5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

5.1. Простановка задачи

Пусть значения некоторой функции $y = f(x)$ заданы таблично на отрезке $[a; b]$:

$\boldsymbol{x}$	$x_0 = a$	x_2	…	$x_n = b$
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

Пример табличной записи функции $\boldsymbol{y = x^2}$ на отрезке [1; 5]

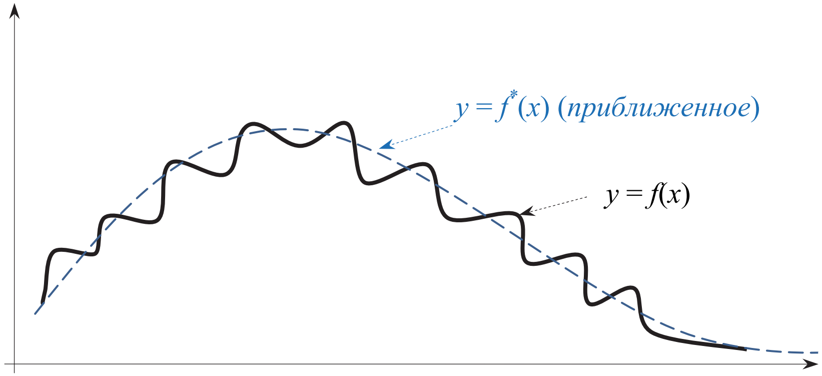
$\boldsymbol{x}$	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{f(x)}$	1	4	9	16	25

Эти значения могут быть найдены в результате наблюдений (измерений) в каком-то натуральном эксперименте, либо в результате вычислений.

Требуется **восстановить функцию $f(x)$ для всех значений x на отрезке $a \leq x \leq b$**, если известно ее значение в некотором конченом наборе точек этого отрезка.

Функция $f(x)$ может быть задана «**сложной**» формулой и вычисления ее значений по этой формуле очень трудоемки.

Желательно иметь для функции **более простую** (менее трудоемкую для вычислений) формулу, которая позволяла бы находить приближенное значение рассматриваемой функции с требуемой точностью в любой точке отрезка.



Пусть на отрезке $a \le x \le b$ задана сетка

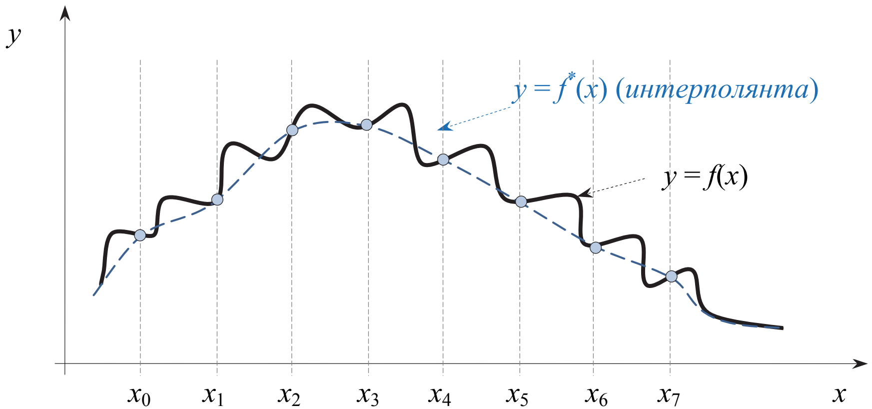
$$\overline{\omega} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

в ее узлах заданы значения функции $y(x)$, равные

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ \ldots,\ y(x_i) = y_i,\ \ldots,\ y(x_n) = y_n\,.$$

Требуется построить **интерполянту** – *функцию f(x), совпадающую с функцией y(x), в узлах сетки*:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n. \tag{5.1}$$



Основная цель интерполяции – получить быстрый (экономичный) алгоритм вычисления значений $f(x)$ для значений x, не содержащихся в таблице данных.

Основные вопросы:

1. Как выбрать интерполяну $f(x)$?
2. Как оценить погрешность $|y(x) - f(x)|$?

Интерполирующие функции $f(x)$, как правило, строятся в виде линейных комбинаций некоторых элементарных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x), \qquad (5.2)$$

где $\{\Phi_k(x)\}$ – фиксированные линейно независимые функции, $C_0, C_1, ..., C_n$ – не определенные пока коэффициенты.

Из условий интерполяции: $f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n$ получим систему $n+1$ уравнений относительно коэффициентов $\{C_k\}$:

$$\begin{cases} C_0\Phi_0(x_0) + C_1\Phi_1(x_0) + ... + C_n\Phi_n(x_0) = y_0, \\ C_0\Phi_0(x_1) + C_1\Phi_1(x_1) + ... + C_n\Phi_n(x_1) = y_1, \\ .... \\ C_0\Phi_0(x_n) + C_1\Phi_1(x_n) + ... + C_n\Phi_n(x_n) = y_n. \end{cases}$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n.$$

Предположим, что система функций $\{\Phi_k(x)\}$ такова, что при любом невырожденном выборе узлов сетки $\overline{\omega}$ отличен от нуля определитель

$$\Delta(\Phi_0, \Phi_1, ..., \Phi_n) = \begin{vmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & ... & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & ... & \Phi_n(x_1) \\ ... & ... & ... & ... \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & ... & \Phi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

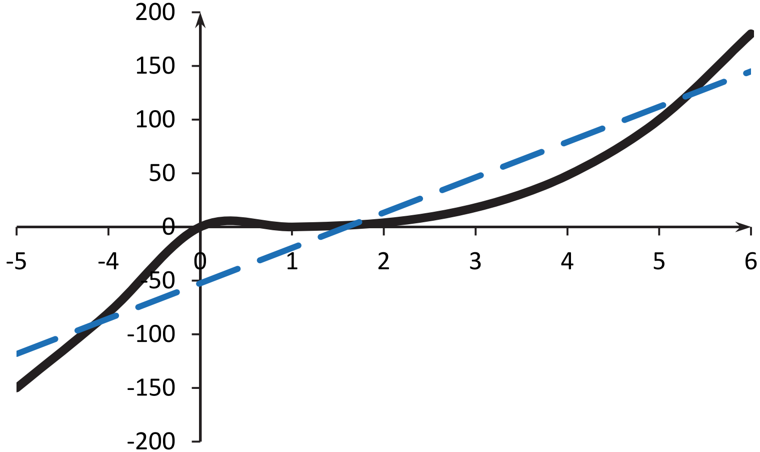
Такую систему интерполяционных функций называют **чебышевской системой интерполяционных функций.**

В этом случае на данной сетке $\overline{\omega}$ по известным значениям $x_i, y_i, i = \overline{0,n}$ **однозначно** определяются коэффициенты $\{c_k\}_{k=\overline{0,n}}$ интерполяционного многочлена.

Теорема. *Для разрешимости задачи интерполяции необходимо и достаточно чтобы система функций* $\{\Phi_k(x)\}$ *образовывала на* $[a, b]$ *чебышевскую систему интерполяционных функций*.

Если функции $\{\Phi_k(x)\}$ представляют собой линейные функции, то интерполяцию называют **линейной**.

Такой вид интерполяции обычно дает большую погрешность.



В качестве интерполяционных функций чаще всего выбирают:

1) степенные, или полиномиальные, функции

$$\Phi_k(x) = x^k;$$

2) тригонометрические функции

$$\Phi_k(x) = \begin{Bmatrix} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{Bmatrix};$$

3) показательные функции

$$\Phi_k(x) = e^{kx}$$

и другие.

Задачи интерполяции применяются при построении приближенных методов вычисления интегралов, разностной аппроксимации дифференциальных уравнений на основе интегральных тождеств, в задачах оптимизации и др.

5.2. Полиномиальная интерполяция

Пусть интерполирующие функции $f(x)$ задаются следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x), \qquad (5.2)$$

где $\{\Phi_k(x)\}$ – фиксированные линейно независимые функции, $C_0, C_1, ..., C_n$ – не определенные пока коэффициенты.

Существование и единственность интерполяционного полинома

Пусть функции $\{\Phi_k(x)\}$ имеют вид:

$$\Phi_k(x) = x^k .$$

Тогда интерполянту (интерполяционную функцию) будем искать в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k .$$

Необходимость выполнения условия интерполяции ($f(x_i) = y_i$) приводят к СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов $\{C_k\}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x), \quad \textbf{(5.2)}$$

$$\begin{cases} C_0 + C_1 x_0 + \ldots + C_n x_0^n = y_0, \\ C_0 + C_1 x_1 + \ldots + C_n x_1^n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0 + C_1 x_n + \ldots + C_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Определитель этой системы (определитель Вандермонда):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le m < k \le n} (x_k - x_m) \ne 0$$ на произвольной невырожденной сетке $\overline{\omega}$

Следовательно, система функций $\{x^k\}$ – чебышевская система интерполяционных функций на $[a,b]$ и справедлива

Теорема. *Интерполяционный полином* (5.2) *существует и единственен*.

5.2.1. Интерполяционный полином Лагранжа

Рассмотрим систему полиномов степени n, называемых **базисом Лагранжа.**

Базис Лагранжа $\{l_k^{(n)}(x)\}_{k=\overline{0,n}}$ определяется из следующих соображений:

1) каждый элемент базиса $l_k^{(n)}(x)$ есть полином n-й степени;

2) $l_k^{(n)}(x)$ равен нулю во всех узлах сетки $\overline{\omega}$ кроме k-го, где он равен 1:

$$l_k^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k \end{cases} \quad i,k = \overline{0,n}.$$

Построить эти полиномы нетрудно.

Действительно, зная корни полинома, можно утверждать, что полином

$$l_k(x) \equiv l_k^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

решает поставленную задачу.

Преобразуем базис $\{l_k^{(n)}(x)\}$.

Рассмотрим полином (n+1)-й степени

$$w(x) \equiv w_{\overline{0,n}}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Найдем производную функции $w(x)$:

$$\boxed{w(x) \equiv w_{\overline{0,n}}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)}$$

$$w'(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-x_i) + \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{n}(x-x_i) + \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 2}}^{n}(x-x_i) + \ldots + \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x-x_i) + \ldots + \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq n-1}}^{n}(x-x_i) + \prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i).$$

В точке $x = x_k$, имеем

$$w'(x_k) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(x_k-x_i)}_{\|\atop 0} + \underbrace{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 1}}^{n}(x_k-x_i)}_{\|\atop 0} + \underbrace{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq 2}}^{n}(x_k-x_i)}_{\|\atop 0} + \ldots + \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i) + \ldots + \underbrace{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq n-1}}^{n}(x_k-x_i)}_{\|\atop 0} + \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x_k-x_i)}_{\|\atop 0}$$

Следовательно

$$w'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k-x_i) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n).$$

Тогда

$$l_k(x) = \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}$$

и есть **базис полиномов Лагранжа**.

$$l_k(x)=\frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}$$

$$l_k^{(n)}(x_i)=\begin{cases}1, i=k,\\ 0, i\neq k\end{cases} \quad i,k=\overline{0,n}$$

Построенный базис Лагранжа $l_k(x)$ единственен.

Действительно, если существует полином $\overline{l_k(x)}$ при тех же условиях, то полином

$$q^{(n)}(x)=l_k(x)-\overline{l_k(x)}$$

есть полином n-й степени обращающийся в ноль в (n+1)-й точке $x_0,...,x_n$.

Получается, что полином $q^{(n)}(x)$ тождественно равен нулю:

$$q^{(n)}(x)=0,$$

следовательно рассмотренные полиномы совпадают, т.е.

$$l_k(x)=\overline{l_k(x)}.$$

Теперь легко записать решение задачи полиномиальной интерполяции.

Условие интерполяции

$$f(x_i) = y_i$$

Полином $y_k \cdot l_k(x)$ принимает в узле x_k значение y_k и равен нулю во всех остальных узлах сетки $\overline{\omega}$ (при $x_i \neq x_k$).

Тогда

$$L_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{w(x)}{(x - x_k) w'(x_k)} \tag{5.3}$$

представляет собой полином степени не выше n и $L_n(x_i) = y_i$, т.е. является интерполяционным полиномом.

Формула (5.3) называется **интерполяционной формулой Лагранжа**, а соответствующий полином $L_n(x)$ – **интерполяционным полиномом Лагранжа**.

Пример. Пусть задана функция таблично:

i	0	1	2
x_i	**1**	**2**	**3**
$f(x_i)$	**1**	**4**	**9**

$$L_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}$$

$$w(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$w'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)$$

$$w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$w'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2).$$

$$w'(1) = (1-2)(1-3) + (1-1)(1-3) + (1-1)(1-2) = 2$$

$$w'(2) = (2-2)(2-3) + (2-1)(2-3) + (2-1)(2-2) = -1$$

$$w'(3) = (3-2)(3-3) + (3-1)(3-3) + (3-1)(3-2) = 2$$

$$L_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{w(x)}{(x - x_k) w'(x_k)}$$

$$w(x) = (x-1)(x-2)(x-3), w'(1) = 2, w'(2) = -1, w'(3) = 2$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) \frac{w(x)}{(x - x_k) w'(x_k)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2(x-1)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1(x-2)} + 9 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2(x-3)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{2} - \frac{8(x-1)(x-3)}{2} + \frac{9(x-1)(x-2)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + 6 - 8(x^2 - 4x + 3) + 9(x^2 - 3x + 2)\right) = \frac{1}{2}\left(2x^2\right) = x^2.$$

Пример см. по ссылке:

Черемушкин С. Полиномиальная интерполяция: формула Лагранжа (21 мин.) https://www.youtube.com/watch?v=OzEcNdFdx7I&t=788s

5.2.2. Интерполяционный полином Ньютона

Удобным представлением интерполяционного полинома для практических вычислений является запись интерполяционного полинома в виде интерполяционного полинома Ньютона.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично на отрезке $[a; b]$:

$\boldsymbol{x}$	$x_0 = a$	x_1	$\dots$	$x_n = b$
$\boldsymbol{f(x)}$	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Пусть сетка равномерная, т.е. расстояние между аргументами постоянное и равно h:

$$h = x_{i+1} - x_i \ (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются ***конечными разностями первого порядка***:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i\,,\ \left(i = 0,1,2,\ldots\right).$$

Из конечных разностей первого порядка образуются ***конечные разности второго порядка:***

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad \left(i = 0,1,2,\ldots\right).$$

Конечные разности могут быть представлены через значения функции. Для разности 1-го порядка это следует из определения. Для 2-го порядка:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i\,.$$

Аналогично для разностей 3-го порядка:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) =$$
$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

и т.д.

Методом математической индукции можно доказать, что:

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i . \qquad (5.4)$$

Будем искать интерполяционный многочлен в виде:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\,. \quad (5.5)$$

Положим:

1) $x = x_0$, тогда из (5.5) следует

$$y_0 = N_n(x_0) = a_0\,,$$

откуда

$$y_0 = a_0\,.$$

2) $x = x_1$, получаем:

$$y_1 = N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow$$

$$y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

3) $x = x_2$, получаем:

$$y_2 = N_n(x_2) = a_0 + a_1 \overbrace{(x_2 - x_0)}^{\substack{2h \\ ||}} + a_2 \overbrace{(x_2 - x_0)}^{\substack{2h \\ ||}} \overbrace{(x_2 - x_1)}^{\substack{h \\ ||}},$$

$$y_2 = a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2$$

Ранее получили, что $a_0 = y_0$ и $a_1 = \frac{\Delta y_0}{h}$, тогда

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + 2a_2 h^2, \text{ или } y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = 2a_2 h^2.$$

С учетом того, что $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, получаем

$$y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0) = 2a_2 h^2, \text{ или } y_2 - 2y_1 + y_0 = 2a_2 h^2.$$

Следовательно,

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}.$$

Рассуждая аналогично, получаем:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \quad \textbf{(5.5)}$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3};$$

в общем случае выражение для a_k будет иметь вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}. \tag{5.6}$$

Подставим теперь (5.6) в выражение для многочлена (5.5):

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}). \tag{5.7}$$

Далее положим $\dfrac{x-x_0}{h}=t$, т.е.

$$N_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+ \qquad \mathbf{(5.7)}$$
$$+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}).$$

$$\Delta^k y_i=y_{i+k}-ky_{i+k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}y_{i+k-2}-\ldots+(-1)^k y_i$$

$x=x_0+ht$. Тогда:

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=t-1,$$
$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-x_0-2h}{h}=t-2.$$

…

$$\frac{x-x_k}{h}=\frac{x-x_0-kh}{h}=t-k.$$

Окончательно имеем:

$$N_n(x)=N_n(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+$$
$$+\ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \qquad (5.8)$$

Формула (5.8) называется ***первой интерполяционной формулой Ньютона***.

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \quad \textbf{(5.8)}$$
$$+ \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

! Она применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, когда t мало по абсолютной величине.

Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине ***формулой для интерполирования вперёд***. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x.

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае применяется формула для интерполирования назад – ***вторая интерполяционная формула Ньютона***, которая отыскивается в виде:

Первая интерполяционная формула Ньютона

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \quad \textbf{(5.5)}$$

или

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad \textbf{(5.8)}$$

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

$$N_n(x) = a_0 - a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_n(x - x_n)\cdot\ldots\cdot(x - x_1). \quad (5.9)$$

Как и для первой формулы Ньютона, коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ находится из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах:

$$N_n(x) = a_0 - a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_n(x - x_n) \cdot \ldots \cdot (x - x_1) \quad \textbf{(5.9)}$$

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k}. \tag{5.10}$$

Подставляя (5.10) в (5.9) и переходя к переменной $t = \dfrac{x - x_n}{h}$, получим окончательный **вид второй интерполяционной формулы Ньютона**:

$$\begin{gathered} N_n(x) = N_n(x_n - t\,h) = y_n + t\,\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \\ + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона используется, когда значение аргумента находятся ближе к концу отрезка интерполяции.

Пример. Пусть задана функция таблично:

i	0	1	2
x_i	**1**	**2**	**3**
y_i	**1**	**4**	**9**

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}).$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

Требуется построить интерполяционный полином Ньютона

Найдем ***конечные разности порядка***

i	$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$	$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$
0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 2$
1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 5$	–
2	–	–

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}).$$

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3$; $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 5$

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 2$

$$N_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) =$$

$$= 1 + \frac{3}{1}(x - 1) + \frac{2}{2! \cdot 1^2}(x - 1)(x - 2) = 3x - 2 + x^2 - 3x + 2 = x^2.$$

Пример см. по ссылке:

Черемушкин С. Полиномиальная интерполяция: интерполяционная формула Ньютона (24 мин.) https://www.youtube.com/watch?v=oOLjgTojNyo

5.2.3. Погрешность полиномиальной интерполяции

Пусть $P_n(x)$ – полином степени не выше, чем n, который решает задачу интерполяции функции $f(x)$ на сетке $\overline{\omega}$.

Требуется, в некотором смысле, оценить разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Предположим, что наша функция $f(x)$ имеет непрерывные до $(n+1)$ порядка включительно производные на $[a, b]$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - Aw(z),$$

где $A = \text{const}$; $w(z) = w_{\overline{0,n}}(z) = \prod_{i=0}^{n}(z - x_i)$ – введенный ранее многочлен $(n+1)$ степени.

Определим константу A.

Для этого потребуем, чтобы в произвольной фиксированной точке x^*, не совпадающей с узловой (т.е. $x^* \neq x_k$; $k = \overline{0,n}$), выполнялось равенство

$$\varphi(x^*) = 0.$$

Тогда $A = \left.\dfrac{f(z) - P_n(z)}{w(z)}\right|_{z=x^*} = \dfrac{f(x^*) - P_n(x^*)}{w(x^*)}$, так как $w(x^*) \neq 0$ при $x^* \neq x_k$.

С другой стороны, определенная так функция

$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - Aw(z)$$

непрерывна на $[\tilde{a} = \min(x^*, x_0, .., x_n), \tilde{b} = \max(x^*, x_0, .., x_n)]$, имеет производную и обращение в нуль в (n+2) точках $[\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Теорема Ролля. *Пусть функция f(x), дифференцируемая в замкнутом промежутке* (*a, b*)*, обращается в нуль на концах промежутка. Тогда производная* $f'(x)$ *по меньшей мере один раз обращается в нуль внутри промежутка*.

Из теоремы Ролля следует, что существует (n+1) внутренняя точка на $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, в которой $\varphi'(z) = 0$. Аналогично, существует n точек, в которых $\varphi''(z) = 0$ и т.д.

Следовательно, существует одна точка, в которой

$$\varphi^{(n+1)}(z) = 0,$$

т.е. существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Найдем (n+1)-ю функции

$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - Aw(z).$$

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - A(n+1)!\Big|_{z=\xi},$$

здесь отсутствует (n+1)-я производная от полинома n-й степени $P_n(z)$, которая, очевидно, тождественно равна 0.

Таким образом

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Тогда с учетом полученного ранее соотношения для коэффициента A:

$$A = \frac{f(x) - P_n(x)}{w(x)}$$

получим

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(x) - P_n(x)}{w(x)}.$$

Следовательно, для оценки погрешности интерполяции получим следующее выражение:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x),$$

где $\xi \in \left(\tilde{a} = \min(x^*, x_0, .., x_n), \tilde{b} = \max(x^*, x_0, .., x_n)\right)$

Абсолютную погрешность полиномиальной интерполяции можно оценить следующим образом:

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w(x)\right|,$$

или

$$|f(x)-P_n(x)|\le\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|w(x)|, \qquad (5.12)$$

где $M_{n+1}=\max\limits_{[\tilde{a},\tilde{b}]}|f^{(n+1)}(x)|$.

Дальнейшее использование оценки (5.12) связано с изучением характера поведения $|w(x)|$ при произвольном расположении узлов интерполяции, что достаточно сложно и громоздко.

Ограничимся наиболее часто распространенным на практике случаем.

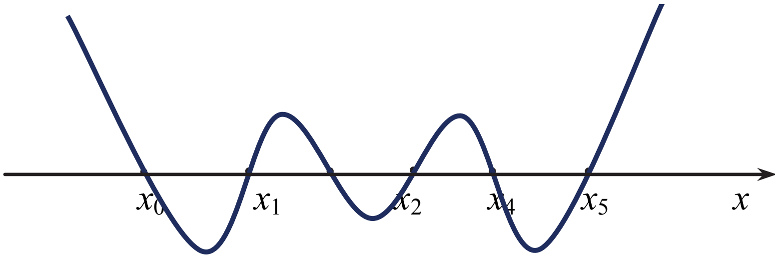
Пусть имеется равномерная сетка $\overline{\omega}$ с постоянным шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$, и пусть узлы интерполяции на этой сетке выбраны подряд.

Для наглядности выберем $n = 5$.

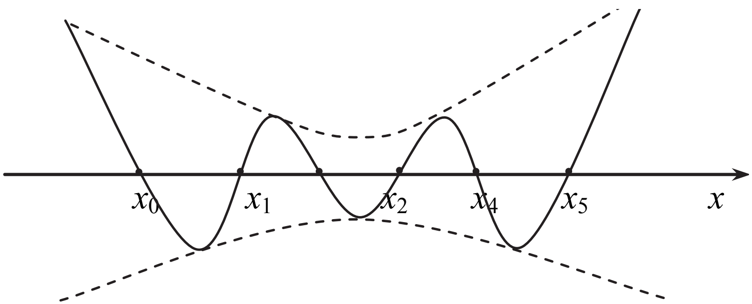
Тогда $w(x)$ – многочлен 6-й степени:

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_5).$$

Рассмотрим этот многочлен $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_5)$.



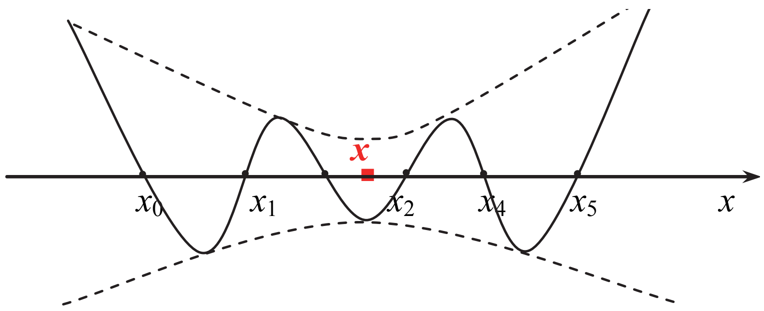
Вблизи центральных узлов интерполяции экстремум $|w(x)|$ невелик. Для крайних интервалов – побольше. Вне сетки узлов $|w(x)|$ быстро возрастает.



Выводы:

1) **экстраполяция** (использования интерполяционных многочленов для приближенного вычисления функции вне рассматриваемого отрезка; это приближение называют экстраполяцией) ненадежна. Результатам, если $x \notin [a,b]$ нельзя доверять;

2) при интерполяции на равномерной сетке выгодно так выбрать узлы $\{x_i\}$ из таблицы, чтобы точка $\boldsymbol{x}$ была по возможности близка к центру конфигурации узлов. Это обеспечивает большую точность и надежность интерполяции.



Сравнительно просто дальнейшая оценка погрешности интерполяции проводится в случае нечетного $n = 2k + 1$ (когда на сетке $\overline{\omega}$ расположены $2k + 2$ узла и имеется $2k + 1$ интервалов длины h).

Пусть при этом рассматриваемое x находится в центральном интервале $x \in (x_k, x_{k+1})$. На этом интервале экстремум $w(x)$ (в силу симметрии $w(x)$ относительно точки $x_0 + kh + \frac{h}{2}$) достигается точно в середине (k+1)-го интервала сетки $\overline{\omega}$, и его можно оценить:

$$\left|w\left(x_0 + kh + \frac{h}{2}\right)\right| = \left(\left(kh + \frac{h}{2}\right)\left((k-1)h + \frac{h}{2}\right)\times\ldots\times\frac{h}{2}\right)^2 = \left[\frac{h^{k+1}(2k+1)(2k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2^{k+1}}\right] =$$

$$= \left(\frac{h^{k+1}(2k+1)!}{2^{k+1}2^k\, k!}\right).$$

Далее, применяя формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, получаем окончательную оценку погрешности интерполяции в центральном интервале сетки $\overline{\omega}$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}} M_{n+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}, \quad x \in (x_k, x_{k+1}). \tag{5.13}$$

Замечания:

1. Если известна оценка M_{n+1} для $\max|f^{(n+1)}(x)|$ на $[a,b]$, то из (5.13) можно найти число узлов (n+1), необходимое для интерполяции с заданной точностью.
2. Из формулы (5.13) видно, что если перейти к интерполяции по таблице с более мелким шагом (при том же числе узлов сетки n), то погрешность интерполяции будет убывать как величины порядка $O(h^{n+1})$. Поэтому говорят, что интерполяционный многочлен $P_n(x)$ обеспечивает (n+1)-й порядок точности интерполяции и интерполяция имеет погрешность $O(h^{n+1})$.

5.2.4. Многочлены Чебышева

Оценка погрешности полиномиальной интерполяции проводится по формуле (5.12):

$$|f(x)-P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|w(x)|, \qquad (5.12)$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{[\tilde{a},\tilde{b}]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Максимальное уклонение интерполяционного полинома от интерполируемой функции на отрезке [a, b] можно определить по формуле:

$$\max_{x\in[a,b]}|f(x)-P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}|w_{n+1}(x)|.$$

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)|,$$

Управлять максимальной ошибкой можно за счет подходящего выбора узлов интерполяции.

Необходимо так выбрать узлы интерполяции $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, чтобы значение модуля полинома

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

на отрезке $[a, b]$ было наименьшим.

Разумеется, эта задача имеет смысл только **если имеется возможность вычислять интерполируемую функцию $f(x)$ в любых точках отрезка $[a, b]$**. ***Если функция задана таблично, то такой возможности нет***.

Пусть $a = -1$, $b = 1$.

Известно, что *если узлы интерполяции являются корнями полинома Чебышева (n+1)-й степени, то величина* $\max\limits_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)|$ *принимает наименьшее возможное значение по сравнению с любым другим выбором набора узлов интерполяции*.

Многочлены Чебышева $T_n(x)$, где $n \geq 0$, определяются соотношениями

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{при} \quad x > 0. \tag{5.14}$$

Пользуясь рекуррентной формулой (5.14), получаем например,

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \ldots$$

Старший член многочлена $T_{n+1}(x)$ получается из старшего члена многочлена $T_n(x)$ умножением на $2x$, и, следовательно, старший член в $T_n(x)$ при $n > 0$ есть $2^{n-1}x^n$.

Все многочлены $T_{2n}(x)$ являются четными функциями, а $T_{2n+1}(x)$ – нечетными.

При любом θ имеем

$$\cos((n+1)\theta) = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos((n+1)\theta).$$

Полагая $\theta = \arccos x$, получим

$$\cos((n+1)\arccos x) = 2\cos(\arccos x)\cos(n\arccos x) - \cos((n+1)(\arccos x)).$$

Функция $\cos(n \arccos x)$ удовлетворяет тому же разностному уравнению (5.14) по переменной n,

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{при} \quad x > 0. \qquad \textbf{(5.14)}$$

что и $T_n(x)$. Начальные условия при $n = 0$ и $n = 1$ одни и те же:

$$\cos(0 \cdot \arccos x) = 1 = T_0(x),$$
$$\cos(1 \cdot \arccos x) = x = T_1(x),$$

потому при всех n

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x).$$

Следовательно, $|T_n(x)| \le 1$ при $|x| \le 1$.

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}.$$

Корни полинома Чебышева легко найти, решив уравнение:

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) = 0.$$

Полином $T_n(x)$ имеет n различных корней, расположенных на отрезке [–1, 1]:

$$x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right), \quad m = 0,\ldots,n-1.$$

Эти корни следует выбирать в качестве узлов интерполирования.

$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$

$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ при $x > 0.$

или

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x) = 0$$

Корни полиномов Чебышева расположены симметрично относительно нуля на отрезке [–1, 1] и неравномерно – чем ближе к краям отрезка, тем корни расположены плотнее.

Максимальное значение модуля полинома Чебышева $|T_n(x)|$ равно 1 и достигается в точках $\cos\frac{m}{k}\pi$.

Для того чтобы коэффициент при старшей степени полинома $w_n(x)$ был равен 1, положим, что

$$w_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)|.$$

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ – узлы интерполяции

Тогда

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|w_n(x)\right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Такого другие полиномы гарантировать не могут. ***Полиномы Чебышева являются полиномами, наименее уклоняющимися от нуля***.

Лемма. *Если $P_n(x)$ – многочлен степени n со старшим коэффициентом* 1, *то* $\max_{[-1;1]} |P_n(x)| \ge \max_{[-1;1]} |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}$.

Таким образом, выбор в качестве узлов интерполирования корней полинома Чебышева является наилучшим в смысле минимизации правой части оценки:

$$\max_{x\in[a,b]} | f(x) - P_n(x) | \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} | w_{n+1}(x) |,$$

которая теперь приобретает вид:

$$\max_{x\in[a,b]} | f(x) - P_n(x) | \le \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!},$$

где $M_{n+1} = \max_{[\tilde{a},\tilde{b}]} | f^{(n+1)}(x) |$.

Для перехода к интерполированию на произвольном отрезке [a, b] достаточно сделать линейную замену переменных, переводящую отрезок [–1, 1] в отрезок [a, b]. Такая замена выражается следующей формулой:

$$x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2n}\right), \quad m = 0, ..., n-1$$

$$x = \frac{(b-a)\xi + (a+b)}{2}, \ \xi \in [-1,1], \ x \in [a,b].$$

Тогда для произвольного отрезка [a, b] чебышевскими узлами интерполяции будут узлы, вычисляемые по формуле:

$$x_m = \frac{(b-a)\cos\dfrac{2m+1}{2k}\pi + a + b}{2},$$

где $m = \overline{0, k-1}$, k – число узлов интерполяции, т.е. $k = n + 1$, где n – степень интерполяционного полинома $P_n(x)$.

Оценка ошибки интерполяции для отрезка [a, b] примет вид:

$$|f(x)-P_n(x)|\leq\frac{M_{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

где $M_{n+1}=\sup\limits_{[a,b]}|f^{(n+1)}(x)|$.

5.2.5. Сходимость интерполяционного процесса

Говоря о сходимости интерполяционного процесса, ищут ответ на вопрос о стремлении в некотором смысле к нулю погрешности интерполяции $\| f(x) - P_n(x) \|$ при неограниченном увеличении числа узлов интерполяции, т.е. при $n \to \infty$.

С практической точки зрения, сходимость интерполяции можно изучать следующим образом:

1) либо сохраняя степень интерполяционного полинома, уменьшать шаг сетки ($h \to 0, n = const$);

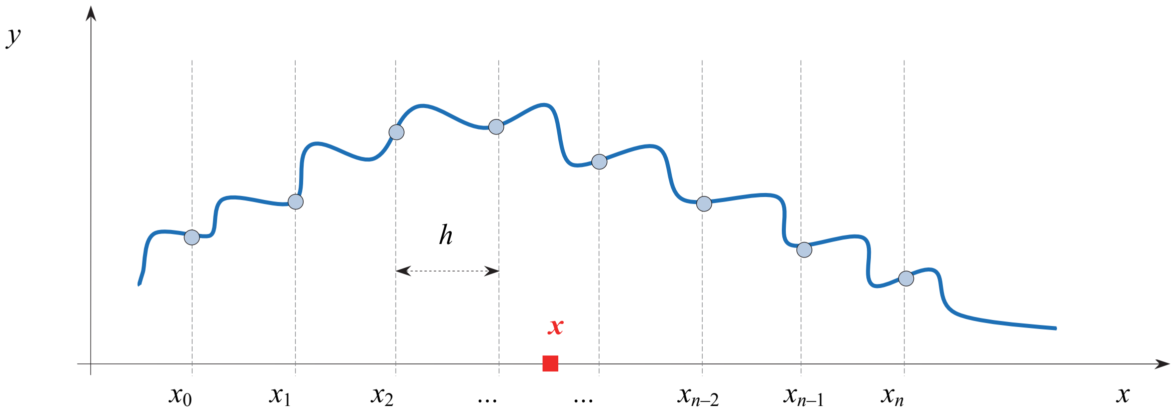
2) либо сохраняя шаг сетки, увеличивать число используемых узлов интерполяции на $[a,b]$, т.е. увеличивать степень интерполяционного многочлена ($h = const, n \to \infty$).

Уменьшение шага сетки ($h \to 0$)

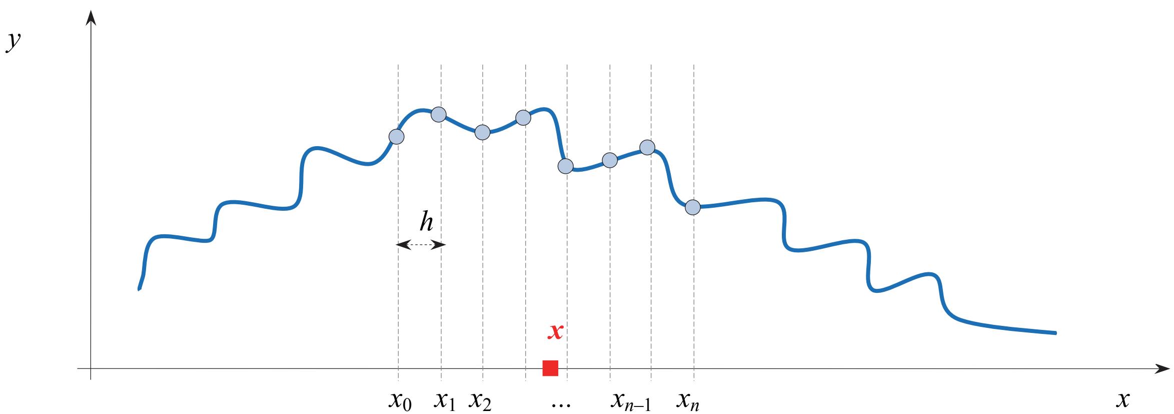
Если функция $f(x)$ имеет непрерывные до (n+1)-го порядка производные на $[a,b]$, то погрешность метода при интерполяции многочленом $P_n(x)$ есть величина порядка $O(h^{n+1})$.

То есть величина $|f(x) - P_n(x)|$ неограниченно убывает при $h \to 0$ и при этом интерполяционный многочлен сходится к $f(x)$ в некотором смысле равномерно.

Для каждого $x \in [a,b]$ выбираются свои узлы интерполяции, ближайшие именно на данной сетке к точке x. При этом точка x лежит заведомо между крайними узлами, использованными при построении интерполяционного многочлена.



y
h
x
x_0
x_1
x_2
…
…
x_{n-2}
x_{n-1}
x_n
x



y
h
x
x_0
x_1
x_2
…
x_{n-1}
x_n
x

Тогда, равномерно по x, можно провести оценку

$$|w_{\overline{0,n}}(x)| = \left|\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\right| \le \max_i |x - x_i|^{n+1} \le (nh)^{n+1},$$

где nh – длина отрезка $[\widetilde{a}, \widetilde{b}]$ (своего для каждой сетки).

Отсюда, для заданной точности ε, можно получить условие на величину шага h сетки, обеспечивающего данную точность:

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(nh)^{n+1} \le \varepsilon .$$

Напомним, что n фиксировано и тем самым

$$h \le \sqrt[n+1]{\frac{\varepsilon(n+1)!}{M_{n+1}}} \cdot \frac{1}{n} .$$

Все сетки с данным и более легким шагом для любой точки $x \in [a, b]$ дают погрешность интерполяции многочленом $P_n(x)$, с указанным образом расположенными узлами, не более, чем ε.

Увеличение числа узлов ($n \to \infty$)

Увеличение числа узлов, т.е. степени интерполяции многочлена не всегда целесообразно, так как:

а) не известно как быстро растет оценка максимума модуля производной M_{n+1} с ростом ее порядка;

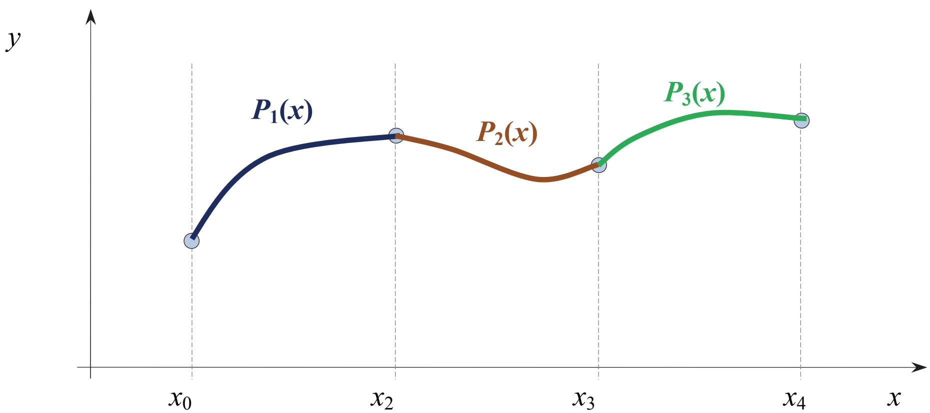
б) у функции $f(x)$ может вообще быть лишь ограниченное число непрерывных производных.

В общем случае свойство сходимости или расходимости интерполяционного процесса зависит от выбора последовательности сеток $\{\overline{\omega}_n\}$, так и от гладкости интерполируемой функции $f(x)$.

В практике вычислений избегают использования интерполяционных полиномов высокой степени. Вместо этого для интерполяции $f(x)$ на большом отрезке используют кусочно-полиномиальную интерполяцию.

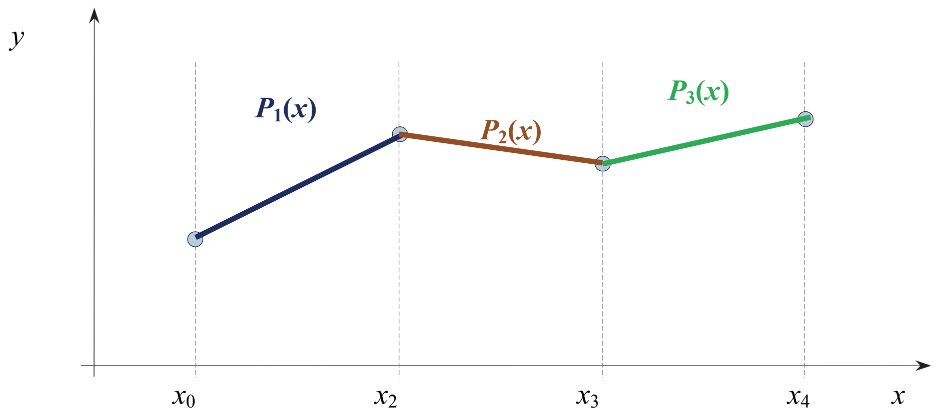
5.3. Интерполяция сплайнами

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a, b]$, а на каждом частном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.



Максимальная по всем частным отрезкам степень многочленов называется ***степенью сплайна***, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на $[a,b]$ – ***дефектом сплайна***.

Например, непрерывная кусочно-линейная функция (ломанная) является **сплайном первой степени** с дефектом, равным единице, так как непрерывна только сама функция (нулевая производная), а первая производная уже разрывна.



На практике наиболее широкое распространение получили сплайны третьей степени, имеющие на $[a,b]$ непрерывную, по крайней мере, первую производную. Эти сплайны называются кубическими.

5.3.1. Определение кубического сплайна

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена непрерывная функция $f(x)$; задана невырожденная сетка $\overline{\omega}_n$

$$\overline{\omega}_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}.$$

Обозначим значения $f(x)$ в узлах сетки через $y_i = f(x_i)$.

Тогда кубическим сплайном $S_3(x) \equiv S(x)$ на данной сетке $\overline{\omega}_n$ называется кусочно-полиномиальная 3-го порядка функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) на каждом частичном интервале $[x_{k-1}, x_k]$ многочлен $S(x)$ – многочлен третьей степени:

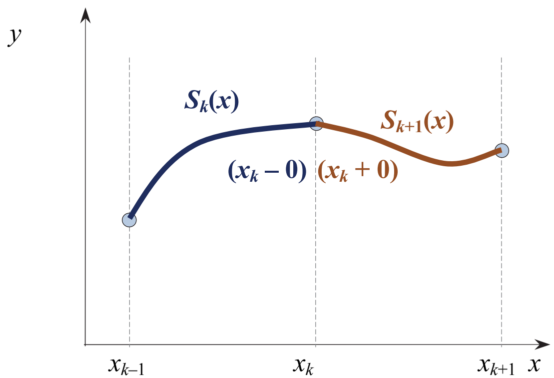
$$S(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \tag{5.15}$$

$$x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 1, 2, ..., n;$$

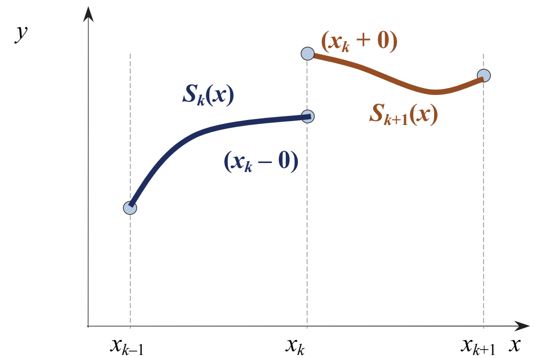
2) функция $S(x)$, ее первая и вторая производные непрерывны на $[a,b]$:

$$S(x-0)=S(x+0),\quad S'(x-0)=S'(x+0),\quad S''(x-0)=S''(x+0)\quad \forall x\in[a,b],\quad (5.16)$$

(нужно проверять лишь в узлах сетки);



$S(x_k-0)=S(x_k+0)$



$S(x_k-0)\neq S(x_k+0)$

3) в узлах сетки $\overline{\omega}_n$ функция $S(x)$ удовлетворяет условиям интерполяции

$$S(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,...,n; \tag{5.17}$$

4) дополнительным, в некотором смысле естественным, условием для единственности определения сплайна является краевое условие в граничных точках сетки x_0 и x_n. Ограничимся рассмотрением случая нулевой кривизны сплайна $S(x)$. Тогда в этих точках

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0. \tag{5.18}$$

5.3.2. Существование и единственность кубического интерполяционного сплайна $S(x)$

Теорема. *Сплайн* $S(x)$ *при выполнении условий* (5.15)–(5.18) *существует и единственен.*

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \quad \textbf{(5.15)}$$

$$x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$S(x-0) = S(x+0), \quad S'(x-0) = S'(x+0),$$

$$S''(x-0) = S''(x+0) \quad \forall x \in [a, b], \quad \textbf{(5.16)}$$

$$S(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad \textbf{(5.17)}$$

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \quad \textbf{(5.18)}$$

Приведем конструктивное доказательство этого факта.

На отрезке $[a,b]$ определена непрерывная функция

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \quad \textbf{(5.15)}$$

$f(x)$; задана невырожденная сетка $\overline{\omega}_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$.

Значения функции $f(x)$ в узлах сетки обозначим через $y_i = f(x_i)$.

Данная сетка разбивает отрезок $[a,b]$ на n отрезков $[x_k, x_{k+1}]$.

На каждом из этих отрезков задается кубический полином (5.15).

Для того чтобы на данной сетке найти неизвестные коэффициенты сплайнов a, b, c и d необходимо построить системы $4n$ уравнений.

Для сплайна (5.15) найдем производные до второго порядка включительно:

$$\begin{aligned} &S'(x) = b_k + 2c_k(x - x_{k-1}) + 3d_k(x - x_{k-1})^2, \\ &S''(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_{k-1}). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Причем в точке x_{k-1} имеем

$$S(x_{k-1}) = a_k, \quad S'(x_{k-1}) = b_k, \quad S''(x_{k-1}) = 2c_k, \tag{5.20}$$

где $k = \overline{1,n}$.

Тогда после переиндексации в (5.20) получим:

$$S(x_k) = y_k, \quad k = 0,1,\ldots,n; \qquad \textbf{(5.17)}$$

$$S(x_{k-1}) = a_k, \quad S'(x_{k-1}) = b_k, \quad S''(x_{k-1}) = 2c_k, \qquad \textbf{(5.20)}$$

$$S(x_k) = a_{k+1}, \quad S'(x_k) = b_{k+1}, \quad S''(x_k) = 2c_{k+1},$$

где $k = \overline{0, n-1}$.

Учитывая (5.17) имеем:

$$S(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}, k = \overline{1, n}, \qquad (5.21)$$

т.е. получили n уравнений для нахождения коэффициентов $\{a\}$.

С другой стороны из (5.15) следует, что

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \quad \textbf{(5.15)}$$
$$x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$S(x_k) = a_k + b_k(x_k - x_{k-1}) + c_k(x_k - x_{k-1})^2 + d_k(x_k - x_{k-1})^3, \; k = \overline{1, n}.$$

Или, введя в рассмотрение шаг $h_k = x_k - x_{k-1}$, получим следующую систему, содержащую n уравнений:

$$a_k + b_k h_k + c_k h x_k{}^2 + d_k h_k{}^3 = y_k, \; k = \overline{1, n}. \tag{5.22}$$

Для получения недостающих уравнений воспользуемся условиями (5.16) непрерывности производных:

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \quad \textbf{(5.15)}$$

$$x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$S(x-0) = S(x+0), \quad S'(x-0) = S'(x+0),$$

$$S''(x-0) = S''(x+0) \quad \forall x \in [a,b], \quad \textbf{(5.16)}$$

$$S'(x) = b_k + 2c_k(x - x_{k-1}) + 3d_k(x - x_{k-1})^2,$$

1) непрерывность $S'(x)$ в точке x_k дает с одной стороны:

$$S'(x_k) = b_k + 2c_k(x_k - x_{k-1}) + 3d_k(x_k - x_{k-1})^2 = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2,$$

а с другой, учитывая, что согласно (5.20):

$$S'(x_{k-1}) = b_k,$$

тогда имеем:

$$S'(x_k) = b_{k+1}.$$

Таким образом получаем еще (n – 1) уравнение:

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \quad k = \overline{1, n-1} \tag{5.23}$$

2) непрерывность $S''(x)$ в точке x_k дает:

$$S''(x_k) = 2c_k + 6d_k h_k^2,$$
$$S''(x_k) = 2c_{k+1}.$$

Получаем еще $(n-1)$ уравнение:

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \quad \textbf{(5.15)}$$

$$x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 1, 2, ..., n$$

$$S(x-0) = S(x+0), \quad S'(x-0) = S'(x+0),$$

$$S''(x-0) = S''(x+0) \quad \forall x \in [a, b], \quad \textbf{(5.16)}$$

$$S''(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_{k-1}).$$

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k, \quad k = \overline{1, n-1} \quad (5.24)$$

Всего получено $(4n-2)$ уравнения:

$$S(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}, k = \overline{1, n}, \quad (5.21)$$

$$a_k + b_k h_k + c_k hx_k{}^2 + d_k h_k{}^3 = y_k, \ k = \overline{1, n}. \quad (5.22)$$

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \quad k = \overline{1, n-1} \quad (5.23)$$

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k, \quad k = \overline{1, n-1} \quad (5.24)$$

Для нахождения оставшихся двух уравнений воспользуемся граничными условиями (5.18):

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \quad \textbf{(5.15)}$$

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0 \quad \textbf{(5.18)}$$

$$S''(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_{k-1}).$$

$$\begin{aligned} &S''(x_0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0; \\ &S''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Уравнения (5.22)–(5.25):

$$S(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}, \, k = \overline{1,n}, \tag{5.21}$$

$$a_k + b_k h_k + c_k h x_k{}^2 + d_k h_k{}^3 = y_k, \; k = \overline{1,n}. \tag{5.22}$$

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \quad k = \overline{1,n-1} \tag{5.23}$$

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k, \quad k = \overline{1,n-1} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned} &S''(x_0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0; \\ &S''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0. \end{aligned} \tag{5.25}$$

составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения $4n$ коэффициентов $\{a, b, c, d\}$. Ее уже можно решить одним из численных методов решения СЛАУ. Однако эту систему можно привести к более удобному виду.

Из условия (5.21) можно сразу найти все коэффициенты a_k. Далее из (5.24) и (5.25) получим

$$S(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}, k = \overline{1,n}, \quad \textbf{(5.21)}$$

$$a_k + b_k h_k + c_k hx_k{}^2 + d_k h_k{}^3 = y_k,\ k = \overline{1,n}. \quad \textbf{(5.22)}$$

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \quad k = \overline{1,n-1} \quad \textbf{(5.23)}$$

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k, \quad k = \overline{1,n-1} \quad \textbf{(5.24)}$$

$$\begin{aligned} &S''(x_0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0; \\ &S''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0. \end{aligned} \quad \textbf{(5.25)}$$

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, k = \overline{1,n-1}; \quad d_n = -\frac{c_n}{3h_n}. \quad (5.26)$$

Учитывая (5.21) и (5.26) из (5.22) получим

$$S(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}, k = \overline{1,n}, \quad \textbf{(5.21)}$$

$$a_k + b_k h_k + c_k h x_k^{\ 2} + d_k h_k^{\ 3} = y_k, \ k = \overline{1,n}. \quad \textbf{(5.22)}$$

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, k = \overline{1,n-1}; \quad d_n = -\frac{c_n}{3h_n}. \quad \textbf{(5.26)}$$

$$y_{k-1} + b_k h_k + c_k h x_k^{\ 2} + \left(\frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}\right) h_k^{\ 3} = y_k, \ k = \overline{1,n-1}$$

и $$y_{n-1} + b_n h_n + c_n h x_n^{\ 2} + \left(-\frac{c_n}{3h_n}\right) h_n^{\ 3} = y_n.$$

Выражая коэффициенты b, получим:

$$b_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - \frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k), k = \overline{1,n-1}; \quad b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3} h_n c_n. \quad (5.27)$$

Подставляя найденные выражения в систему в (5.23) окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_k:

$$\begin{cases} c_1 = 0, c_{n+1} = 0 \\ h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_{k+1} = 3\left(\dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - \dfrac{y_{k-1} - y_{k-2}}{h_{k-1}}\right), \quad k = \overline{2,n}. \end{cases} \tag{5.28}$$

Получили систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Решение (5.28) эффективно строится методом прогонки. По найденным коэффициентам $\{c_k\}$ из (5.26) и (5.27) явно находятся $\{b_k\}$ и $\{d_k\}$.

5.3.3. Сходимость интерполяционных сплайнов

Имеет место следующая теорема.

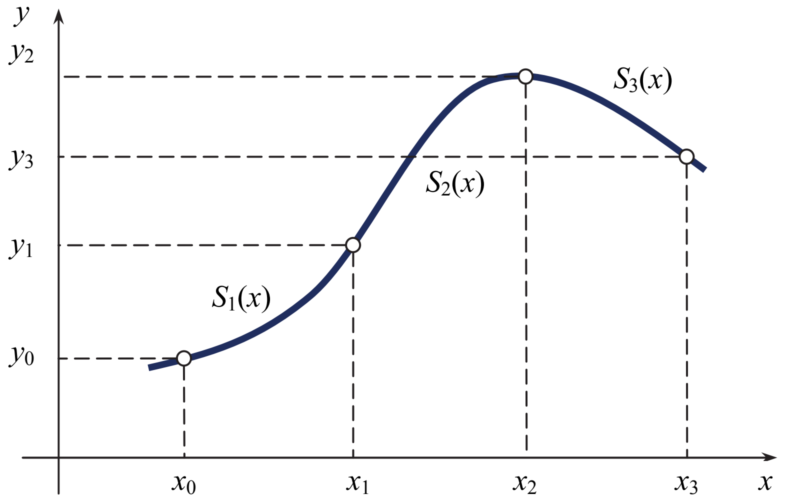
Теорема. *Если* $f(x)$ *имеет непрерывные до 4-го порядка производные на* $[a, b]$ *и* $\overline{\omega}$ *– равномерная сетка с шагом* $h = \dfrac{(b-a)}{n}$, *то справедливы оценки*:

$$\| f(x) - S(x) \|_{C[a,b]} = \sup | f(x) - S(x) | \le c_0 M_4 h^4,$$
$$\| f'(x) - S'(x) \|_{C[a,b]} \le c_1 M_4 h^3,$$
$$\| f''(x) - S''(x) \|_{C[a,b]} \le c_2 M_4 h^2,$$

где $M_4 = \sup\limits_{[a,b]} | f^{(4)}(x) |$.

Пример вычисления сплайна

k	0	1	2	3
x_k	1	2	4	7
y_k	2	3	1	4



Уравнения кубических сплайнов имеют вид:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 + b_1(x - x_0) + c_1(x - x_0)^2 + d_1(x - x_0)^3, \\ S_2 = a_2 + b_2(x - x_1) + c_2(x - x_1)^2 + d_2(x - x_1)^3, \\ S_3 = a_3 + b_3(x - x_2) + c_3(x - x_2)^2 + d_3(x - x_2)^3. \end{cases}$$

или, подставляя наши данные:

k	**0**	**1**	**2**	**3**
$\boldsymbol{x_k}$	1	2	4	7
$\boldsymbol{y_k}$	2	3	1	4

получим

$$\begin{cases} S_1 = a_1 + b_1(x - 1) + c_1(x - 1)^2 + d_1(x - 1)^3, \\ S_2 = a_2 + b_2(x - 2) + c_2(x - 2)^2 + d_2(x - 2)^3, \\ S_3 = a_3 + b_3(x - 4) + c_3(x - 4)^2 + d_3(x - 4)^3. \end{cases}$$

Необходимо найти значения всех 12-ти коэффициентов:

$$a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3.$$

$$S_1 = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3$$
$$S_2 = a_2 + b_2(x-2) + c_2(x-2)^2 + d_2(x-2)^3$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**
x_k	1	2	4	7
y_k	2	3	1	4

1. Для сплайна S_1 должно выполняться условие интерполяции, т.е. он обязательно проходить через две точки с координатами $[x_0, y_0]$ и $[x_1, y_1]$.

Для точки $x_0 = 1$ имеем $S_1(x_0) = y_0 = 2$:

$$2 = a_1 + b_1(1-1) + c_1(1-1)^2 + d_1(1-1)^3$$

Для точки $x_1 = 2$ имеем $S_1(x_1) = y_1 = 3$:

$$3 = a_1 + b_1(2-1) + c_1(2-1)^2 + d_1(2-1)^3.$$

Получаем два уравнения:

$$2 = a_1;$$
$$3 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1.$$

2. Для сплайна S_2 также должно выполняться условие интерполяции, т.е. он обязательно проходить через две точки с координатами $[x_1, y_1]$ и $[x_2, y_2]$.

Для точки $x_1 = 2$ имеем $S_2(x_1) = y_1 = 3$:

$$3 = a_2 + b_2(2-2) + c_2(2-2)^2 + d_2(2-2)^3$$

$$S_2 = a_2 + b_2(x-2) + c_2(x-2)^2 + d_2(x-2)^3$$
$$S_3 = a_3 + b_3(x-4) + c_3(x-4)^2 + d_3(x-4)^3$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**
x_k	1	2	4	7
y_k	2	3	1	4

Для точки $x_2 = 4$ имеем $S_2(x_2) = y_2 = 1$:

$$1 = a_2 + b_2(4-2) + c_2(4-2)^2 + d_2(4-2)^3.$$

Получаем еще два уравнения:

$$3 = a_2;$$
$$1 = a_2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2.$$

3. Для сплайна S_3 также должно выполняться условие интерполяции, т.е. он обязательно проходить через две точки с координатами $[x_2, y_2]$ и $[x_3, y_3]$.

Для точки $x_2 = 4$ имеем $S_3(x_2) = y_2 = 1$:

$$1 = a_3 + b_3(4-4) + c_3(4-4)^2 + d_3(4-4)^3$$

$$S_3 = a_3 + b_3(x-4) + c_3(x-4)^2 + d_3(x-4)^3$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**
x_k	1	2	4	7
y_k	2	3	1	4

Для точки $x_3 = 7$ имеем $S_2(x_3) = y_3 = 4$:

$$4 = a_3 + b_3(7-4) + c_3(7-4)^2 + d_3(7-4)^3$$

Получаем еще два уравнения:

$$1 = a_3;$$

$$4 = a_3 + 3b_3 + 9c_3 + 27d_3.$$

Таким образом, из необходимых 12-ти уравнений составлено 6:

$$2 = a_1;$$

$$3 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1.$$

$$3 = a_2;$$

$$1 = a_2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2.$$

$$1 = a_3;$$

$$4 = a_3 + 3b_3 + 9c_3 + 27d_3.$$

4. Для получения недостающих уравнений воспользуется условием непрерывности первых и вторых производных сплайнов.

$$\begin{cases} S_1 = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3, \\ S_2 = a_2 + b_2(x-2) + c_2(x-2)^2 + d_2(x-2)^3, \\ S_3 = a_3 + b_3(x-4) + c_3(x-4)^2 + d_3(x-4)^3. \end{cases}$$

Вычислим эти производные:

$$\begin{cases} S'_1 = b_1 + 2c_1(x-1) + 3d_1(x-1)^2, \\ S'_2 = b_2 + 2c_2(x-2) + 3d_2(x-2)^2, \\ S'_3 = b_3 + 2c_3(x-4) + 3d_3(x-4)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} S''_1 = 2c_1 + 6d_1(x-1), \\ S''_2 = 2c_2 + 6d_2(x-2), \\ S''_3 = 2c_3 + 6d_3(x-4). \end{cases}$$

Сплайны S_1 и S_2 имеют одну общую точку $[x_1, y_1]$. Для того, чтобы сплайн представлял собой гладкую функцию (без разрывов), необходимо, чтобы значения производных в этой точке для этих сплайнов совпадали:

$$S'_1(x_1) = S'_2(x_1),\ \ S''_1(x_1) = S''_2(x_1).$$

$$S'_1 = b_1 + 2c_1(x-1)+3d_1(x-1)^2$$

$$S'_2 = b_2 + 2c_2(x-2)+3d_2(x-2)^2$$

$$S''_1 = 2c_1+6d_1(x-1)$$

$$S''_2 = 2c_2+6d_2(x-2)$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**
x_k	1	2	4	7
y_k	2	3	1	4

Вычисляем значения первых производных сплайнов S_1 и S_2 в точке $[x_1 = 2, y_1 = 4]$:

$$S'_1(x_1 = 2) = b_1 + 2c_1(2-1)+3d_1(2-1)^2 = b_1 + 2c_1+3d_1,$$

$$S'_2(x_1 = 2) = b_2 + 2c_2(2-2)+3d_2(2-2)^2 = b_2.$$

Получаем уравнение:

$$b_1 + 2c_1+3d_1 = b_2.$$

Вычисляем значения вторых производных сплайнов S_1 и S_2 в точке $[x_1 = 2, y_1 = 4]$:

$$S''_1(x_1 = 2) = 2c_1 + 6d_1(2-1)$$
$$= 2c_1 + 6d_1,$$
$$S''_2(x_1 = 2) = 2c_2 + 6d_2(2-2) = 2c_2.$$

Получаем еще одно уравнение:

$$2c_1 + 6d_1 = 2c_2,$$

или

$$c_1 + 3d_1 = c_2.$$

$$S'_1 = b_1 + 2c_1(x-1) + 3d_1(x-1)^2$$
$$S'_2 = b_2 + 2c_2(x-2) + 3d_2(x-2)^2$$
$$S''_1 = 2c_1 + 6d_1(x-1)$$
$$S''_2 = 2c_2 + 6d_2(x-2)$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**
x_k	1	2	4	7
y_k	2	3	1	4

Аналогично со сплайнами S_2 и S_3. Они имеют одну общую точку $[x_2, y_2]$. Следовательно, в этой точке:

$$S'_2(x_2) = S'_3(x_2), \qquad S''_2(x_2) = S''_3(x_2).$$

$$S'_2 = b_2 + 2c_2(x-2)+3d_2(x-2)^2$$

$$S'_3 = b_3 + 2c_3(x-4)+3d_3(x-4)^2$$

$$S''_2 = 2c_2+6d_2(x-2)$$

$$S''_3 = 2c_3+6d_3(x-4)$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**
x_k	1	2	4	7
y_k	2	3	1	4

Тогда имеем:

$$S'_2(x_2 = 4) = b_2 + 2c_2(4 - 2)+3d_2(4-2)^2 = b_2 + 4c_2+12d_2,$$

$$S'_3(x_2 = 4) = b_3 + 2c_3(4-4)+3d_3(4-4)^2 = b_3.$$

Получаем уравнение:

$$b_2 + 4c_2+12d_2 = b_3.$$

И для вторых производных:

$$S''_2(x_2 = 4) = 2c_2+6d_2(4-2) = 2c_2+12d_2,$$

$$S''_3(x_2 = 4) = 2c_3+6d_3(4-4) = 2c_3.$$

Получаем уравнение:

$$2c_2+12d_2 = 2c_3,$$

или

$$c_2+6d_2 = c_3.$$

Таким образом, на этом этапе получено 4 уравнения:

$$b_1 + 2c_1+3d_1 = b_2.$$

$$c_1+3d_1 = c_2.$$

$$b_2 + 4c_2+12d_2 = b_3.$$

$$c_2+6d_2 = c_3.$$

Всего получено 10 уравнений из 12-ти необходимых. Оставшиеся 2 уравнения получим из 4-го дополнительного условия – условия нулевой кривизны сплайна. Согласно этому условию в граничных точках сетки x_0 и x_3 вторые производные соответствующих сплайнов должны равняться нулю. Тогда получаем:

$$S''_1(x_0) = S''_3(x_3) = 0$$

k	**0**	**1**	**2**	**3**
x_k	1	2	4	7
y_k	2	3	1	4

$$S''_1(x_0 = 1) = 2c_1 + 6d_1(1 - 1) = 2c_1 = 0,$$

$$S''_3(x_3 = 7) = 2c_3 + 6d_3(7 - 4) = 2c_3 + 18d_3 = 0.$$

После преобразований получаем оставшиеся 2 уравнения.

$$c_1 = 0,$$

$$c_3 + 9d_3 = 0.$$

Соберем все полученные 12 уравнений:

$$2 = a_1;$$
$$3 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1;$$
$$3 = a_2;$$
$$1 = a_2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2;$$
$$1 = a_3;$$
$$4 = a_3 + 3b_3 + 9c_3 + 27d_3;$$
$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2;$$
$$c_1 + 3d_1 = c_2;$$
$$b_2 + 4c_2 + 12d_2 = b_3;$$
$$c_2 + 6d_2 = c_3;$$
$$c_1 = 0;$$
$$c_3 + 9d_3 = 0.$$

Приводим к единообразному виду

$$a_1 = 2;$$
$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 3;$$
$$a_2 = 3;$$
$$a_2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 1;$$
$$a_3 = 1;$$
$$a_3 + 3b_3 + 9c_3 + 27d_3 = 4;$$
$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 - b_2 = 0;$$
$$c_1 + 3d_1 - c_2 = 0;$$
$$b_2 + 4c_2 + 12d_2 - b_3 = 0;$$
$$c_2 + 6d_2 - c_3 = 0;$$
$$c_1 = 0;$$
$$c_3 + 9d_3 = 0.$$

$$2 = a_1;$$
$$3 = a_1 + b_1 + c_1 + d_1;$$
$$3 = a_2;$$
$$1 = a_2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2;$$
$$1 = a_3;$$
$$4 = a_3 + 3b_3 + 9c_3 + 27d_3;$$
$$b_1 + 2c_1 + 3d_1 = b_2;$$
$$c_1 + 3d_1 = c_2;$$
$$b_2 + 4c_2 + 12d_2 = b_3;$$
$$c_2 + 6d_2 = c_3;$$
$$c_1 = 0;$$
$$c_3 + 9d_3 = 0$$

Подставим в систему известные коэффициенты. Это коэффициенты:

$$a_1 = 2;\ a_2 = 3;\ a_3 = 1;\ c_1 = 0.$$

$2 + b_1 + 0 + d_1 = 3;$

$3 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 1;$

$1 + 3b_3 + 9c_3 + 27d_3 = 4;$

$b_1 + 2 \cdot 0 + 3d_1 - b_2 = 0;$

$0 + 3d_1 - c_2 = 0;$

$b_2 + 4c_2 + 12d_2 - b_3 = 0;$

$c_2 + 6d_2 - c_3 = 0;$

$c_3 + 9d_3 = 0.$

$a_1 = 2;$

$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 3;$

$a_2 = 3;$

$a_2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 1;$

$a_3 = 1;$

$a_3 + 3b_3 + 9c_3 + 27d_3 = 4;$

$b_1 + 2c_1 + 3d_1 - b_2 = 0;$

$c_1 + 3d_1 - c_2 = 0;$

$b_2 + 4c_2 + 12d_2 - b_3 = 0;$

$c_2 + 6d_2 - c_3 = 0;$

$c_1 = 0;$

$c_3 + 9d_3 = 0$

В результате система уравнений для нахождения 8 неизвестных коэффициентов b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 принимает вид:

$$b_1 + d_1 = 1;$$
$$2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = -2;$$
$$3b_3 + 9c_3 + 27d_3 = 3;$$
$$b_1 + 3d_1 - b_2 = 0;$$
$$3d_1 - c_2 = 0;$$
$$b_2 + 4c_2 + 12d_2 - b_3 = 0;$$
$$c_2 + 6d_2 - c_3 = 0;$$
$$c_3 + 9d_3 = 0.$$

$$2 + b_1 + 0 + d_1 = 3;$$
$$3 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 1;$$
$$1 + 3b_3 + 9c_3 + 27d_3 = 4;$$
$$b_1 + 2 \cdot 0 + 3d_1 - b_2 = 0;$$
$$0 + 3d_1 - c_2 = 0;$$
$$b_2 + 4c_2 + 12d_2 - b_3 = 0;$$
$$c_2 + 6d_2 - c_3 = 0;$$
$$c_3 + 9d_3 = 0.$$

Получаем следующую расширенную матрицу коэффициентов:

$$
\begin{array}{cccccccc|c}
b_1 & d_1 & b_2 & c_2 & d_2 & b_3 & c_3 & d_3 & \\
\end{array}
$$

$$
\left[
\begin{array}{cccccccc|c}
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{9} & \mathbf{27} & \mathbf{3} \\
\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{12} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{6} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{9} & \mathbf{0}
\end{array}
\right]
$$

Решаем данную СЛАУ и получаем:

$$b_1 = 1{,}4286;\ d_1 = -0{,}4286;$$

$$b_2 = 0{,}1429;\ c_2 = -1{,}2857;\ d_2 = 0{,}3571;$$

$$b_3 = -0{,}7143;\ c_3 = 0{,}8571;\ d_3 = -0{,}0952.$$

Собираем все коэффициенты вместе:

$$a_1 = 2;\ b_1 = 1{,}4286;\ c_1 = 0;\ d_1 = -0{,}4286;$$

$$a_2 = 3;\ b_2 = 0{,}1429;\ c_2 = -1{,}2857;\ d_2 = 0{,}3571;$$

$$a_3 = 1;\ b_3 = -0{,}7143;\ c_3 = 0{,}8571;\ d_3 = -0{,}0952.$$

Найденные коэффициенты подставляются в уравнения сплайнов:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 + b_1(x-1) + c_1(x-1)^2 + d_1(x-1)^3, \\ S_2 = a_2 + b_2(x-2) + c_2(x-2)^2 + d_2(x-2)^3, \\ S_3 = a_3 + b_3(x-4) + c_3(x-4)^2 + d_3(x-4)^3. \end{cases}$$

Получаем три кубических сплайна:

$$S_1(x) = 2 + 1{,}4286(x-1) - 0{,}4286(x-1)^3;$$

$$S_2(x) = 3 + 0{,}1429(x-2) - 1{,}2857(x-2)^2 + 0{,}3571(x-2)^3;$$

$$S_3(x) = 1 - 0{,}7143(x-4) + 0{,}8571(x-4)^2 - 0{,}0952(x-4)^3;$$

$$S_1(x) = 2 + 1{,}4286(x-1) - 0{,}4286(x-1)^3;$$
$$S_2(x) = 3 + 0{,}1429(x-2) - 1{,}2857(x-2)^2 + 0{,}3571(x-2)^3;$$
$$S_3(x) = 1 - 0{,}7143(x-4) + 0{,}8571(x-4)^2 - 0{,}0952(x-4)^3$$

Сплайн S_k используется для вычисления значений функций для всех x принадлежащих отрезку $[x_{k-1}, x_k]$

То есть

для вычисления значений $x \in [x_0 = 1, x_1 = 2]$ используется выражения для сплайна S_1;

для вычисления значений $x \in [x_1 = 2, x_3 = 4]$ используется выражения для сплайна S_2;

для вычисления значений $x \in [x_2 = 4, x_3 = 7]$ используется выражения для сплайна S_3.