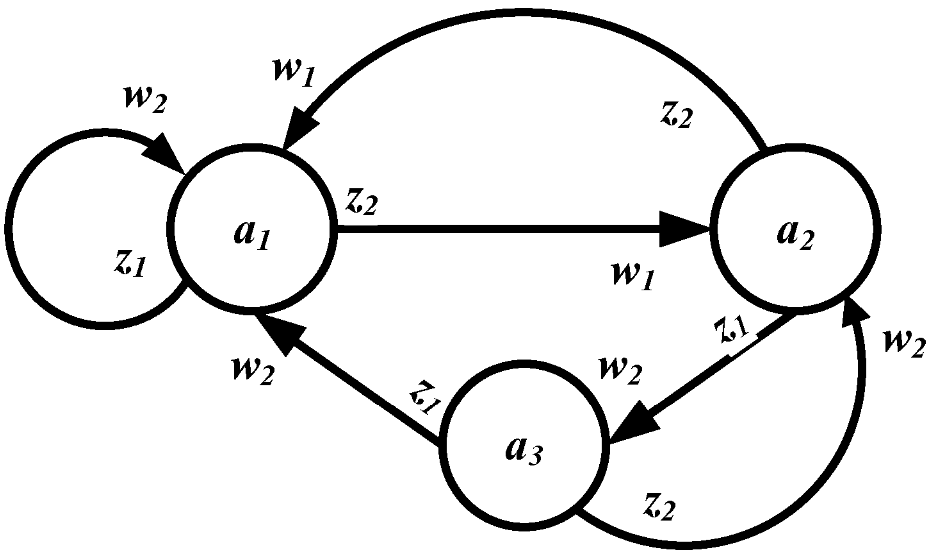
ТЕОРИЯ АВТОМАТОВ

Лекционный материал, разработанный
для самостоятельного освоения
в условиях удаленной системы обучения

часть 7

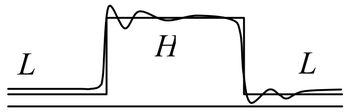


7. Проектирование дискретных устройств

7.1. Дискретные устройства

Дискретное устройство – это устройство, функционирующее в дискретные моменты времени и обрабатывающее дискретные сигналы.

Дискретный сигнал – это абстракция реального сигнала, который рассматривается как изменяющийся по закону дискретной функции.

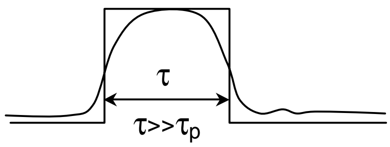


Сигнал – это параметр или числовая характеристика физического процесса, изменяющийся во времени и служащий для передачи данных.

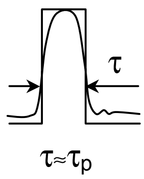
Электрический сигнал – это изменение во времени тока или напряжения в электрической сети.

Абстракции дискретных сигналов:

Потенциальный сигнал – это такой дискретный сигнал, соседние изменения которого значительно превосходят время реакции дискретного устройства, на которое он воздействует.



Импульсный сигнал– это такой дискретный сигнал, у которого время между соседними изменениями соизмеримо с временем реакции дискретного устройства на него.



Для описания изменений потенциальных сигналов и порождаемых ими импульсных сигналов удобно использовать математический аппарат, основанный на операторах переходов d и ∇.

Оператор переходов d. Пусть имеется некотроый дискретный сигнал $x(t)$.

Оператор переходов определяется соотношением:

$$dx(t) = x(t - \tau_p) \,\&\, \overline{x}(t)$$
$$d\overline{x}(t) = \overline{x}(t - \tau_p) \,\&\, \overline{\overline{x}}(t)\text{,} \qquad (1)$$

где $dx(t)$ – импульсный сигнал, порождаемый изменением потенциального сигнала с 1 на 0; $x(t)$ – значение потенциального сигнала в данный момент времени; $x(t-\tau_p)$– значение потенциального сигнала в предыдущий момент времени.

Очевидно, что $dx = 1$ только при изменении потенциального сигнала с 1 на 0, а $d\overline{x} = 1$ только при изменении потенциального сигнала с 0 на 1.

Введем обозначения сигналов $x(t) = x$, $x(t-\tau_p) = x'$, тогда, по формуле (1) имеем:

$$dx = \overline{x} \,\&\, x'$$

Можно показать, что

$$dx \,\&\, d\overline{x} = 0$$

Действительно, потенциальный сигнал не может одновременно изменяться с 1 на 0 и с 0 на 1.

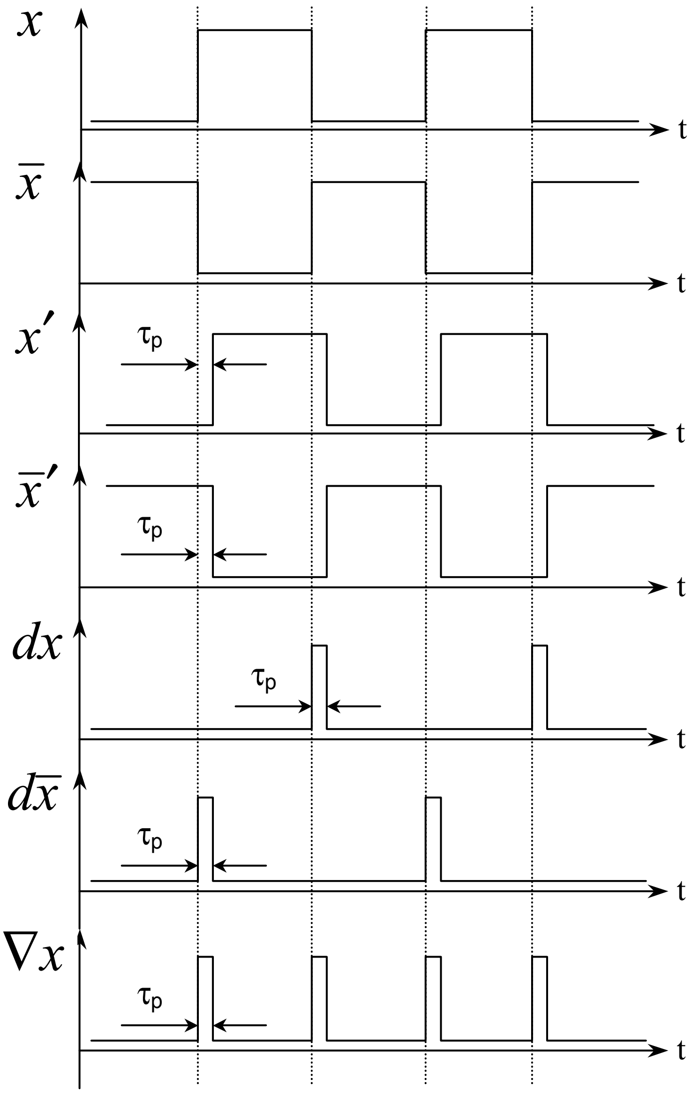
Оператор переходов ∇ определяется соотношением:

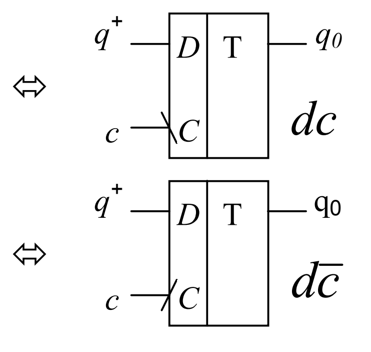
$$\nabla x = dx \cup d\overline{x} = x \oplus x' \qquad (2)$$

Очевидно, что $\nabla x = 1$ при изменении потенциального сигнала x как с 1 на 0, так и с 0 на 1.

Представим модель оператора переходов в виде временных диаграмм..

Будем считать, что для заданного устройства этот сигнал потенциальный.

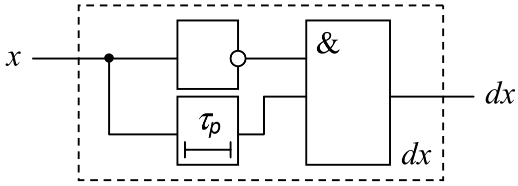




Реализация оператора переходов

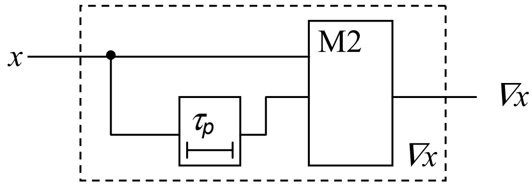
1. Построим схему оператора переходов d в соответствии с выражением (1).

$$dx(t) = x(t - \tau_p)\ \&\ \overline{x}(t)$$



2. Построим схему оператора переходов ∇ в соответствии с выражением (2).

$$\nabla x = dx \cup d\overline{x} = x \oplus x'$$

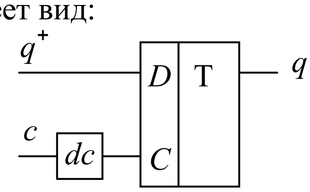


3. Синхронный элемент памяти на базе DC-триггера.

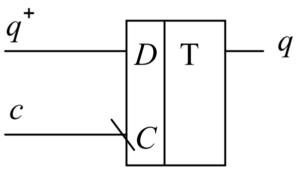
Синхронный D-триггер имеет:

- вход D для подачи информационного сигнала.
- вход C для подачи тактового сигнала.
- выход Q.

Обозначение D-триггера имеет вид:



Или можно обозначать:



Причем значение выходного сигнала *Q* определяется значением сигнала *D* в момент изменения тактового сигнала *C* с 1 на 0 (*dc*=1). При *dc*=0 выходной сигнал триггера не изменяется.

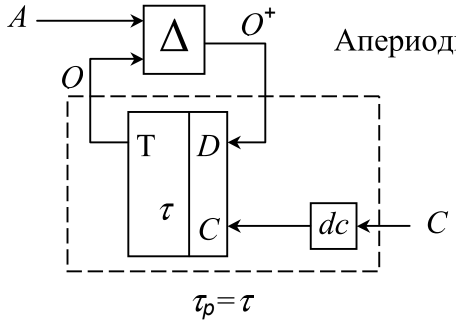
По данному словесному описанию закона функционирования синхронного D-триггера можно составить таблицу истинности:

dc	*D*	Q^+	*Q*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

По таблице истинности составим функцию переходов, получим:

$$Q = Q^{+} dc \cup Q\overline{dc} \qquad (3)$$

Рассмотрим DC-триггер в цепи обратной связи.



Апериодическая схема

Схема называется апериодической, когда для ее правильной работы необходимо подобрать времена задержки.

В этой схеме DC триггер используется в качестве синхронного элемента памяти. Можно показать, что если функция переходов синхронного D-триггера содержала бы не импульсный сигнал *dc*, а потенциальный сигнал *C*, то такой триггер не может быть применим в синхронных схемах, т.к. после появления нового состояния на выходе автомата Δ это состояние опять воздействует на элемент памяти, т.к. сигнал С еще активный. Что может привести к повторной, неправильной, смене состояния на выходе элемента памяти. Если использовать схему оператора переходов, через которую пропускать синхросигнал, и выбрать τ_p достаточным для срабатывания триггера, то DC-триггер может быть использован, как синхронный элемент памяти.

Тема 7.2. Комбинационные схемы

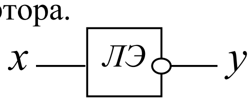
Комбинационной схемой называется сеть из логических элементов, реализующая некоторый комбинационный автомат. Следовательно, комбинационная схема реализует однозначное соответствие между значениями входных и выходных сигналов. В отличие от сети из элементарных комбинационных автоматов – эта схема построена на реальных логических элементах.

Под *Логическим Элементом (ЛЭ)* будем понимать реализацию элементарного комбинационного автомата из некоторого автоматного базиса.

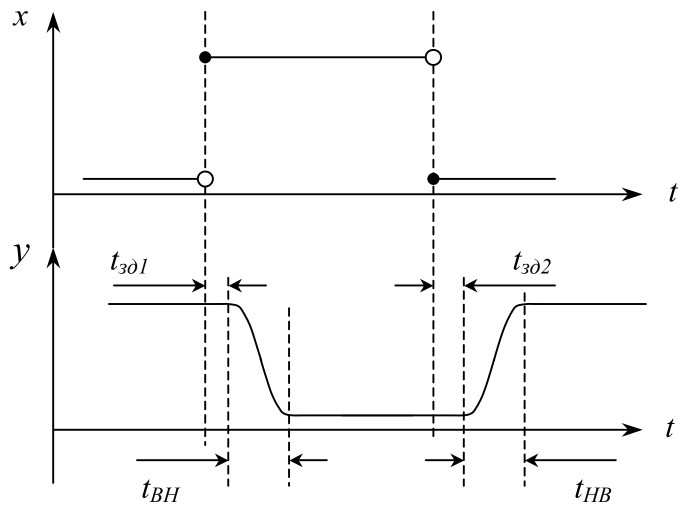
Логические элементы, используемые при синтезе комбинационных автоматов, по своим характеристикам отличаются от абстрактных элементарных комбинационных автоматов тем, что:

1. Каждый ЛЭ функционирует во времени, чем вносит задержку в распространение сигнала в схеме.
2. Каждый ЛЭ вызывает не мгновенное изменение сигнала на выходе, как это принято считать для дискретных функций, а изменение выходного сигнала занимает некоторое время.

Рассмотрим модель ЛЭ инвертора.

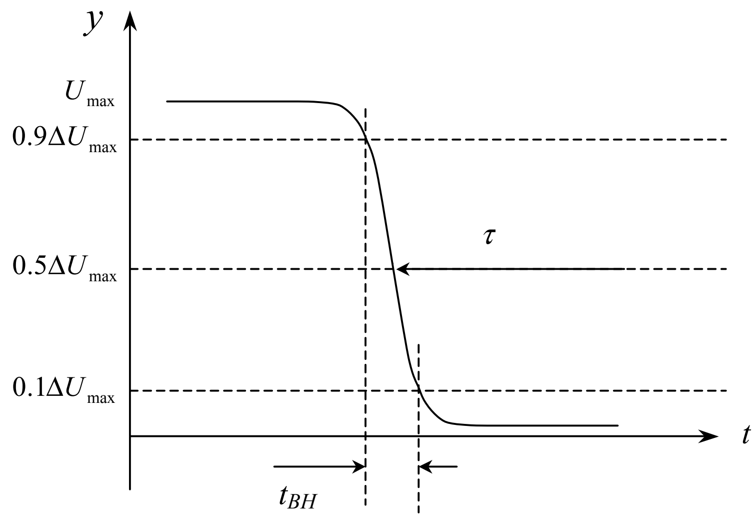


Представим модель этого ЛЭ в виде временных диаграмм.



где $t_{зд1,2}$ – время от смены сигнала на входе, до начала смены сигнала на выходе; $t_{ВН,НВ}$ – время смены выходного сигнала.

Рассмотрим подробнее участок перехода выходного сигнала от высокого уровня к низкому уровню:



Принято считать, что сигнал высокого уровня, если он больше $0,9\Delta U_{max}$ и сигнал низкого уровня, если он меньше $0,1\Delta\ U_{max}$.Знак Δ означает, что имеется ввиду амплитуда выходного сигнала.

Например, U_{max}=1В, но сигнал никогда не достигает этого уровня, а принимает значение не больше 0,75В. Тогда, такой сигнал, считается сигналом высокого уровня, если его значение больше 0,75*0,9=0,675В.

Величина τ – длительность нахождения сигнала в состоянии низкого уровня.

Иногда принято использовать *интегральные параметры*:

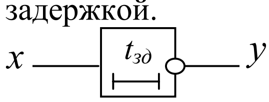
A. *Среднее время распространения задержки сигнала*

$$t_{зд} = \frac{t_{зд1} + t_{зд2}}{2}$$

B. *Среднее время перехода*

$$t_{пер} = \frac{t_{ВН} + t_{НВ}}{2}$$

Мы можем абстрагироваться от процессов перехода ЛЭ между состояниями и рассматривать модель как элемент с задержкой.

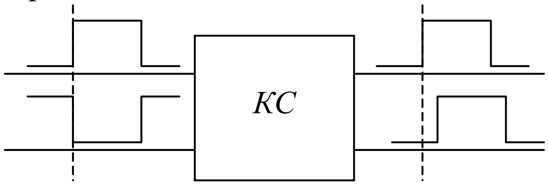


Переходные процессы в комбинационных схемах

Переходные процессы – это явление изменения во времени состояния выхода комбинационной схемы при установившихся значениях входных сигналов.

Состязания ЛЭ (гонки, явление риска) – это переходный процесс в комбинационной схеме, при котором наблюдаются не одновременные изменения выходных сигналов при одновременном изменении входных сигналов.

Например, рассмотрим комбинационную схему с двумя входами и двумя выходами. Эта схема должна пропускать сигнал с первого входа без изменений и инвертировать сигнал, поступающий со второго входа.

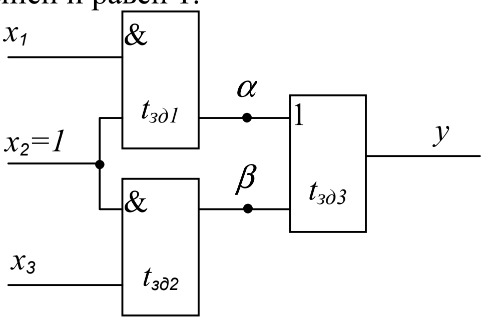


Как видно из рисунка, сигналы на входе изменяются одновременно, а на выходе второй сигнал запаздывает на некоторое время. Очевидно, что в это время схема возвращает ложное значение сигнала.

Рассмотрим причину возникновения состязания ЛЭ.

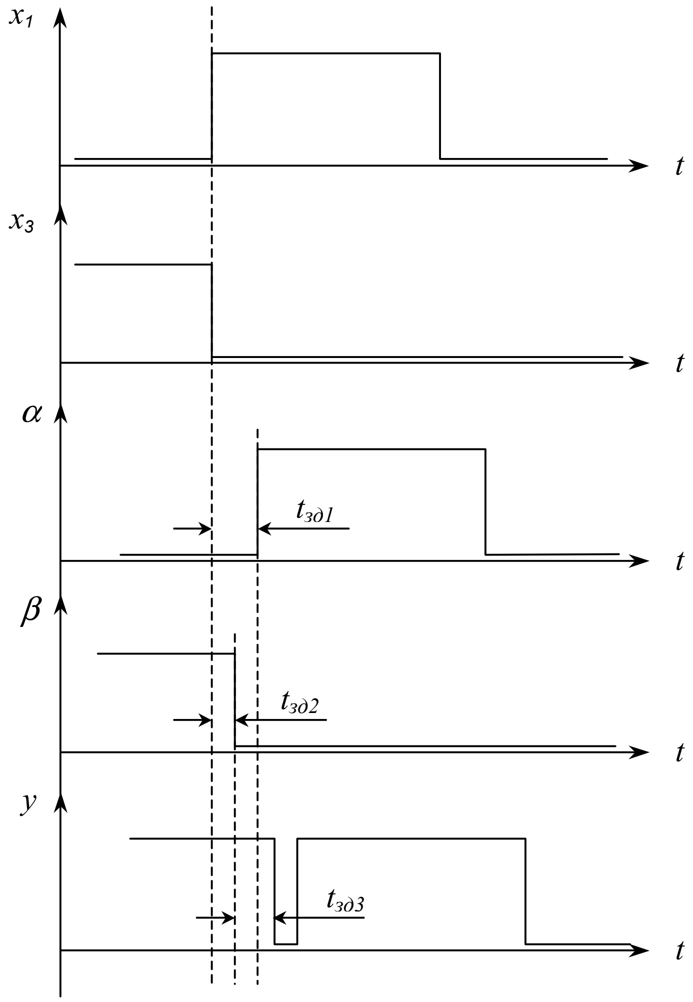
Пример. Схема имеет три входа и один выход.

Пусть сигнал x_2 постоянен и равен 1.



Будем считать, что все логические элементы имеют разные времена задержки, т.е. $t_{зд1} \neq t_{зд2} \neq t_{зд3}$.

Представим модель схемы в виде временных диаграмм.



Очевидно, что состязания наступают когда $t_{зд1}>t_{зд2}$.

Представим модель схемы в виде булевой функции:

$$y = x_1x_2 \cup x_3\bar{x}_2$$

Если $x_2=1$, то

$$y = x_1 \cup x_3$$

Критическими состязаниями называются состязания ЛЭ при которых на выходе комбинационной схемы появляются кратковременные ложные значения выходного сигнала. (Например, на выходе схемы возникает ситуация, когда y=0, хотя в это время x_1=1.)

Синтез комбинационных схем, свободных от критических состязаний.

Ранее была показана возможность появления на выходах комбинационных схем ложных значений сигналов, что приводит к неправильной работе устройства.

Комбинационная схема называется *свободной от состязаний*, если в ней при соседних изменениях состояний входа отсутствуют критические состязания ЛЭ.

Соседние изменения состояния входа – это только те изменения входных сигналов, которые встречаются при функционировании дискретного устройства. (Например, для ранее рассмотренной схемы критического состязания может не произойти, если $x_1=0$, а $x_3=1$.)

Одним из способов борьбы с критическими состязаниями является использование такого кодирования алфавита автомата, при котором соседнее изменение состояния входа реализуется в виде изменения одного сигнала. Например, можно использовать код Грея.

Например:

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$a_1 \to 010$

$a_2 \to 100$

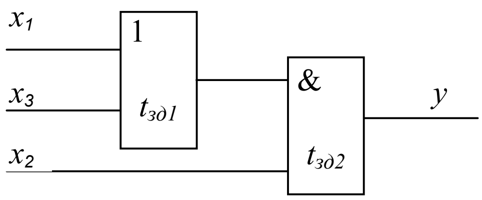
$a_3 \to 001$

Очевидно, для схем имеющих один выход, обеспечив изменение одного сигнала на входе, мы обеспечим избавление от ложных сигналов на выходе. Но если выходов несколько, то могут возникнуть критические состязания.

Теорема 7.1. О комбинационных схемах, свободных от критических состязаний

Идея теоремы состоит в том, что одни и те же схемы можно организовать по-разному:

$$y = x_1 x_2 \cup x_3 x_2 \Leftrightarrow y = (x_1 \cup x_3) x_2$$



Очевидно, если изменить одновременно x_1 и x_3, то критических состязаний не возникнет, а если x_3 и x_2, то могут возникнуть.

Утверждение. Для того, чтобы комбинационная схема была свободна от критических состязаний необходимо чтобы для соседних изменений входных сигналов только один входной сигнал x_t изменялся, а сама дискретная функция была представлена в виде выражения, свободного от критических состязаний, и такое выражение существует.

Доказательство.

- Пусть задана дискретная функция $f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_{t+1}, x_t, x_{t-1}, \ldots, x_1, x_0)$, $x_j \in B$, которая должна быть реализована в виде комбинационной схемы, свободной от критических состязаний. Предположим, что это булева функция $B=\{0,1\}$

  В соответствии с теоремой Шеннона о разложении булевых функций запишем:

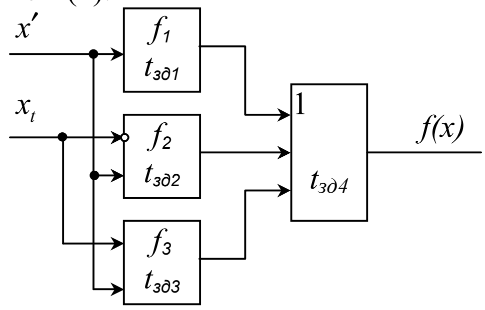
  Пусть

$$x = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{t+1}, x_t, x_{t-1}, \ldots, x_1, x_0)$$
$$x' = (x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{t+1}, x_{t-1}, \ldots, x_1, x_0)$$

  Тогда

$$f(x) = f(x', x_t) = f_1(x') \cup \bar{x}_t f_2(x') \cup x_t f_3(x') \qquad (4)$$

- Представим произвольную комбинационную схему, сгруппируем ЛЭ которой в соответствии с выражением (4).



Так как по условию теоремы изменяется какой-то сигнал x_t, а величины задержек $t_{зд2}$ и $t_{зд3}$ не равны, то можно рассматривать комбинационную схему, зависящей от изменения двух сигналов: x_t и $\overline{x}_t$, которые могут изменяться не одновременно, т.е. может существовать период времени, когда они оба равны 0 или 1.

Очевидно, можно подобрать такую форму функции f^* чтобы неодновременные изменения x_t и $\overline{x}_t$ не внесли критических состязаний.

Т.о. выражение (4) следует рассматривать как:

$$f^*(x', x_t, \overline{x}_t) = f_1(x') \cup \overline{x}_t f_2(x') \cup x_t f_3(x') \qquad (5)$$

Представим функцию $f(x)$ зависящей от $(n+1)$ переменной: $x', x_t, \overline{x}_t$ и переменную x_t не будем однозначно связывать с $\overline{x}_t$. Это позволит смоделировать ситуацию, когда возникают состязания элементов, только введя опережение или запаздывание сигнала x_t относительно $\overline{x}_t$. Тогда функции f_1, f_2, f_3. можно рассматривать как не вносящие задержку в распространение сигнала.

- Возможны четыре случая, когда изменяется только один входной сигнал x_t:

a) $f(x',0)=0$, $f(x',1)=0$ - функция сохраняющая 0;
b) $f(x',0)=0$, $f(x',1)=1$ - функция не сохраняющая ни 0, ни 1;
c) $f(x',0)=1$, $f(x',1)=0$ - функция не сохраняющая ни 0, ни 1;
d) $f(x',0)=1$, $f(x',1)=1$ - функция сохраняющая 1;

<u>Рассмотрим случай a)</u>

$$f(x',0)=0, \; f(x',1)=0$$

Из формулы (4) $f(x) = f(x', x_t) = f_1(x') \cup \overline{x}_t f_2(x') \cup x_t f_3(x')$ получаем:

$$\begin{cases} f(x',0) = f_1(x') \cup f_2(x') = 0 \\ f(x',1) = f_1(x') \cup f_3(x') = 0 \end{cases} \Rightarrow f_1(x') = f_2(x') = f_3(x') = 0$$

Тогда формула (5) $f^*(x', x_t, \overline{x}_t) = f_1(x') \cup \overline{x}_t f_2(x') \cup x_t f_3(x')$ 0принимает вид:

$$f^*(x', x_t, \overline{x}_t) = 0$$

<u>Вывод:</u> В случае а), при изменении сигнала x_t, состязания ЛЭ в комбинационной схеме не возникает, т.к. значение функции f^* не зависит от этого сигнала.

<u>Рассмотрим случай b)</u>

$$f(x',0)=0, \; f(x',1)=1$$

Из формулы (4) получаем:

$$\begin{cases} f(x',0) = f_1(x') \cup f_2(x') = 0 \\ f(x',1) = f_1(x') \cup f_3(x') = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x') = f_2(x') = 0 \\ f_3(x') = 1 \end{cases}$$

Тогда формула (5) принимает вид:

$$f^*(x', x_t, \overline{x}_t) = x_t$$

В соответствии с этим выражением, при изменении переменной x_t с 1 на 0 или с 0 на 1, значение функции зависит только от переменной x_t и не зависит от $\bar{x}_t$.

Вывод: Т.к. в случае b) выходное значение комбинационной системы зависит только от сигнала x_t, то возникают состязания ЛЭ, но они не критические.

Рассмотрим случай c)

$$f(x',0)=1,\ f(x',1)=0$$

Из формулы (4) получаем:

$$\begin{cases} f(x',0)=f_1(x')\cup f_2(x')=1 \\ f(x',1)=f_1(x')\cup f_3(x')=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1(x')=f_3(x')=0 \\ f_2(x')=1 \end{cases}$$

Тогда формула (5) принимает вид:

$$f^*(x',x_t,\bar{x}_t)=\bar{x}_t$$

Вывод: Т.к. в случае c) выходное значение комбинационной системы зависит только от сигнала $\bar{x}_t$, то возникают состязания ЛЭ, но они не критические.

Рассмотрим случай d)

$$f(x',0)=1,\ f(x',1)=1$$

Из формулы (4) получаем:

$$\begin{cases} f(x',0)=f_1(x')\cup f_2(x')=1 \\ f(x',1)=f_1(x')\cup f_3(x')=1 \end{cases} \qquad (6)$$

Система (6) имеет несколько решений:

- Если $f_1(x')=1$, то значение функции не зависит от переменной x_t и результат её вычисления схемой не зависит от переменных x_t и $\bar{x}_t$, т.е. состязания ЛЭ не возникает.
- Очевидно, состязания могут возникнуть при $f_1(x')=0$, тогда решение системы (6):

$$\begin{cases} f_2(x')=1 \\ f_3(x')=1 \end{cases}$$

Тогда формула (5) принимает вид:

$$f^*(x',x_t,\bar{x}_t)=\bar{x}_t\cup x_t$$

Если x_t и $\bar{x}_t$ некоторое время одновременно равны 1, то $f^*(x',x_t,\bar{x}_t)=1$, т.е. критические состязания не наступают. А если x_t и $\bar{x}_t$ некоторое время одновременно равны 0, то $f^*(x',x_t,\bar{x}_t)=0$, т.е. на выходе появляется ложное значение.

Вывод: Т.о. критические состязания возникают только при условии:

$$\begin{cases} f_1(x')=0 \\ f_2(x')=1 \\ f_3(x')=1 \\ f(x',0)=1 \\ f(x',1)=1 \end{cases} \qquad (7)$$

Кроме того, эти условия должны выполняться одновременно.

- Синтез формального представления булевой функции свободной от критических состязаний.

Условия (7) определяют, когда возможны критические состязания, приводящие к кратковременному появлению 0 на выходе комбинационной схемы.

Найдем все значения переменных из множества x', которые обращают уравнение системы (7) в тождества. Очевидно, если система (7) имеет решение, то могут возникнуть критические состязания. А если система (7) не имеет решения, то критические состязания не возникают.

Представим решения системы (7) в виде:

x'	Решения		
	0	…	S-1
x_{n-1}	$e_{n-1}^{(0)}$	$\cdots$	$e_{n-1}^{(S-1)}$
…	…	…	…
x_{t+1}	$e_{t+1}^{(0)}$	$\cdots$	$e_{t+1}^{(S-1)}$
x_{t-1}	$e_{t-1}^{(0)}$	$\cdots$	$e_{t-1}^{(S-1)}$
…	…	…	…
x_0	$e_0^{(0)}$	$\cdots$	$e_0^{(S-1)}$

Где e_j^i - значение переменной x_j из x' при котором уравнение системы (7) обращается в тождество, а i номер решения, т.к. их может быть несколько.

Другими словами перед нами стоит задача вычислить, на каких наборах переменных возникают критические состязания.

Определим корректирующую функцию $q(x')$ следующим образом:

$$q(x') = \bigcup_{i=0}^{S-1} x_{n-1}^{e_{n-1}^{(i)}} \ldots x_{t+1}^{e_{t+1}^{(i)}} x_{t+1}^{e_{t+1}^{(i)}} \ldots x_0^{e_0^{(i)}} \qquad (8)$$

где

$$x^e = \begin{cases} \bar{x}, & e = 0 \\ x, & e = 1 \end{cases} \qquad (9)$$

Свойства функции $q(x')$:

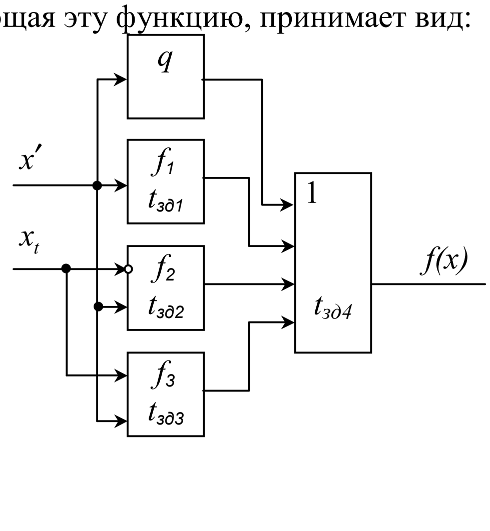
- $q(x') = 1$, если возникают критические состязания.
- $q(x') = 0$, если критические состязания не возникают.

Корректирующая функция $q(x')$ используется для реализации комбинационной схемы, свободной от критических состязаний.

С учетом функции $q(x')$ выражение (5) принимает вид:

$$f^*(x', x_t, \bar{x}_t) = f_1(x') \cup \bar{x}_t f_2(x') \cup x_t f_3(x') \cup q(x') \qquad (10)$$

Тогда схема, реализующая эту функцию, принимает вид:



Критические состязания наступают только при значении функции равном 1, т. е. возможно кратковременное появление 0 на выходе, но в этот момент функция $q(x')$ принимает значение =1, поэтому *f(x)*=1.

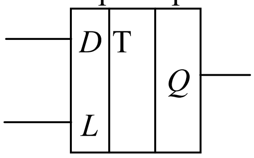
Очевидно, что функция $f(x', x_t)$ тождественно равна исходной функции $f(x)$

$$f(x', x_t) = f_1(x') \cup \bar{x}_t f_2(x') \cup x_t f_3(x') \cup q(x') \equiv f(x)$$

- Если допускается изменение более одного входного сигнала, то в общем случае невозможно синтезировать комбинационную схему, свободную от критических состязаний.

ч.т.д.

<u>*Пример 1.*</u> Реальная схема DL триггера.



$Q = \bar{L}Q \cup LD$

Как видно, функция DL триггера зависит от *L,Q,D*, т.е. *f(L,Q,D)*

$$Q = \bar{L}Q \cup LD \qquad (11)$$

Рассмотрим случай, когда изменяется переменная *Q*, по формуле (11) и (5) имеем:

$f_1 = LD$, т.к. именно LD независимо от переменной *Q*.

$f_2 = 0$, т.к. нет такой части формулы (11), которая зависит от переменной $\bar{Q}$.

$f_3 = \bar{L}$, т.к. именно $\bar{L}$ зависит от переменной *Q*.

$$Q:\quad f = \underset{f_1}{(LD)} \cup \bar{Q}\ \underset{f_2}{(0)} \cup Q\ \underset{f_3}{(\bar{L})}$$

Очевидно, при изменении переменной *Q* критические состязания не возникают, т.к. *f₂=0*

Рассмотрим случай, когда изменяется переменная *D*, по формуле (5) имеем:

$$D:\quad f = \underset{f_1}{(\bar{L}Q)} \cup \bar{D}\ \underset{f_2}{(0)} \cup D\ \underset{f_3}{(L)}$$

Очевидно, при изменении переменной *D* критические состязания не возникают, т.к. $f_2=0$

Рассмотрим случай, когда изменяется переменная *L*, по формуле (5) имеем:

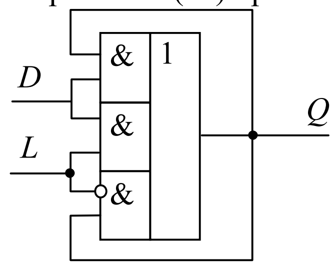
$$L:\quad f = \underset{f_1}{(0)} \cup \bar{L}\ \underset{f_2}{(Q)} \cup L\ \underset{f_3}{(D)}$$

Очевидно, при изменении переменной *L* возникают критические состязания, т.к. $f_1=0$, $f_2 \neq 0$ и $f_3 \neq 0$.

Тогда по выражениям (9) и (8) имеем:

$$\begin{cases} Q = 1 = e_Q^{(0)} \\ D = 1 = e_D^{(0)} \end{cases} \Rightarrow q(Q, D) = QD$$

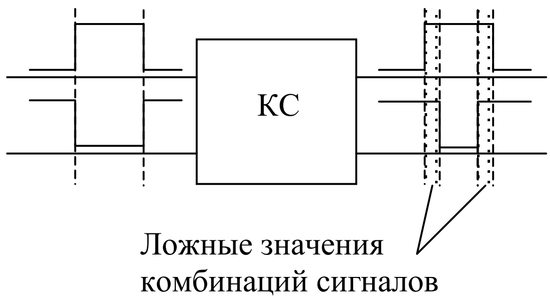
Схема DL триггера с учетом выражения (10) принимает вид:



Этот триггер работает без критических состязаний даже при различных временах задержки ЛЭ.

Синтез комбинационных схем, свободных от состязаний, с несколькими выходами

Рассмотрим комбинационную схему, повторяющую входные сигналы. Очевидно, если времена смены выходного сигнала $t_{ВН} \neq t_{НВ}$, то могут возникнуть критические состязания.



Основной метод синтеза таких комбинационных схем заключается в использовании кода Грея при кодировании выходных алфавитов, когда только один выходной сигнал меняется для каждой смены входных сигналов.

Вторым методом синтеза является синтез комбинационных схем апериодическим методом, когда задержки, вносимые ЛЭ, подбираются. Причем точность подбора задержек должна соответствовать времени реакции схемы, на которую эти сигналы воздействуют.