7. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Определение определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Разобьем данный отрезок на n частичных отрезков. В каждом интервале выберем произвольную точку ξ_i и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где Δx_i – длина i-го интервала.

Определенный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до b вводится как предел суммы бесконечно большого числа слагаемых, каждое их которых стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$.

Свойства определенного интеграла

Предположим, что $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. Тогда справедливы следующие свойства:

1. $\int_a^b 1dx = (b-a)$;

2. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$ где $k -$ константа;

3. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

4. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ где $a < c < b$;

5. $\int_a^a f(x)dx = 0$

7.1. Постановка задачи численного интегрирования

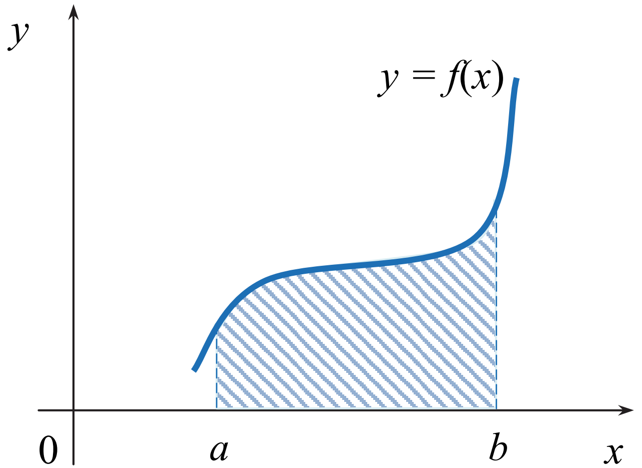
Задача численного интегрирования функций заключается в вычислении приближенного значения определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

на основе ряда значений подынтегральной функции $\{f(x)|_{x=x_k} = f(x_k) = y_k\}$, то есть для функции, заданной таблично.

Геометрический смысл определенного интеграла

Определенный интеграл от неотрицательной функции $y = f(x)$ равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, слева и справа – отрезками прямых $x = a$ и $x = b$, снизу – отрезком оси Ox.



Для вычисления определенных интегралов используют формулу Ньютона-Лейбница:

Если функции $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и F(x) – какая-либо ее первообразная, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_b^a = F(b) - F(a).$$

Достаточно легко вычисляются интегралы от полиномов (многочленов).

$$\int_0^0 (x^2 + 2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_3^0 = \left(\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 2 \cdot 0\right) = 15.$$

Формулы численного вычисления однократного интеграла называют **квадратурными формулами**, двойного и более кратного – **кубатурными**.

Аналитическое вычисление интеграла (с помощью таблиц первообразных) очевидно дает точное решение.

Однако если функция $f(x)$ достаточно сложная, то ее вычисление представляет собой достаточно сложный алгоритмический процесс, а в ряде случаев найти ее аналитически просто невозможно.

Например для функции

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

первообразная не может быть выражена через элементарные функции.

С помощью аналитического способа невозможно вычислить интеграл от функции заданной таблично.

В этих случаях прибегают к предварительному интерполированию функций, т.е. замене их на функцию более удобную для интегрирования. В качестве таких функций выбирают полиномы, заменяя тем самым «неудобные» функции интерполяционными полиномами.

Пусть $g(x)$ – интерполяционный полином функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Тогда можно положить, что

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + R[f], \tag{1}$$

Если пренебречь остаточным членом $R[f]$, то для вычисления интеграла I получаем приближенную формулу

$$I \approx \hat{I} = \int_a^b g(x)dx\,.$$

Обозначим через

$$y_i = f(x_i)$$

значение подынтегральной функции $f(x)$ в точках

$$x_i \in \overline{\omega}_n,$$

где $\overline{\omega}_n$ – невырожденная сетка, определенная на отрезке $[a, b]$; $i = \overline{0, n}$. Назовем эти точки **узлами интегрирования**.

Пусть множество точек $\{x_i\}$ на $[a, b]$ представляет собой упорядоченный набор, т.е.:

$$\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$$

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n)$$

В качестве приближенной функции $g(x)$ рассмотрим интерполяционный полином Лагранжа, определенный на $\overline{\omega}_n$:

$$\boxed{I \approx \hat{I} = \int_a^b g(x)dx}$$

$$g(x) = L_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x_k) \cdot \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)} \right) + r_n(x),$$

где $r_n(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа.

$$I \approx \hat{I} = \int_a^b g(x)dx$$

$$g(x) = L_n(x) + r_n(x) = \\ = \sum_{k=0}^{n}\left(f(x_k)\cdot\frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}\right) + r_n(x),$$

Тогда:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx + R_n(f) = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) + R_n,$$

то есть интегрирование заменилось суммированием:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) + R_n, \qquad (2)$$

где

$$C_k = \int_a^b \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}dx, \quad R_n(f) = \int_a^b r_n(x)dx.. \qquad (2^{/})$$

$\{x_k\}$ – узлы интегрирования, $\{C_k\}$ – веса; R_n – погрешность квадратурной формулы.

Если веса C_k вычислены по формуле ($2^/$), то соответствующую квадратурную формулу (2) называют **квадратурной формулой интерполяционного типа**.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) + R_n, \qquad (2)$$

$$C_k = \int_a^b \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)} dx. \qquad (2^/)$$

Дальнейшее свое внимание мы сосредоточим на построении интерполяционных квадратурных формул на сетках с постоянным шагом ($h = \text{const}$):

$$x_{k+1} - x_k = h_{k+1} = h = \frac{b-a}{n} = \text{const}.$$

7.1.1. Квадратурные формулы Ньютона-Котесса (h = const)

Пусть

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

$$h = \frac{b-a}{n},$$

т.е.

$$x_k = x_0 + kh;\ k = \overline{0,n}.$$

Тогда при вычислении весовых коэффициентов (2/): $C_k = \int_a^b \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}\rho(x)dx$

возможны дальнейшие упрощения.

Обозначим $\dfrac{x-x_0}{h} \equiv q$, получим

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) =$$

$$= h^{n+1}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-(x_0+h)}{h}\right)\dots\left(\frac{x-(x_0+nh)}{h}\right) =$$

$$= h^{n+1}q(q-1)\dots(q-n);$$

$$w'(x_k) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n) =$$

$$= \left|\begin{matrix} x_k-x_0 = kh \\ x_k-x_1 = kh-h \\ \dots \\ x_k-x_n = -(kh-nh) \end{matrix}\right| = h^n k(k-1)\dots 1\cdot(-1)(-1)\dots\big(-(n-k)\big) =$$

$$= (-1)^{n-k}h^n k!\,(n-k)!$$

В таком случае

$$w(x) = h^{n+1} q(q-1)\dots(q-n)$$

$$w'(x_k) = (-1)^{n-k} h^n k!\,(n-k)!$$

$$C_k = \int_a^b \frac{w(x)dx}{(x-x_k)w'(x_k)} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x - x_k = x - (x_0 + kh) = \\ = \left(\frac{x - x_0}{h} - k\right) h = (q-k)h; \\ dx = h dq \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \frac{h^{n+2}}{h^{n+1}} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)} dq$$

Окончательно

$$C_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} h \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)} dq \qquad (3)$$

– **веса квадратурной формулы Ньютона-Котесса**.

Заменим в (3) $h = \dfrac{b-a}{n}$ и введем обозначения $C_k = (b-a)K_k$, тогда

$$C_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} h \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)} dq$$

$$K_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} \frac{1}{n} \int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)} dq \qquad (4)$$

– **коэффициенты Котесса**.

А сама квадратурная формула принимает вид:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)K_k + R_n[f] \qquad (5)$$

– **формула Ньютона-Котесса**, где $h = \dfrac{b-a}{n}$; $f(x_i) = f(a+ih)$.

Свойства коэффициентов Котесса:

1. $\sum_{k=0}^{n} K_k = 1$

2. $K_k = K_{n-k}$

$$K_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n}\int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)}dq$$

коэффициенты Котесса

7.1.2. Важные частные случаи формулы Ньютона – Котесса

$$K_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n}\int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)}\,dq$$

коэффициенты Котесса

$$\sum_{k=0}^{n} K_k = 1; \;\; K_k = K_{n-k}$$

Квадратурная формула трапеций

($n = 1$)

Пусть соответствующий интерполяционный полином Лагранжа – полином первой степени, т.е. $n = 1$. Полином первой степени строится по двум точкам. Следовательно, сетка $\overline{\omega} = \{x_0, x_1\}$ содержит два узла интерполяции. В этих узлах заданы значения функции $f(x)$: $f(x_0) = y_0$; $f(x_1) = y_1$;

Найдем коэффициенты Котесса K_0 и K_1 с помощью свойств:

$$\begin{cases} K_0 + K_1 = 1, \\ K_0 = K_1. \end{cases} \Rightarrow K_0 = K_1 = \frac{1}{2},$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)K_k + R_n[f]$$

$$K_0 = K_1 = \frac{1}{2}$$

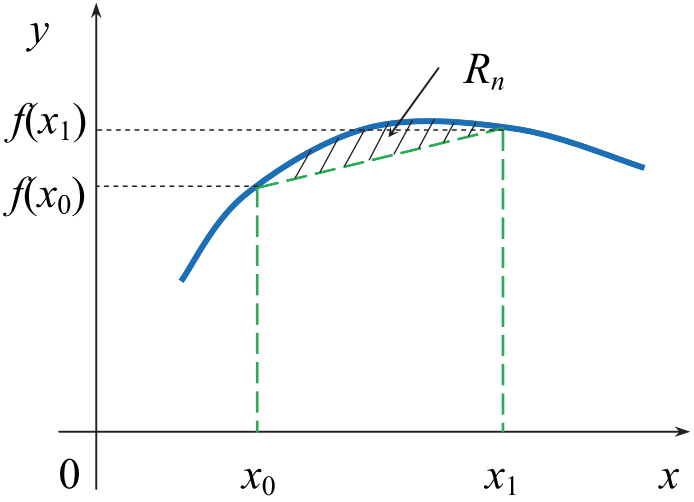
Тогда **квадратурная формула трапеции** имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0)\left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_1\right) + R_{\text{тр}}, \qquad (6)$$

где $R_{\text{тр}}$ – остаточный член формулы трапеции, если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка на отрезке $[a, b]$.

$$R_{\text{тр}} = -\frac{h^3}{12}y''(\xi),\ \xi \in (x_0, x_1).$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0)\left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_1\right) + R_{\text{тр}}$$



Квадратурная формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)K_k + R_n[f]$$

Если в формуле Ньютона-Котесса при $n = 1$ положить, что

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{K}_i = H = \text{const},$$

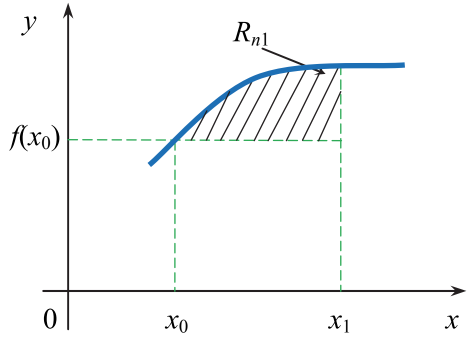
где $f(x_0) < H < f(x_1)$,

то получим следующую **формулу прямоугольников**

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0)H + R_{\text{пр}}, \qquad (7)$$

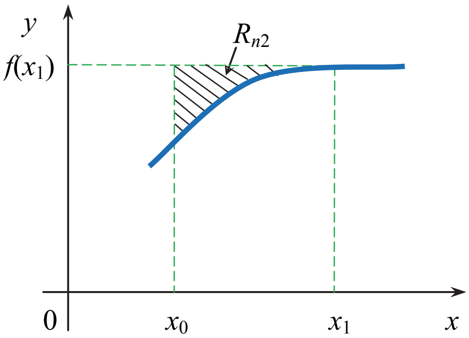
где $R_{\text{пр}}$ – остаточный член формулы прямоугольника

$$R_{\text{пр}} = \frac{h^3}{24} y''(\xi),\ \xi \in (x_0, x_1).$$



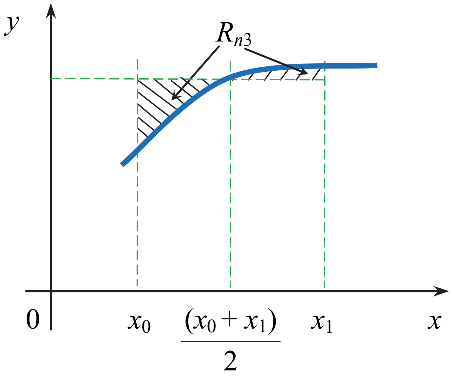
Формула левых прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0) f(x_0) + R_{n1}$$



Формула правых прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0) f(x_1) + R_{n2}$$



Формула средних прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0) f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + R_{n3}$$

или, с учетом того, что $x_1 = x_0 + h$:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0) f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + R_{n3}$$

Квадратурная формула Симпсона (формула парабол) ($n = 2$)

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)K_k + R_n[f] \quad \textbf{(5)}$$

$$K_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n}\int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)}dq \quad \textbf{(4)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} K_k = 1; \;\; K_k = K_{n-k}$$

Пусть $n = 2$.

Сетка $\overline{\omega}_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$ содержит три узла.

В этих узлах заданы значения функции $f(x)$: $f(x_0) = y_0$; $f(x_1) = y_1$; $f(x_2) = y_2$.

Необходимо определить три коэффициента Котесса.

Из свойств коэффициентов:

$$\begin{cases} K_0 + K_1 + K_2 = 1, \\ K_0 = K_2. \end{cases}$$

Для разрешения данной системы:

$$\begin{cases} K_0 + K_1 + K_2 = 1, \\ K_0 = K_2. \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)K_k + R_n[f] \quad \mathbf{(5)}$$

$$K_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n}\int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)}dq \quad \mathbf{(4)}$$

один из коэффициентов необходимо найти из формулы (4):

$$K_0 = \frac{(-1)^{2-0}}{0!(2-0)!}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{q(q-1)(q-2)}{q}dq = \frac{1}{4}\int_0^2 (q^2 - 3q + 2)dq = \frac{1}{6};$$

$$K_2 = \frac{1}{6};\ \ K_1 = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}.$$

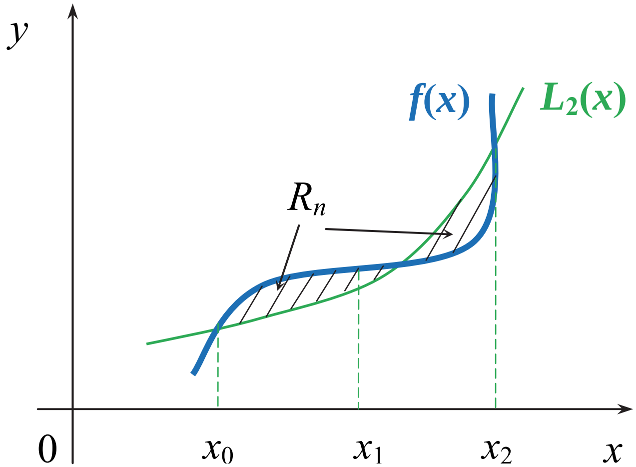
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \overbrace{(x_2 - x_0)}^{2h}\left\{\frac{1}{6}y_0 + \frac{4}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2\right\} + R_{\text{симп}} =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + R_{\text{симп}},$$

где $R_{\text{симп}}$ – остаточный член формулы Симпсона.

Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до 4-го порядка на $[a, b]$:

$$R_{\text{симп}} = -\frac{h^5}{90} y^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in (a, b) \tag{9}$$



Квадратурная формула Ньютона (правило трех восьмых) ($n = 3$)

Пусть $n = 3$.

Сетка $\overline{\omega}_3 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ содержит четыре узла.

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)K_k + R_n[f] \quad \textbf{(5)}$$

$$K_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n}\int_0^n \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(q-k)}dq \quad \textbf{(4)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} K_k = 1; \;\; K_k = K_{n-k}$$

Необходимо определить четыре коэффициента Котесса. Свойства коэффициентов Котесса дают систему:

$$\begin{cases} K_0 + K_1 + K_2 + K_3 = 1, \\ K_0 = K_3. \end{cases}$$

Для разрешения системы:

$$\begin{cases} K_0 + K_1 + K_2 + K_3 = 1, \\ K_0 = K_3. \end{cases}$$

необходимо по формуле (4) вычислить два коэффициента:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)K_k + R_n[f] \quad \mathbf{(5)}$$

$$K_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\frac{1}{n}\int_0^n \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(q-k)}dq \quad \mathbf{(4)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} K_k = 1; \;\; K_k = K_{n-k}$$

$$K_0 = \frac{(-1)^{3-0}}{0!(3-0)!}\cdot\frac{1}{3}\int_0^3 \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{q}dq = -\frac{1}{18}\int_0^3 (q^3 - 6q^2 + 11q - 6)dq = \frac{1}{8};$$

$$K_1 = \frac{(-1)^{3-1}}{1!(3-1)!}\cdot\frac{1}{3}\int_0^3 \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{(q-1)}dq = \frac{1}{6}\int_0^3 (q^3 - 5q^2 + 6q)dq = \frac{3}{8};$$

$$K_3 = K_0 = \frac{3}{8};\; K_2 = 1 - (K_0 + K_1 + K_3) = 1 - (\frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8}) = \frac{1}{8}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} f(x_k)K_k + R_n[f] \quad \mathbf{(5)}$$

$$K_0 = \frac{1}{8}; K_1 = \frac{3}{8}; K_2 = \frac{1}{8}; K_3 = \frac{3}{8};$$

Тогда по формуле (5):

получаем:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = (x_3 - x_0)\left\{\frac{1}{8}y_0 + \frac{3}{8}y_1 + \frac{3}{8}y_2 + \frac{1}{8}y_3\right\} =$$

$$= \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) + R_{3/8}$$

$$R_{3/8} = -\frac{3}{80}h^5 y^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_3).$$

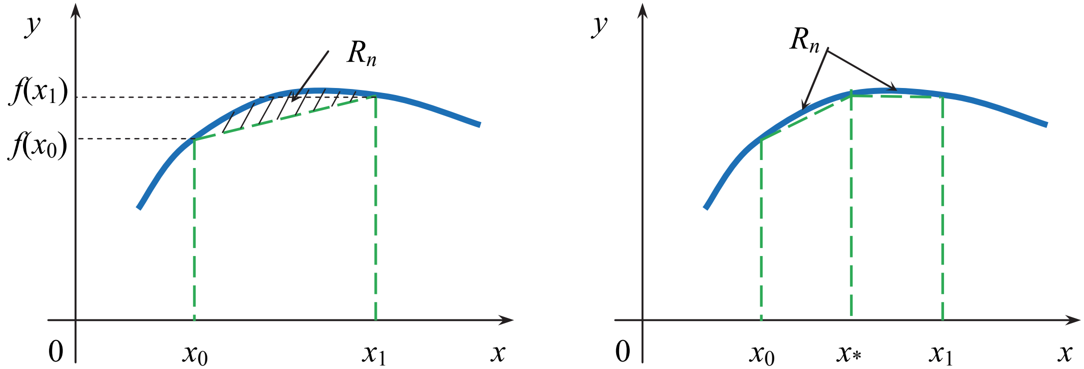
Замечание:

В общем случае ошибка квадратурной формулы (5) на равномерной сетке для достаточно гладких функций есть

$$R_n[f] = O\left(h^{2\left[\frac{n}{2}\right]+3}\right) \qquad (10)$$

для формулы с (n + 1) узлом интерполяции. Таким образом, выгодны формулы с нечетным числом узлов n на сетке.

7.1.3. Составные квадратурные формулы



При уменьшении отрезка интегрирования погрешность уменьшается.

Поэтому на практике, если требуется вычислить приближенно определенный интеграл, заданный отрезок $[a, b]$ обычно делят на N равных частичных отрезков, на каждом частичном отрезке применяют какую-нибудь одну каноническую квадратурную формулу и суммируют полученные результаты. Построенная таким путем квадратурная формула на отрезке $[a, b]$ называется **составной (усложненной)**.

Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $h = \dfrac{b-a}{n}$.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0)\left(\frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}y_1\right) + R_{\text{тр}}$$

Составная формула трапеций

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt =$$

$$= \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_0 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n) + R_{1tr} + R_{2tr} + \ldots + R_{ntr} = \qquad (11)$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}y_0 + [y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}] + \frac{1}{2}y_n\right) + R_{tr},$$

где $R_{tr} = -\dfrac{h^3}{12}Ny''(\xi) = -\dfrac{h^2}{12}(b-a)y''(\xi), \quad \xi \in [a,b].$

Составные формулы прямоугольников

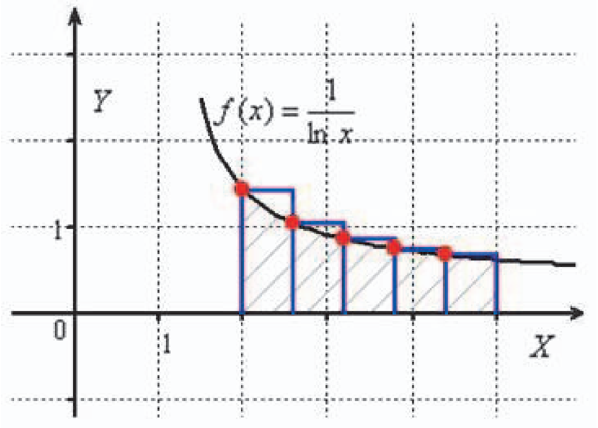
а) составная формула левых прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0) f(x_0) + R_{n1}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + R_{n1} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\overbrace{(x_{i+1}-x_i)}^{=h} f(x_i)\right) + R_{pr1} =$$

$$= h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + R_{pr};$$

где $R_{pr} = \dfrac{h^2}{24}(b-a)y''(\xi), \quad \xi \in [a,b]$

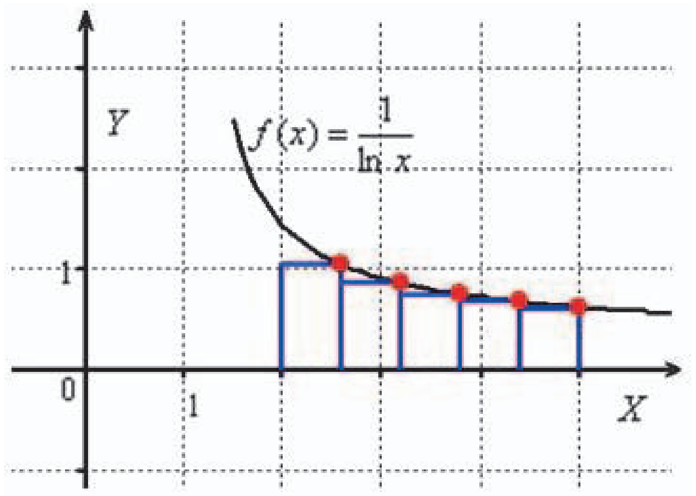


б) составная формула правых прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0) f(x_1) + R_{n2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(b) + R_{n1} = \sum_{i=1}^{n}\left(\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{=h} f(x_i)\right) + R_{pr1} =$$

$$= h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + R_{pr};$$

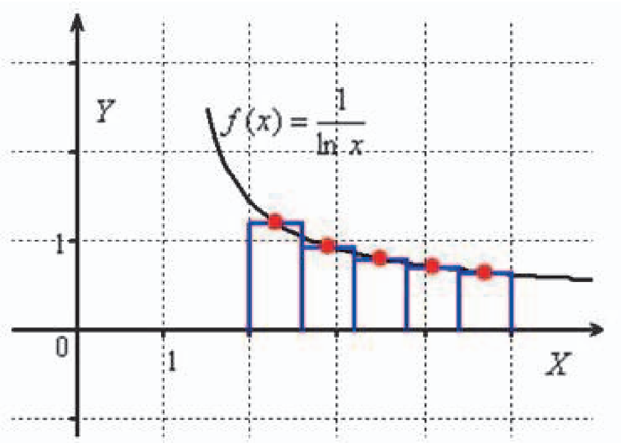


в) составная формула средних прямоугольников

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = (x_1 - x_0) f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + R_{n3}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R_{n1} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{=h} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right) + R_{pr1} =$$

$$= h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right) + R_{pr};$$



Составная формула Симпсона

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = (x_2 - x_0)\left(\frac{1}{6}y_0 + \frac{4}{6}y_1 + \frac{1}{6}y_2\right) + R_c$$

Пусть $n = 2m$; $i = \overline{0, 2m}$, т.е. на отрезке интерполирования находится $(2m + 1)$ узел.

Применим формулу Симпсона по каждому частичному сдвоенному отрезку:

$$[x_0, x_2], [x_2, x_4], \ldots, [x_{2m-2}, x_{2m}].$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) + \sum_{k=1}^{N} R_{sim_k}(x) =$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})) + R_{sim} \quad (13)$$

$$R_{sim}(h) = -\frac{h^4}{180}(b-a)y^{(IV)}(\xi).$$

7.1.4. Приближенное вычисление несобственных интегралов

Рассмотрим сначала приближенное вычисление несобственного интеграла

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

с бесконечным промежутком интегрирования, где функция $f(x)$ непрерывна при $a \le x < \infty$.

Интеграл (1) называется **сходящимся**, если существует конечный предел

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)dx, \qquad (2)$$

и по определению полагают:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^{b} f(x)dx \qquad (3)$$

Если предел (2) не существует, то **интеграл** (1) называется **расходящимся**, и такой интеграл считается лишенным смысла. Поэтому, прежде чем приступить к вычислению несобственного интеграла, нужно предварительно убедиться, пользуясь известными признаками сходимости, что этот интеграл сходится.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \qquad \textbf{(1)}$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^{b} f(x)dx\,, \quad \textbf{(2)}$$

Чтобы вычислить сходящийся несобственный интеграл (1) с заданной точностью ε, представим его в виде

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{b} f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx \qquad (4)$$

В силу сходимости интеграла, число b можно выбрать столь большим, чтобы имело место неравенство

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$

$$\left|\int_b^\infty f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5)$$

Собственный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

можно вычислить по одной из квадратурных формул.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx \quad \textbf{(4)}$$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{\infty} f(x)dx \quad \textbf{(5)}$$

Пусть s – приближенное значение этого интеграла с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$, т.е.

$$\left| \int_a^b f(x)dx - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (6)$$

Из формул (4), (5), (6) имеем:

$$\left| \int_a^{\infty} f(x)dx - S \right| < \varepsilon,$$

т.е. поставленная задача будет решена.