения внутренних состояний при неизменных входных сигналах.

Представим схему асинхронного потенциального автомата со сложными переходами.



Например, при подаче на вход автомата знака a_1 , автомат вычисляет состояние q_3 , которое попадает на его вход, и автомат вычисляет другое состояние q_6 , только после чего автомат успокаивается.

Проиллюстрируем данный пример:



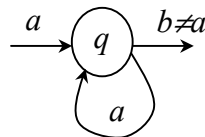
Асинхронные автоматы

Моделью асинхронного автомата, как дискретного устройства, является асинхронный конечный автомат, у которого все состояния устойчивы по всем входным знакам, ведущим в это состояние.

Формально асинхронный конечный автомат можно представить:

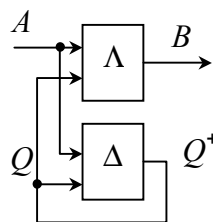
$$K = \langle A, Q, B, \delta, \lambda \rangle \quad \forall q \in Q, \forall a \in A \quad \delta(q, a) = \delta(q, aa)$$

На графе это выглядит следующим образом: если есть дуга, ведущая в вершину q , помеченная знаком a , то в вершине q есть петля, помеченная знаком a и не существует дуги из вершины q , помеченной знаком a .



Очевидно, только изменение знака на входе может привести к смене состояния автомата. Это значит, что синхронизация работы автомата в автоматной сети, состоящей из асинхронных автоматов, выполняется автоматически, без специальных мер.

Структурная схема асинхронного автомата имеет вид:

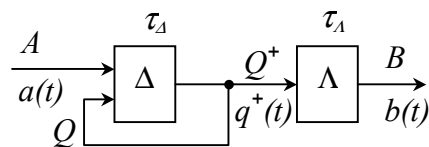


Как видно из схемы выходной знак B и следующее состояние автомата Q^+ определяются через автоматы Λ и Δ соответственно, на входы которых подаются знаки Q и A .

Запишем систему уравнений, которая описывает асинхронный автомат.

$$\begin{cases} b(t + \tau_\Lambda) = \lambda(q(t), a(t)) \\ q^+(t) = \delta(q(t), a(t)) \\ q(t + \tau_\Delta) = q^+(t) \end{cases} \quad (12)$$

В случае автомата Мура схема примет вид:



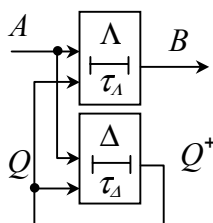
Где τ_{Δ} и τ_{Λ} это задержка, вносимая в распространение сигнала комбинационным автоматом Δ и Λ соответственно.

Модели асинхронных автоматов

В основном на практике используются две модели: частная и общая.

Общая модель рассмотрена ранее, где предполагается, что комбинационные автоматы Δ и Λ вносят задержку в распространение сигнала, т.е. это модель с задержками в комбинационных схемах.

Структурная схема имеет вид:

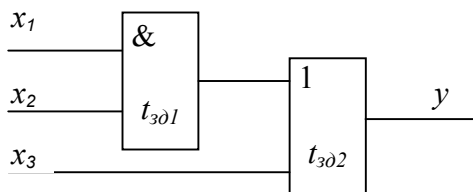


При рассмотрении комбинационной схемы мы видим, что в общем случае задержка в распространение сигнала комбинационной схемой зависит от комбинации входных сигналов.

$$\begin{cases} \tau_{\Lambda} = \tau_{\Lambda}(q(t), a(t)) \\ \tau_{\Delta} = \tau_{\Delta}(q(t), a(t)) \end{cases}$$

Т.е. задержки τ_{Δ} и τ_{Λ} зависят от того, какие сигналы поданы на вход.

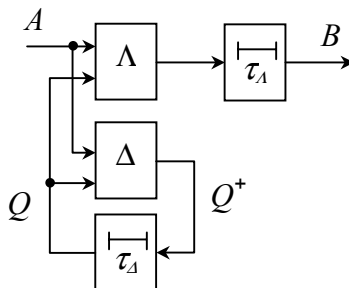
Например, рассмотрим схему:



Очевидно, изменение сигнала x_3 приведет к меньшей задержке в распространение сигнала, чем изменение сигналов x_1 и x_2 , т.к. сигнал будет задержан только на t_{3d2} .

Вторая модель с элементами задержки в цепи обратной связи.

Структурная схема которой имеет вид:



Здесь предполагается, что комбинационные схемы не вносят задержку в распространение сигнала.

Асинхронные потенциальные автоматы

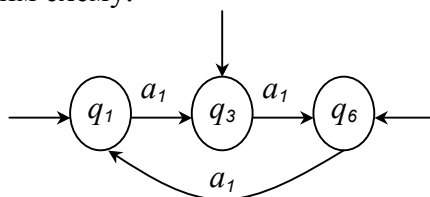
У асинхронных потенциальных автоматов входные сигналы оказывают потенциальное воздействие на схему, т.е. смена сигнала на входе задает такты функционирования автомата, а сами сигналы воздействуют на него все время.

Различают автоматы с простыми и со сложными переходами.

Для синтеза асинхронных потенциальных автоматов, свободных от критических состязаний, т.е. когда автомат функционирует неправильно, необходимо выполнить ряд условий:

Тема 1.5 При переходных процессах не должны возникать автоколебательные процессы, это может произойти, когда используется автомат со сложными переходами, образующими цикл.

Например, рассмотрим схему:



Как видно из рисунка, автомат будет перебирать состояния: $q_1, q_3, q_6, q_1, q_3, q_6, \dots$

Тема 1.6 Комбинационные схемы должны синтезироваться свободными от критических состязаний, а если критические состязания и присутствуют, то они не должны оказывать воздействия на входы следующего автомата. Это означает, что время, в течении которого на выходе появляются ложные сигналы должно быть намного меньше, чем время реакции комбинационной схемы. На практике это можно организовать т.к. величина времени реакции схемы может быть вычислена.

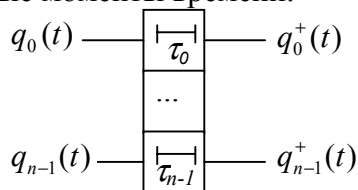
Тема 1.7 Величина задержки сигнала τ_{Δ} должна быть больше максимальной длительности переходных процессов.

Это требование вытекает из требования № 2. Оно используется при рассмотрении второй модели асинхронного потенциального автомата с элементами задержки в цепи обратной связи.

Тема 1.8 Частота изменения входного сигнала должна быть не больше некоторой частоты $f_{\max}$, при которой в автомате еще успевают завершиться переходные процессы.

$$f_{\max} < \frac{1}{\tau_{\Delta}}$$

Тема 1.9 Должны отсутствовать критические состязания элементов задержки в цепи обратной связи, т.е. когда разные сигналы обратной связи принимают свои истинные значения в разные моменты времени.



Это условие применяется в том случае, если используется многоразрядное кодирование состояний автомата.

τ_i должны подбираться с точностью, большей чем время реакции схемы. Если же это невозможно обеспечить, то для кодирования знаков состояния необходимо использовать код Грея, когда при смене состояний изменяется только один сигнал.

Например:

$$Q = \{q_1, q_2, q_3\}$$

$$q_1 \rightarrow 010$$

$$q_2 \rightarrow 100$$

$$q_3 \rightarrow 001$$

Первое и последнее условия являются необходимыми, а при невыполнении остальных условий иногда автомат будет работать правильно.

Пример. Синтез RS триггера.

RS триггер имеет два состояния $Q = \{q_0, q_1\}$.

Триггер переходит в состояние q_1 если на входе знак a_2 ;

Триггер переходит в состояние q_0 если на входе знак a_1 ;

Триггер не изменяет состояния, если на входе знак a_0 .

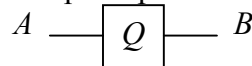
Кратко это можно записать:

$$a_2 \rightarrow q_1$$

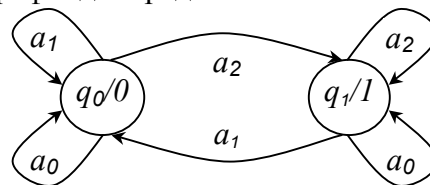
$$a_1 \rightarrow q_0$$

$$a_0 \rightarrow \text{состояние не меняется.}$$

Изобразим структурную схему RS триггера.



Нарисуем автоматный граф и доопределим состояния выхода.



Представим автомат в виде таблицы:

$A \backslash Q$	$q_0/0$	$q_1/1$
a_0	q_0	q_1
a_1	q_0	q_0
a_2	q_1	q_1

Перейдем к дискретным функциям:

A	Q	Q^+	B
a_0	q_0	q_0	0
a_0	q_1	q_1	1
a_1	q_0	q_0	0
a_1	q_1	q_0	0
a_2	q_0	q_1	1
a_2	q_1	q_1	1

Закодируем алфавиты:

A	a_0	a_1	a_2
SR	00	01	10

B	0	1
b	0	1

Q	q_0	q_1
q	0	1

Представим поведение автомата в виде булевых функций:

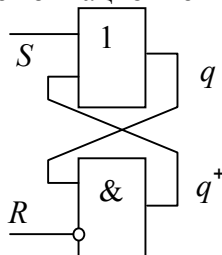
A	Q	Q^+	B
-----	-----	-------	-----

S	R	q	q^+	b
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1

Представим функцию q^+ в виде выражений в автоматном базисе:

$$q^+ = \bar{S} \bar{R} q \cup S \bar{R} = \bar{R}(\bar{S} q \cup S) = \bar{R}(S \cup q) \quad (13)$$

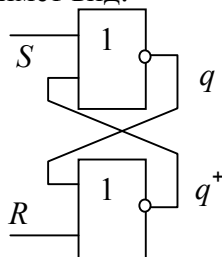
Представим выражение в виде комбинационной схемы:



Преобразуем выражение для q^+ :

$$q^+ = \overline{\bar{R}(S \cup q)} = \overline{R \cup (S \cup q)}$$

Тогда комбинационная схема примет вид:



Замечание 1.

Из выражения (13) $Q^+ = \bar{R}(S \cup Q)$ следует, что комбинационная схема является свободной от критических состязаний.

Замечание 2.

Вход R имеет больший приоритет по отношению ко входу S. По функции переходов триггера можно установить, какие значения входных сигналов изменяют состояние триггера.

А. Пусть состояние триггера изменяется с 1 на 0.

$$Q^+: 1 \rightarrow 0, \text{ тогда } dQ^+ = 1;$$

По формуле (1) оператора переходов $dx = \bar{x}(t) \& x(t - \Delta t)$ имеем:

$$dQ^+ = \bar{Q}^+(t) \& Q^+(t - \Delta t) \quad (14)$$

Для того, чтобы найти $Q^+(t - \Delta t)$ воспользуемся системой (12):

$$Q(t + \Delta t) = Q^+(t), \text{ из него вытекает, что } Q^+(t - \Delta t) = Q(t);$$

Подставив в формулу (14) получаем:

$$dQ^+ = \bar{Q}^+ \& Q = 1;$$

Ранее было показано, выражение (13), что $Q^+ = \bar{R}(S \cup Q)$, тогда

$$dQ^+ = \overline{\bar{R}(S \cup Q)} Q = (R \cup \bar{S} \bar{Q}) Q = RQ$$

Т.о. триггер переходит из состояния 1 в состояние 0 только при сигнале $R=1$ и состоянии $Q=1$.

В. Пусть состояние триггера меняется с 0 на 1.

$Q^+: 0 \rightarrow 1$, тогда $d\bar{Q}^+ = 1$;

Можно показать, что в этом случае $d\bar{Q}^+ = Q^+ \& \bar{Q} = 1$, тогда

$$d\bar{Q}^+ = \bar{R}(S \cup Q)\bar{Q} = \bar{R}S\bar{Q}$$

Т.о. триггер переходит из состояния 0 в состояние 1 только при состоянии $Q=0$, сигналах $R=0$ и $S=1$.

Вывод: сигнал R более приоритетен, чем сигнал S.

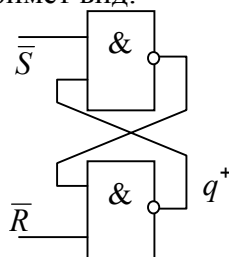
Замечание 3.

Так как функция переходов триггера, заданная в виде таблицы является не полностью определенной и содержит равное число 0 и 1, то в виде формулы она может быть представлена и с использованием СКНФ, тогда получим:

$$Q^+ = S \cup \bar{R}Q = \overline{\overline{S} \cup \overline{\bar{R}Q}} = \overline{\bar{S} \cup \bar{R} \bar{Q}}$$

В этом случае можно показать, что приоритетным является вход S.

Тогда комбинационная схема примет вид:

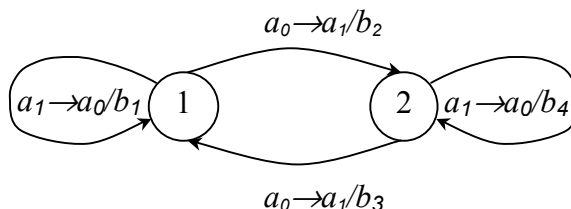


Тема 7.4. Импульсные автоматы

Импульсными автоматами называются такие автоматы, на которые входные сигналы воздействуют импульсно, т.е. кратковременно, в моменты их изменения.

Рассмотрим пример счетного триггера:

$A = \{a_0, a_1\}$;



Этот автомат имеет два типа переходов:

1-й тип: $a_0 \rightarrow a_1$

2-й тип: $a_1 \rightarrow a_0$

Примем эти переходы за знаки автомата.

Задав выходной алфавит $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$, автомат будет сообщать путь, по которому он попал в текущее состояние.

Воспользуемся формулой (1), оператора переходов: $dx = x(t - \Delta t) \& \bar{x}(t)$

В случае более двух знаков определим оператор переходов так:

Пусть есть алфавит $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Оператор переходов должен сопоставлять каждой паре различных знаков новый знак из алфавита, содержащего $m(m-1)$ знак.

Представим такой оператор переходов в виде таблицы.

A		dA
a^-	a^+	
a_1	a_1	—
a_1	a_2	a_{12}

...	...	...
a_1	a_m	a_{1m}
a_2	a_1	a_{21}
a_2	a_2	—
...	...	...
a_2	a_m	a_{2m}
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...
a_m	a_1	a_{m1}
a_m	a_2	a_{m2}
...	...	...
a_m	a_m	—

Где a^- - значение входного сигнала до изменения, а a^+ - значение входного сигнала после изменения,

Зададим автоматную таблицу счетного триггера:

A		1	2
a^-	a^+		
a_0	a_1	$2/b_2$	$1/b_3$
a_1	a_0	$1/b_1$	$2/b_4$

Закодируем алфавиты:

A	a_0	a_1
	1	0

С учетом введенного кодирования можно записать:

$$a_1 \rightarrow a_0 \Leftrightarrow d\bar{a}$$

$$a_0 \rightarrow a_1 \Leftrightarrow da$$

Причем оператор переходов =1, если переход произошел и =0, если не произошел.

Q	1	2
	0	1

B	b_1	b_2	b_3	b_4
	00	01	10	11

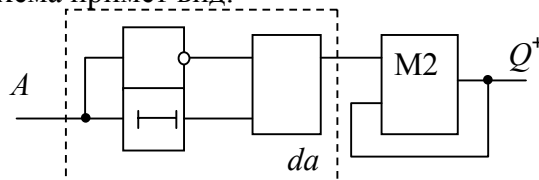
Представим поведение автомата в виде булевых функций:

da	Q	Q^+	B	
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1

Представим функцию Q^+ в виде выражений в автоматном базисе:

$$Q^+ = Q \oplus da$$

Тогда импульсная схема примет вид:



Теорема 7.2. О реализации импульсных автоматов

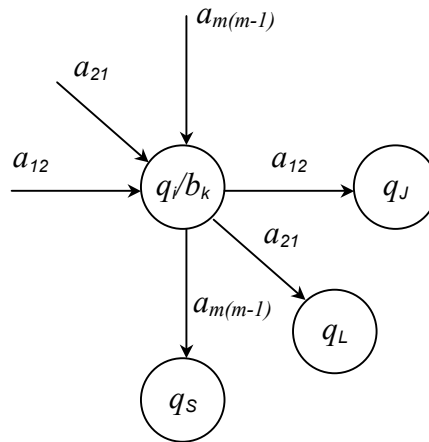
Произвольный импульсный автомат может быть реализован в виде асинхронного потенциального автомата. Верно и обратное.

Доказательство осуществим на примере.

Пусть задан импульсный автомат $K = \langle dA, B, Q, \delta, \lambda \rangle$.

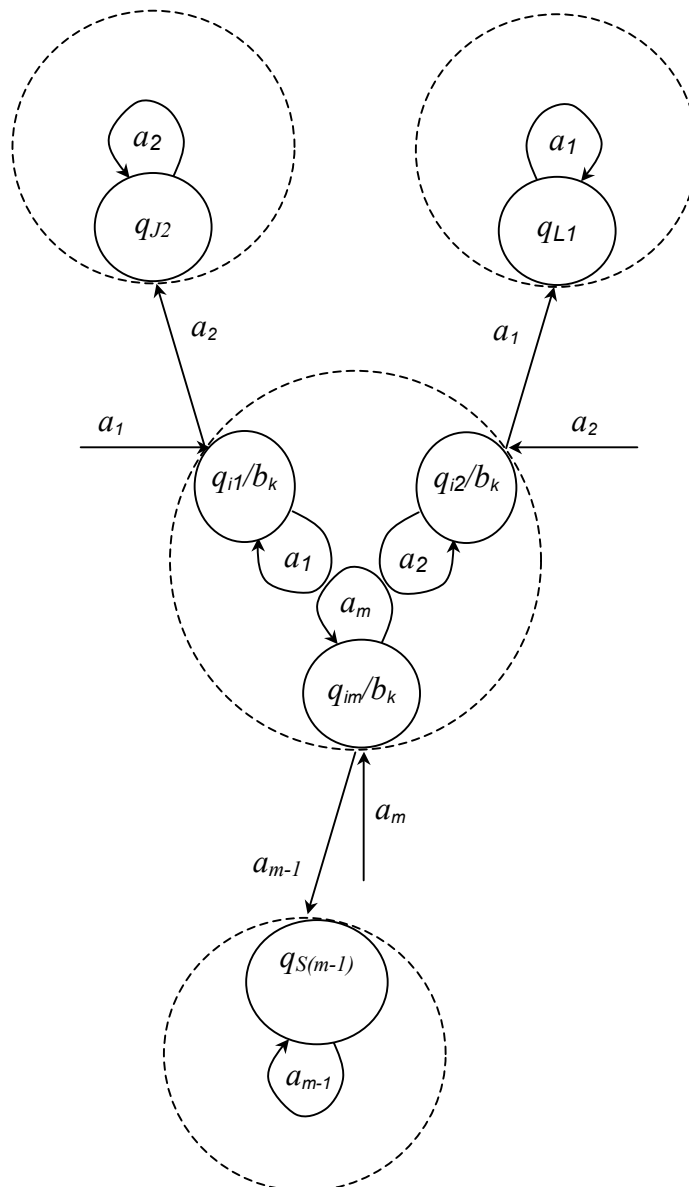
Для построения асинхронного потенциального автомата, неотличимого от заданного преобразуем его в эквивалентный ему автомат Мура $K_M = \langle dA, B, Q_M, \delta_M, \lambda \rangle$.

Пусть задан импульсный автомат Мура.



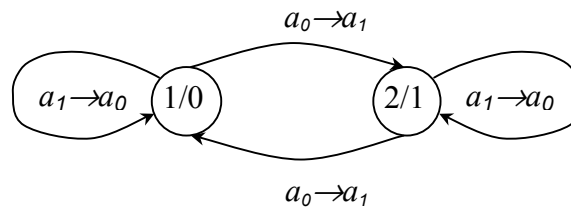
Где a_{ij} это изменение входного знака $a_i \rightarrow a_j$.

Тогда, каждое состояние $q_i \in Q_M$ расщепляется на $m(m-1)$ состояний следующим образом:



Пример:

Рассмотрим импульсный автоматный граф:

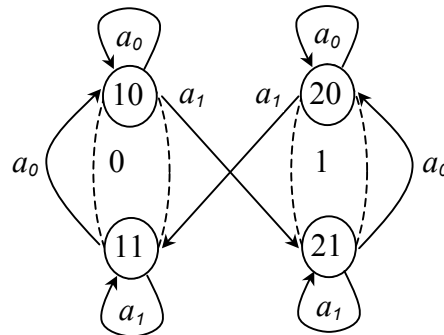


Преобразуем данный автомат в асинхронный автоматный граф.

Как видно из рисунка, каждое состояние (1 и 2) расщепляется на два состояния (10, 11 и 20, 21). Причем, состояния 10 и 11 имеют один и тот же выходной знак 0, а состояния 20 и 21 – знак 1.

Из состояния 1 в состояние 2 имеется дуга $a_0 \rightarrow a_1$, следовательно, из состояния 10 имеется дуга в состояние 21, помеченная знаком a_1 . И к состоянию 21 добавляем петлю, помеченную знаком a_1 .

Аналогично строятся остальные дуги.

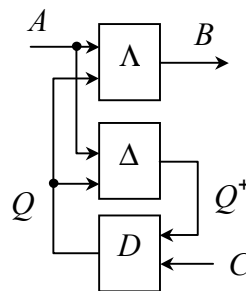


Тема 7.5. Синхронные схемы

Синтез синхронных автоматов, свободных от критических состязаний.

Введение тактового сигнала позволяет исключить из рассмотрения переходные процессы.

Структурная схема синхронного автомата имеет вид:



Тактовый сигнал C выполняет функцию временного селектирования (импульсного воздействия) сигналов элемента памяти D в дискретные моменты времени, поэтому необходимо, чтобы значения сигнала Q^+ были истинными только в моменты импульсного воздействия тактового сигнала C .

Запишем систему уравнений, которая описывает синхронный автомат:

$$\begin{cases} b(t + \tau_\Lambda) = \lambda(q(t), a(t)) \\ q^+(t + \tau_\Delta) = \delta(q(t), a(t)) \\ q(t + \tau_D) = q^+(t)dc \cup q(t)\overline{dc} \end{cases}$$

Очевидно, что значение выходного сигнала Q определяется значением сигнала, поступающего на вход D , в момент изменения тактового сигнала C с 1 на 0 ($\nabla c=1$) и с 0 на 1 ($\nabla c=1$).