5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ

5.1. Простановка задачи

Пусть значения некоторой функции $y = f(x)$ заданы таблично на отрезке $[a; b]$:

$\boldsymbol{x}$	$x_0 = a$	x_2	…	$x_n = b$
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

Пример табличной записи функции $\boldsymbol{y = x^2}$ на отрезке [1; 5]

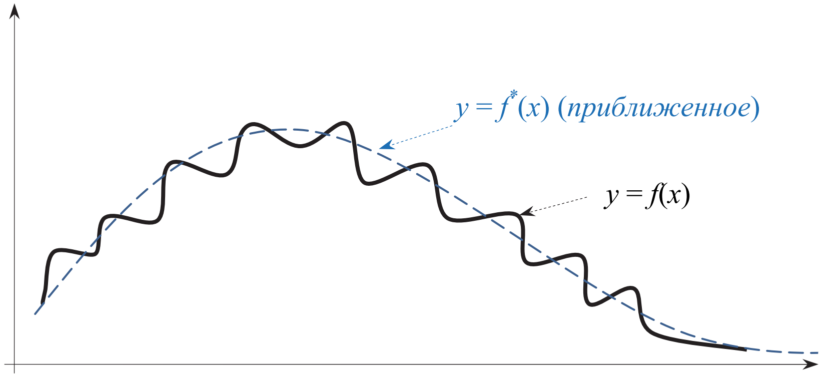
$\boldsymbol{x}$	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{f(x)}$	1	4	9	16	25

Эти значения могут быть найдены в результате наблюдений (измерений) в каком-то натуральном эксперименте, либо в результате вычислений.

Требуется **восстановить функцию $f(x)$ для всех значений x на отрезке $a \le x \le b$**, если известно ее значение в некотором конченом наборе точек этого отрезка.

Функция $f(x)$ может быть задана «**сложной**» формулой и вычисления ее значений по этой формуле очень трудоемки.

Желательно иметь для функции **более простую** (менее трудоемкую для вычислений) формулу, которая позволяла бы находить приближенное значение рассматриваемой функции с требуемой точностью в любой точке отрезка.



Пусть на отрезке $a \le x \le b$ задана сетка

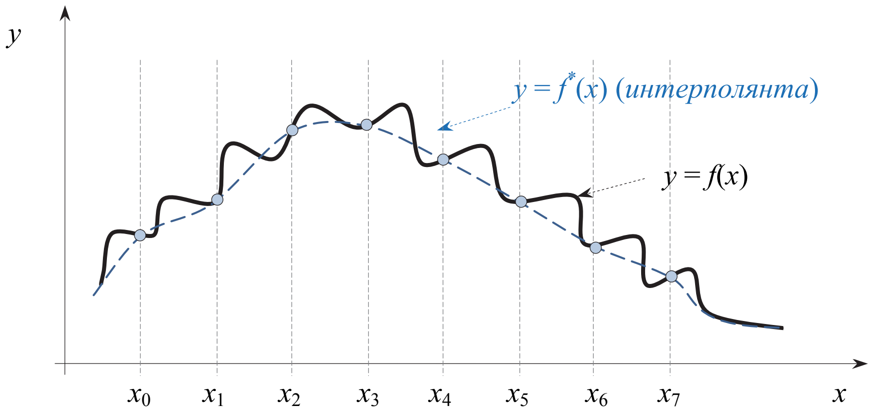
$$\overline{\omega} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

в ее узлах заданы значения функции $y(x)$, равные

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ \ldots,\ y(x_i) = y_i,\ \ldots,\ y(x_n) = y_n\,.$$

Требуется построить **интерполянту** – *функцию f(x), совпадающую с функцией y(x), в узлах сетки*:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{5.1}$$



Основная цель интерполяции – получить быстрый (экономичный) алгоритм вычисления значений $f(x)$ для значений x, не содержащихся в таблице данных.

Основные вопросы:

1. Как выбрать интерполяну $f(x)$?

2. Как оценить погрешность $|y(x) - f(x)|$?

Интерполирующие функции $f(x)$, как правило, строятся в виде линейных комбинаций некоторых элементарных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x), \tag{5.2}$$

где $\{\Phi_k(x)\}$ – фиксированные линейно независимые функции, $C_0, C_1, ..., C_n$ – не определенные пока коэффициенты.

Из условий интерполяции: $f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n$ получим систему $n+1$ уравнений относительно коэффициентов $\{C_k\}$:

$$\begin{cases} C_0\Phi_0(x_0) + C_1\Phi_1(x_0) + ... + C_n\Phi_n(x_0) = y_0, \\ C_0\Phi_0(x_1) + C_1\Phi_1(x_1) + ... + C_n\Phi_n(x_1) = y_1, \\ .... \\ C_0\Phi_0(x_n) + C_1\Phi_1(x_n) + ... + C_n\Phi_n(x_n) = y_n. \end{cases}$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n .$$

Предположим, что система функций $\{\Phi_k(x)\}$ такова, что при любом невырожденном выборе узлов сетки $\overline{\omega}$ отличен от нуля определитель

$$\Delta(\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n) = \begin{vmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \ldots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \ldots & \Phi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \ldots & \Phi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

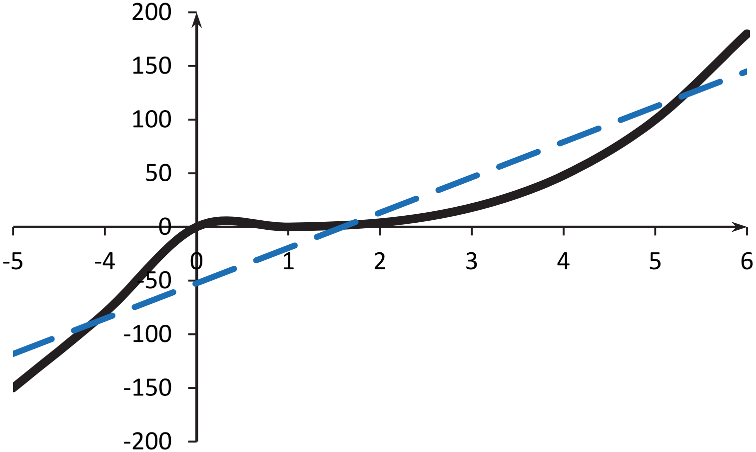
Такую систему интерполяционных функций называют **чебышевской системой интерполяционных функций.**

В этом случае на данной сетке $\overline{\omega}$ по известным значениям $x_i, y_i, i = \overline{0,n}$ **однозначно** определяются коэффициенты $\{c_k\}_{k=\overline{0,n}}$ интерполяционного многочлена.

Теорема. *Для разрешимости задачи интерполяции необходимо и достаточно чтобы система функций* $\{\Phi_k(x)\}$ *образовывала на* $[a, b]$ *чебышевскую систему интерполяционных функций*.

Если функции $\{\Phi_k(x)\}$ представляют собой линейные функции, то интерполяцию называют **линейной**.

Такой вид интерполяции обычно дает большую погрешность.



В качестве интерполяционных функций чаще всего выбирают:

1) степенные, или полиномиальные, функции

$$\Phi_k(x) = x^k;$$

2) тригонометрические функции

$$\Phi_k(x) = \begin{Bmatrix} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{Bmatrix};$$

3) показательные функции

$$\Phi_k(x) = e^{kx}$$

и другие.

Задачи интерполяции применяются при построении приближенных методов вычисления интегралов, разностной аппроксимации дифференциальных уравнений на основе интегральных тождеств, в задачах оптимизации и др.

5.2. Полиномиальная интерполяция

Пусть интерполирующие функции $f(x)$ задаются следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x), \tag{5.2}$$

где $\{\Phi_k(x)\}$ – фиксированные линейно независимые функции, $C_0, C_1, ..., C_n$ – не определенные пока коэффициенты.

Существование и единственность интерполяционного полинома

Пусть функции $\{\Phi_k(x)\}$ имеют вид:

$$\Phi_k(x) = x^k.$$

Тогда интерполянту (интерполяционную функцию) будем искать в виде:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k.$$

Необходимость выполнения условия интерполяции ($f(x_i) = y_i$) приводят к СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов $\{C_k\}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x), \quad \textbf{(5.2)}$$

$$\begin{cases} C_0 + C_1 x_0 + \ldots + C_n x_0^n = y_0, \\ C_0 + C_1 x_1 + \ldots + C_n x_1^n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0 + C_1 x_n + \ldots + C_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Определитель этой системы (определитель Вандермонда):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le m < k \le n} (x_k - x_m) \ne 0 \text{ на произвольной невырожденной сетке } \overline{\omega}$$

Следовательно, система функций $\{x^k\}$ – чебышевская система интерполяционных функций на $[a,b]$ и справедлива

Теорема. *Интерполяционный полином* (5.2) *существует и единственен.*

5.2.1. Интерполяционный полином Лагранжа

Рассмотрим систему полиномов степени n, называемых **базисом Лагранжа.**

Базис Лагранжа $\{l_k^{(n)}(x)\}_{k=\overline{0,n}}$ определяется из следующих соображений:

1) каждый элемент базиса $l_k^{(n)}(x)$ есть полином n-й степени;

2) $l_k^{(n)}(x)$ равен нулю во всех узлах сетки $\overline{\omega}$ кроме k-го, где он равен 1:

$$l_k^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 1, \; i = k, \\ 0, \; i \neq k \end{cases} \quad i,k = \overline{0,n}\,.$$

Построить эти полиномы нетрудно.

Действительно, зная корни полинома, можно утверждать, что полином

$$l_k(x) \equiv l_k^{(n)}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

решает поставленную задачу.

Преобразуем базис $\{l_k^{(n)}(x)\}$.

Рассмотрим полином (n+1)-й степени

$$w(x) \equiv w_{\overline{0,n}}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

Найдем производную функции $w(x)$:

$$w(x) \equiv w_{\overline{0,n}}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

$$w'(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) + \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{n}(x - x_i) + \prod_{\substack{i=0\\ i\neq 2}}^{n}(x - x_i) + \ldots + \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x - x_i) + \ldots + \prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-1}}^{n}(x - x_i) + \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i).$$

В точке $x = x_k$, имеем

$$w'(x_k) = \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(x_k - x_i)}_{0} + \underbrace{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{n}(x_k - x_i)}_{0} + \underbrace{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq 2}}^{n}(x_k - x_i)}_{0} + \ldots + \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i) + \ldots + \underbrace{\prod_{\substack{i=0\\ i\neq n-1}}^{n}(x_k - x_i)}_{0} + \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x_k - x_i)}_{0}$$

Следовательно

$$w'(x_k) = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i) = (x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n).$$

Тогда

$$l_k(x) = \frac{w(x)}{(x - x_k)\,w'(x_k)}$$

и есть **базис полиномов Лагранжа**.

$$l_k(x) = \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}$$

$$l_k^{(n)}(x_i) = \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k \end{cases} \quad i, k = \overline{0, n}$$

Построенный базис Лагранжа $l_k(x)$ единственен.

Действительно, если существует полином $\overline{l_k(x)}$ при тех же условиях, то полином

$$q^{(n)}(x) = l_k(x) - \overline{l_k(x)}$$

есть полином n-й степени обращающийся в ноль в (n+1)-й точке $x_0, ..., x_n$.

Получается, что полином $q^{(n)}(x)$ тождественно равен нулю:

$$q^{(n)}(x) = 0,$$

следовательно рассмотренные полиномы совпадают, т.е.

$$l_k(x) = \overline{l_k(x)}.$$

Теперь легко записать решение задачи полиномиальной интерполяции.

Условие интерполяции

$$f(x_i) = y_i$$

Полином $y_k \cdot l_k(x)$ принимает в узле x_k значение y_k и равен нулю во всех остальных узлах сетки $\overline{\omega}$ (при $x_i \neq x_k$).

Тогда

$$L_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{w(x)}{(x - x_k) w'(x_k)} \tag{5.3}$$

представляет собой полином степени не выше n и $L_n(x_i) = y_i$, т.е. является интерполяционным полиномом.

Формула (5.3) называется **интерполяционной формулой Лагранжа**, а соответствующий полином $L_n(x)$ – **интерполяционным полиномом Лагранжа**.

Пример. Пусть задана функция таблично:

i	0	1	2
x_i	**1**	**2**	**3**
$f(x_i)$	**1**	**4**	**9**

$$L_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}$$

$$w(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

$$w'(x_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)$$

$$w(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

$$w'(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + (x-1)(x-2).$$

$$w'(1) = (1-2)(1-3) + (1-1)(1-3) + (1-1)(1-2) = 2$$

$$w'(2) = (2-2)(2-3) + (2-1)(2-3) + (2-1)(2-2) = -1$$

$$w'(3) = (3-2)(3-3) + (3-1)(3-3) + (3-1)(3-2) = 2$$

$$L_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)}$$

$$w(x) = (x-1)(x-2)(x-3), w'(1) = 2, w'(2) = -1, w'(3) = 2$$

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{2} f(x_k) \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)} =$$

$$= 1 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2(x-1)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1(x-2)} + 9 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2(x-3)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x-3)}{2} - \frac{8(x-1)(x-3)}{2} + \frac{9(x-1)(x-2)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 - 5x + 6 - 8(x^2 - 4x + 3) + 9(x^2 - 3x + 2)\right) = \frac{1}{2}\left(2x^2\right) = x^2.$$

Пример см. по ссылке:

Черемушкин С. Полиномиальная интерполяция: формула Лагранжа (21 мин.) https://www.youtube.com/watch?v=OzEcNdFdx7I&t=788s

5.2.2. Интерполяционный полином Ньютона

Удобным представлением интерполяционного полинома для практических вычислений является запись интерполяционного полинома в виде интерполяционного полинома Ньютона.

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично на отрезке $[a; b]$:

$\boldsymbol{x}$	$x_0 = a$	x_1	…	$x_n = b$
$\boldsymbol{f(x)}$	y_0	y_1	…	y_n

Пусть сетка равномерная, т.е. расстояние между аргументами постоянное и равно h:

$$h = x_{i+1} - x_i \ (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются ***конечными разностями первого порядка***:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \,, \ (i = 0,1,2,\ldots).$$

Из конечных разностей первого порядка образуются ***конечные разности второго порядка:***

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots).$$

Конечные разности могут быть представлены через значения функции. Для разности 1-го порядка это следует из определения. Для 2-го порядка:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \,.$$

Аналогично для разностей 3-го порядка:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) =$$
$$= y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

и т.д.

Методом математической индукции можно доказать, что:

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i . \qquad (5.4)$$

Будем искать интерполяционный многочлен в виде:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\,. \qquad (5.5)$$

Положим:

1) $x = x_0$, тогда из (5.5) следует

$$y_0 = N_n(x_0) = a_0\,,$$

откуда

$$y_0 = a_0\,.$$

2) $x = x_1$, получаем:

$$y_1 = N_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow$$

$$y_1 = y_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}.$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

$$h = x_{i+1} - x_i$$

3) $x = x_2$, получаем:

$$y_2 = N_n(x_2) = a_0 + a_1 \overbrace{(x_2 - x_0)}^{\substack{2h \\ ||}} + a_2 \overbrace{(x_2 - x_0)}^{\substack{2h \\ ||}} \overbrace{(x_2 - x_1)}^{\substack{h \\ ||}},$$

$$y_2 = a_0 + 2a_1 h + 2a_2 h^2$$

Ранее получили, что $a_0 = y_0$ и $a_1 = \dfrac{\Delta y_0}{h}$, тогда

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + 2a_2 h^2, \text{ или } y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = 2a_2 h^2.$$

С учетом того, что $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, получаем

$$y_2 - y_0 - 2(y_1 - y_0) = 2a_2 h^2, \text{ или } y_2 - 2y_1 + y_0 = 2a_2 h^2.$$

Следовательно,

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Рассуждая аналогично, получаем:

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \quad \textbf{(5.5)}$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3};$$

в общем случае выражение для a_k будет иметь вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}. \tag{5.6}$$

Подставим теперь (5.6) в выражение для многочлена (5.5):

$$\begin{aligned} N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \\ + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Далее положим $\dfrac{x-x_0}{h}=t$, т.е.

$x=x_0+ht$. Тогда:

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=t-1,$$
$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-x_0-2h}{h}=t-2.$$

…

$$\frac{x-x_k}{h}=\frac{x-x_0-kh}{h}=t-k.$$

$$N_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+ \ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1}). \quad \textbf{(5.7)}$$

$$\Delta^k y_i=y_{i+k}-ky_{i+k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}y_{i+k-2}-\ldots+(-1)^k y_i$$

Окончательно имеем:

$$N_n(x)=N_n(x_0+th)=y_0+t\Delta y_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0+ \ldots+\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad (5.8)$$

Формула (5.8) называется ***первой интерполяционной формулой Ньютона***.

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \qquad \textbf{(5.8)}$$
$$+ \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

! Она применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, когда t мало по абсолютной величине.

Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине ***формулой для интерполирования вперёд***. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x.

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае применяется формула для интерполирования назад – ***вторая интерполяционная формула Ньютона***, которая отыскивается в виде:

Первая интерполяционная формула Ньютона

$$N_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1}) \quad \textbf{(5.5)}$$

или

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0. \quad \textbf{(5.8)}$$

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

$$N_n(x) = a_0 - a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_n(x - x_n)\cdot\ldots\cdot(x - x_1). \quad (5.9)$$

Как и для первой формулы Ньютона, коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ на-

$$N_n(x) = a_0 - a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots$$
$$+ a_n(x - x_n) \cdot \ldots \cdot (x - x_1) \quad \textbf{(5.9)}$$

ходится из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k}. \tag{5.10}$$

Подставляя (5.10) в (5.9) и переходя к переменной $t = \dfrac{x - x_n}{h}$, получим окончательный **вид второй интерполяционной формулы Ньютона**:

$$\begin{gathered} N_n(x) = N_n(x_n - t\,h) = y_n + t\,\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \\ + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0. \end{gathered} \tag{5.11}$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона используется, когда значение аргумента находятся ближе к концу отрезка интерполяции.

Пример. Пусть задана функция таблично:

i	0	1	2
x_i	**1**	**2**	**3**
y_i	**1**	**4**	**9**

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1}).$$

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - k y_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$$

Требуется построить интерполяционный полином Ньютона

Найдем ***конечные разности порядка***

i	$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$	$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$
0	$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 2$
1	$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 5$	–
2	–	–

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1}).$$

$\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3$; $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 5$

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 2$

$$N_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) =$$
$$= 1 + \frac{3}{1}(x - 1) + \frac{2}{2!\cdot 1^2}(x - 1)(x - 2) = 3x - 2 + x^2 - 3x + 2 = x^2.$$

Пример см. по ссылке:

Черемушкин С. Полиномиальная интерполяция: интерполяционная формула Ньютона (24 мин.) https://www.youtube.com/watch?v=oOLjgTojNyo

5.2.3. Погрешность полиномиальной интерполяции

Пусть $P_n(x)$ – полином степени не выше, чем n, который решает задачу интерполяции функции $f(x)$ на сетке $\overline{\omega}$.

Требуется, в некотором смысле, оценить разность

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Предположим, что наша функция $f(x)$ имеет непрерывные до $(n+1)$ порядка включительно производные на $[a, b]$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - Aw(z),$$

где $A = \text{const}$; $w(z) = w_{\overline{0,n}}(z) = \prod_{i=0}^{n}(z - x_i)$ – введенный ранее многочлен $(n+1)$ степени.

Определим константу A.

Для этого потребуем, чтобы в произвольной фиксированной точке x^*, не совпадающей с узловой (т.е. $x^* \neq x_k$; $k = \overline{0,n}$), выполнялось равенство

$$\varphi(x^*) = 0.$$

Тогда $A = \left.\dfrac{f(z) - P_n(z)}{w(z)}\right|_{z=x^*} = \dfrac{f(x^*) - P_n(x^*)}{w(x^*)}$, так как $w(x^*) \neq 0$ при $x^* \neq x_k$.

С другой стороны, определенная так функция

$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - Aw(z)$$

непрерывна на $[\tilde{a} = \min(x^*, x_0, .., x_n), \tilde{b} = \max(x^*, x_0, .., x_n)]$, имеет производную и обращение в нуль в (n+2) точках $[\tilde{a}, \tilde{b}]$.

Теорема Ролля. *Пусть функция f(x), дифференцируемая в замкнутом промежутке* (*a, b*)*, обращается в нуль на концах промежутка. Тогда производная* $f'(x)$ *по меньшей мере один раз обращается в нуль внутри промежутка.*

Из теоремы Ролля следует, что существует (n+1) внутренняя точка на $[\tilde{a}, \tilde{b}]$, в которой $\varphi'(z) = 0$. Аналогично, существует n точек, в которых $\varphi''(z) = 0$ и т.д.

Следовательно, существует одна точка, в которой

$$\varphi^{(n+1)}(z) = 0\,,$$

т.е. существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Найдем (n+1)-ю функции

$$\varphi(z) = f(z) - P_n(z) - Aw(z)\,.$$

$$\varphi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - A(n+1)!\Big|_{z=\xi}\,,$$

здесь отсутствует (n+1)-я производная от полинома n-й степени $P_n(z)$, которая, очевидно, тождественно равна 0.

Таким образом

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Тогда с учетом полученного ранее соотношения для коэффициента A:

$$A = \frac{f(x) - P_n(x)}{w(x)}$$

получим

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f(x) - P_n(x)}{w(x)}.$$

Следовательно, для оценки погрешности интерполяции получим следующее выражение:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x),$$

где $\xi \in \left(\tilde{a} = \min(x^*, x_0, .., x_n), \tilde{b} = \max(x^*, x_0, .., x_n)\right)$

Абсолютную погрешность полиномиальной интерполяции можно оценить следующим образом:

$$\left|f(x) - P_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x)\right|,$$

или

$$| f(x) - P_n(x) | \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | w(x) |, \qquad (5.12)$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{[\tilde{a},\tilde{b}]} | f^{(n+1)}(x) |$.

Дальнейшее использование оценки (5.12) связано с изучением характера поведения $| w(x) |$ при произвольном расположении узлов интерполяции, что достаточно сложно и громоздко.

Ограничимся наиболее часто распространенным на практике случаем.

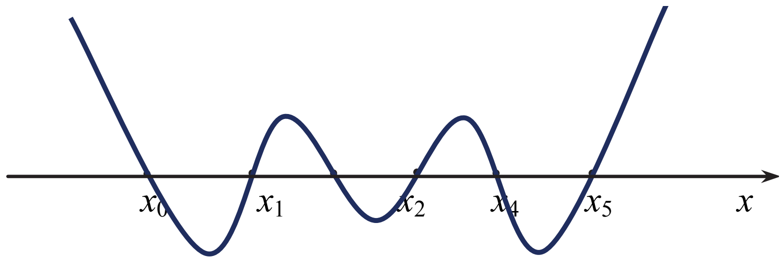
Пусть имеется равномерная сетка $\overline{\omega}$ с постоянным шагом $h = \dfrac{b-a}{n}$, и пусть узлы интерполяции на этой сетке выбраны подряд.

Для наглядности выберем $n = 5$.

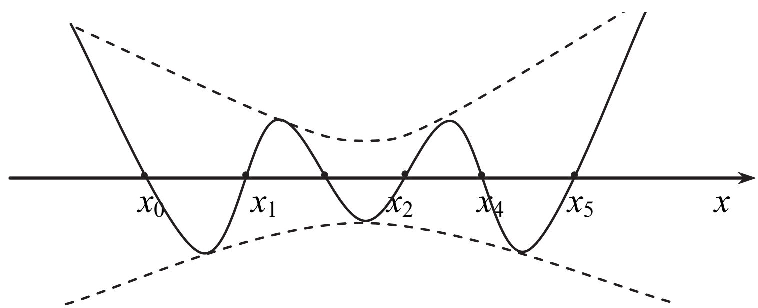
Тогда $w(x)$ – многочлен 6-й степени:

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_5).$$

Рассмотрим этот многочлен $w(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_5)$.



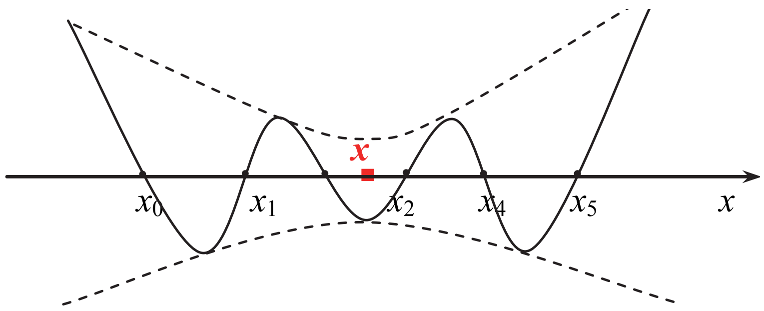
Вблизи центральных узлов интерполяции экстремум $|w(x)|$ невелик. Для крайних интервалов – побольше. Вне сетки узлов $|w(x)|$ быстро возрастает.



Выводы:

1) **экстраполяция** (использования интерполяционных многочленов для приближенного вычисления функции вне рассматриваемого отрезка; это приближение называют экстраполяцией) ненадежна. Результатам, если $x \notin [a,b]$ нельзя доверять;

2) при интерполяции на равномерной сетке выгодно так выбрать узлы $\{x_i\}$ из таблицы, чтобы точка ***x*** была по возможности близка к центру конфигурации узлов. Это обеспечивает большую точность и надежность интерполяции.



Сравнительно просто дальнейшая оценка погрешности интерполяции проводится в случае нечетного $n = 2k + 1$ (когда на сетке $\overline{\omega}$ расположены $2k + 2$ узла и имеется $2k + 1$ интервалов длины h).

Пусть при этом рассматриваемое x находится в центральном интервале $x \in (x_k, x_{k+1})$. На этом интервале экстремум $w(x)$ (в силу симметрии $w(x)$ относительно точки $x_0 + kh + \frac{h}{2}$) достигается точно в середине $(k+1)$-го интервала сетки $\overline{\omega}$, и его можно оценить:

$$\left|w\left(x_0 + kh + \frac{h}{2}\right)\right| = \left(\left(kh + \frac{h}{2}\right)\left((k-1)h + \frac{h}{2}\right) \times \ldots \times \frac{h}{2}\right)^2 = \left[\frac{h^{k+1}(2k+1)(2k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{2^{k+1}}\right] =$$

$$= \left(\frac{h^{k+1}(2k+1)!}{2^{k+1}2^k\,k!}\right).$$

Далее, применяя формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, получаем окончательную оценку погрешности интерполяции в центральном интервале сетки $\overline{\omega}$:

$$|f(x) - P_n(x)| \le \sqrt{\frac{2}{\pi n}} M_{n+1} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}, \quad x \in (x_k, x_{k+1}). \qquad (5.13)$$

Замечания:

1. Если известна оценка M_{n+1} для $\max|f^{(n+1)}(x)|$ на $[a, b]$, то из (5.13) можно найти число узлов (n+1), необходимое для интерполяции с заданной точностью.
2. Из формулы (5.13) видно, что если перейти к интерполяции по таблице с более мелким шагом (при том же числе узлов сетки n), то погрешность интерполяции будет убывать как величины порядка $O(h^{n+1})$. Поэтому говорят, что интерполяционный многочлен $P_n(x)$ обеспечивает (n+1)-й порядок точности интерполяции и интерполяция имеет погрешность $O(h^{n+1})$.