4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

К нелинейным уравнениям относятся алгебраические и трансцендентные уравнения.

Алгебраическими уравнениями называются уравнения, которые можно преобразовать так, чтобы в левой части будет многочлен от неизвестных, а в правой – нуль, т.е. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$, где a_i – коэффициенты (числа); n – степень многочлена.

Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), называются **трансцендентными**.

Примеры трансцендентных уравнений:

$$\sin(2x)\frac{5x+3}{0{,}5} - \mathrm{tg}(3x) = 0, \quad e^{-x} + 6\log_2(5-x) + 6\sin(x) = 0.$$

Численное решение нелинейных уравнений осуществляется с помощью итерационных методов.

Очевидно, что численное решение систем таких уравнений тоже возможно толь с помощью итерационных методов, т.е. универсальных прямых методов для решения любых систем нелинейных уравнений не существует.

Постановка задачи

Требуется решить систему нелинейных уравнений (СНУ) вида:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ .... \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases} \qquad (4.1)$$

где $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – нелинейные уравнения ($i = 1, 2, \ldots, n$).

4.1. Метод простых итераций

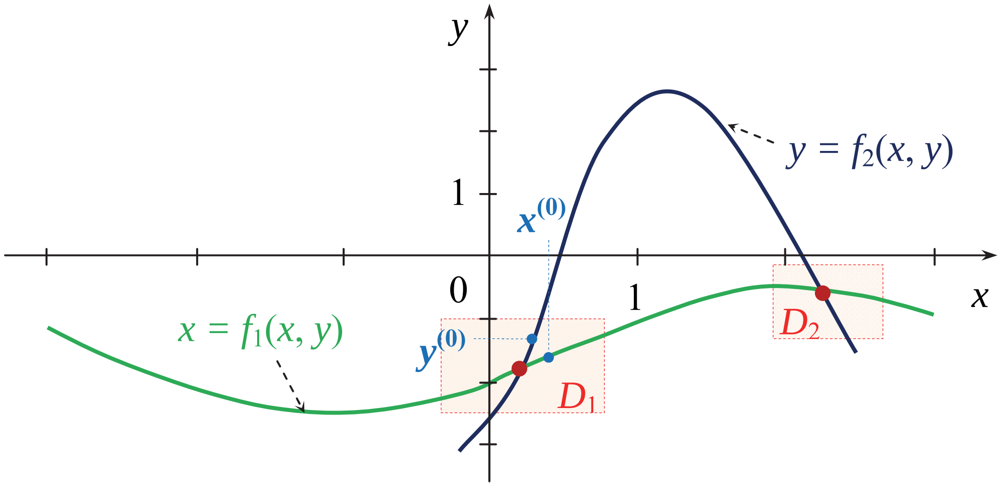
$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(4.1)}$$

Для построения схемы интеграций систему уравнений (4.1) представим в виде

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \qquad (4.2)$$

т.е. из каждого уравнения выразим по одной переменной x_i.

Первый этап решения СНУ – отделение корней, т.е. нахождения областей D_k (k – число корней системы), в которых система имеет только одно решение.



Второй этап – уточнение корня.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \quad \textbf{(4.2)}$$

Начальное приближение корней $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ выбирают из области D_k. Подставляя эти значения в правую часть (4.2) получим следующие приближения переменных $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \ldots, x_n^{(0)}), \\ x_2^{(1)} = f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \ldots, x_n^{(0)}), \\ x_3^{(1)} = f_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \ldots, x_n^{(0)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)} \ldots, x_n^{(0)}), \end{cases}$$

которые используются для получения 2-го приближения неизвестных и т.д.

Таким образом, схема итераций метода простых интеграций имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} ..., x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} ..., x_n^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} = f_3(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} ..., x_n^{(k)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} ..., x_n^{(k)}), \end{cases} \tag{4.3}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$.

Для более быстрой сходимости итерационного процесса, начальное приближение следует выбирать достаточно близким к точному значению корня.

Условия остановки процесса итераций:

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \max_i |f(x_i^{(k+1)})| < \varepsilon,$$

где $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Для сходимости системы процесса итераций достаточно, чтобы в области уточнения D_k выполнялось одно из следующих условий:

1) $$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| < 1;$$

2) $$\max_{1 \le j \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| < 1;$$

3) $$\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2} < 1.$$

Эти условия получаются аналогично таковым в методах простых итераций и Зейделя при решении СЛАУ.

Достаточные условия сходимости для решения СЛАУ методами простых итераций и Зейделя:

1) $$a = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1; \quad \textbf{(2.35)}$$

2) $$a = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1; \quad \textbf{(2.36)}$$

3) $$a = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{2}} < 1. \quad \textbf{(2.37)}$$

Пример 1. Используя метод простых итераций, решить следующую систему нелинейных уравнений с точностью до 0,001.

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}5)-y=1{,}5; \\ 2x-\cos y=0{,}6. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\cos y+0{,}3; \\ y=\sin(x-0{,}5)-1{,}5. \end{cases}$$

(из первого второго уравнения выразили x, из первого – y)

Отделение корней произведем графически (рис. 4.1). Из графика видно, что система имеет одно решение, заключенное в области D: $0 < x < 0{,}25$; $-2 < y < -1{,}5$.

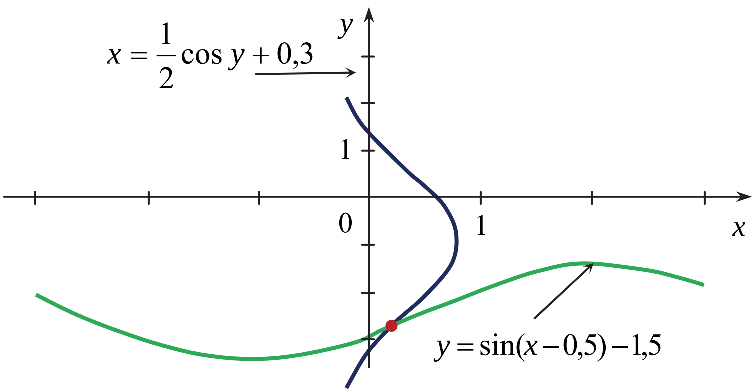


Рис. 4.1. Графическое отделение корней

Убедимся в том, что метод простых итераций применим для уточнения решения системы, для чего запишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} x = f_1(x,y) = \dfrac{1}{2}\cos y + 0{,}3; \\ y = f_2(x,y) = \sin(x - 0{,}5) - 1{,}5; \end{cases}$$

В области D $\{0 < x < 0{,}25;\ -2 < y < -1{,}5\}$ имеем

$$\left|\frac{\partial f_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial y}\right| = \left|-\frac{1}{2}\sin y\right| \le 0{,}5 < 1,$$

т.е. условие сходимости выполняется. Следовательно, в этой области D, для уточнения корней можно использовать схему:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}\cos y^{(k)} + 0{,}3; \\ y^{(k+1)} = \sin(x^{(k)} - 0{,}5) - 1{,}5. \end{cases}$$

За начальные приближения примем $x^{(0)} = 0{,}13,\ \ y^{(0)} = -\,1{,}8.$

Достаточные условия сходимости для решения СНУ методами простых итераций:

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| < 1;$$

$$\max_{1\le j\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| < 1;$$

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2} < 1$$

Результаты представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Номер итерации, k	Приближение корня		Проверка условия: $\lvert x^{(k)} - x^{(k-1)} \rvert < \varepsilon = 0{,}001$	Проверка условия: $\lvert y^{(k)} - y^{(k-1)} \rvert < \varepsilon = 0{,}001$
	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$		
0	0,13	–1,8		
1	0,186399	–1,86162	не выполняется	не выполняется
2	0,156631	–1,80849	не выполняется	не выполняется
3	0,182271	–1,83666	не выполняется	не выполняется
4	0,168628	–1,81241	не выполняется	не выполняется
5	0,180365	–1,82534	не выполняется	не выполняется
6	0,174098	–1,81422	не выполняется	не выполняется
7	0,179487	–1,82016	не выполняется	не выполняется
8	0,176605	–1,81505	не выполняется	не выполняется
9	0,179082	–1,81779	не выполняется	не выполняется
10	0,177756	–1,81544	не выполняется	не выполняется
11	0,178896	–1,8167	не выполняется	не выполняется
12	0,178286	–1,81561	**выполняется**	не выполняется
13	0,17881	–1,81619	**выполняется**	**выполняется**

2.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода простых итераций. Он используется для решения СНУ (4.1). Систему (4.1) необходимо сначала привести к виду (4.2). Начальное приближение корней $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ выбирают из области D_k, содержащей один корень. Тогда итерации методом Зейделя выполняются по следующей схеме:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = f_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} = f_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = f_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)} \ldots, x_n^{(k+1)}, x_n^{(k)}), \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – нелинейные уравнения ($i = 1, 2, \ldots, n$)

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{4.2}$$

Схема метода простых итераций

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} = f_3(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} \ldots, x_n^{(k)}), \end{cases} \tag{4.3}$$

Условия остановки процесса итераций совпадают с таковыми при использовании метода простых итераций, а именно:

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon \quad \text{или} \quad \max_i |f(x_i^{(k+1)})| < \varepsilon,$$

где $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Для сходимости системы процесса итераций достаточно, чтобы в области уточнения D_k выполнялось одно из следующих условий:

4) $$\max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| < 1;$$

5) $$\max_{1 \le j \le n} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right| < 1;$$

6) $$\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)^2} < 1.$$

Пример 2. Решить систему примера 1, используя метод Зейделя, с точностью до 0,001.

Решение. Так как в примере 1 этапы отделения корней и приведения системы к виду удобному для итераций были выполнены, сразу запишем схему итераций по методу Зейделя:

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = \dfrac{1}{2}\cos y^{(k)} + 0{,}3; \\ y^{(k+1)} = \sin(x^{(k+1)} - 0{,}5) - 1{,}5. \end{cases}$$

Как и в примере 1, за начальные приближения примем $x^{(0)} = 0{,}13$, $y^{(0)} = -1{,}8$. Вычисления приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Номер итерации, k	Приближение корня		Проверка условия: $\lvert x^{(k)} - x^{(k-1)} \rvert < \varepsilon = 0{,}001$	Проверка условия: $\lvert y^{(k)} - y^{(k-1)} \rvert < \varepsilon = 0{,}001$
	x_k	y_k		
0	0,13	–1,8		
1	0,186399	–1,80849	не выполняется	не выполняется
2	0,182271	–1,81241	не выполняется	не выполняется
3	0,180365	–1,81422	не выполняется	не выполняется
4	0,179487	–1,81505	**выполняется**	**выполняется**

2.3. Метод Ньютона

Пусть требуется решить систему нелинейных уравнений (СНУ) вида:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Метод Ньютона решения системы (4.1) состоит в построении итерационной последовательности:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} + \Delta x_1^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} + \Delta x_2^{(k-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = x_n^{(k-1)} + \Delta x_n^{(k-1)}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Для нахождения неизвестных $\Delta x_i^{(0)}, \Delta x_i^{(1)}, \ \ldots, \ \Delta x_i^{(k-1)}$ воспользуемся разложением функций $F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в ряд Тейлора в окрестности начального приближения.

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} + \Delta x_1^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} + \Delta x_2^{(k-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = x_n^{(k-1)} + \Delta x_n^{(k-1)}. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Такое разложение для рассматриваемых функций в окрестности точки $x^{(0)}$ с координатами $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ имеет вид:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_1(x^{(0)}) + \Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^{(0)}) + R_1, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_2(x^{(0)}) + \Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^{(0)}) + R_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_n(x^{(0)}) + \Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^{(0)}) + R_n, \end{cases} \qquad (4.6)$$

С учетом (4.1), и пренебрегая остаточными членами R_i, получаем СЛАУ с неизвестными $\Delta x_i^{(0)}$:

$$\begin{cases} F_1(x^{(0)}) + \Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^{(0)}) = 0, \\ F_2(x^{(0)}) + \Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^{(0)}) = 0, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ F_n(x^{(0)}) + \Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^{(0)}) = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

или, перенеся свободные коэффициенты $F_i(x^{(0)})$ вправо, получим следующую СЛАУ для вычисления $\Delta x_i^{(0)}$:

$$
\begin{cases}
\Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x^{(0)}) = -F_1(x^{(0)}), \\
\Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}(x^{(0)}) = -F_2(x^{(0)}), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\
\Delta x_1^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(x^{(0)}) + \Delta x_2^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}(x^{(0)}) + \cdots + \Delta x_n^{(0)} \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(x^{(0)}) = -F_n(x^{(0)}).
\end{cases}
\tag{4.8}
$$

Запишем эту систему в матричной форме

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \\
\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) & \dots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dfrac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) & \dots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})
\end{bmatrix}}_{\uparrow}
\begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \\ \dots \\ \Delta x_n^{(0)} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -F_1(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \\ -F_2(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ -F_n(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \end{bmatrix}
$$

Матрица - Якобиан

Определитель матрицы-Якобиан должен быть отличен от нуля!

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} + \Delta x_1^{(k-1)}, \quad (4.5) \\ x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} + \Delta x_2^{(k-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = x_n^{(k-1)} + \Delta x_n^{(k-1)}. \end{cases}$$

По найденным приращениям $\Delta x_i^{(0)}$ и координатам нулевого приближения по схеме (4.5) находятся значения первых приближений переменных:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1^{(0)}, \\ x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \Delta x_2^{(0)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(1)} = x_n^{(0)} + \Delta x_n^{(0)}. \end{cases}$$

которые используются для вычислений следующих приращений $\Delta x_i^{(1)}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) & ... & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) & ... & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(1)} \\ \Delta x_2^{(1)} \\ ... \\ \Delta x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) \\ -F_2(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ -F_n(x_1^{(1)},...,x_n^{(1)}) \end{bmatrix}$$

и т.д.

Таким образом, (k–1)-е приращения $\Delta x_i^{(k-1)}$ находятся для каждой итерации из соответствующей системы линейных уравнений вида:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) & ... & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) & ... & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k-1)} \\ \Delta x_2^{(k-1)} \\ ... \\ \Delta x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) \\ -F_2(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -F_n(x_1^{(k-1)},...,x_n^{(k-1)}) \end{bmatrix},$$

которые подставляются в систему (4.5):

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} + \Delta x_1^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} + \Delta x_2^{(k-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k)} = x_n^{(k-1)} + \Delta x_n^{(k-1)}, \end{cases}$$

тем самым вычисляются значения k-х приближений неизвестных: $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$.

Счет прекращается, если выполняется условие: $\max\limits_i |\Delta x_i| < \varepsilon$.

Пример 3. Используя метод Ньютона, решить следующую систему нелинейных уравнений с точностью до 0,001.

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}5)-y=1{,}5; \\ 2x-\cos y=0{,}6. \end{cases}$$

Решение. Перепишем данную систему в виде

$$\begin{cases} F_1(x,y)=\sin(x-0{,}5)-y-1{,}5; \\ F_2(x,y)=2x-\cos y-0{,}6. \end{cases}$$

Сначала необходимо вычислить частные производные функций $F_1(x,y)$ и $F_2(x,y)$ по всем переменным:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=\cos(x-0{,}5),\ \frac{\partial F_1}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial F_2}{\partial x}=2,\ \frac{\partial F_2}{\partial y}=-\sin y.$$

В качестве начальных приближений корней зададим следующие: $x^{(0)}$=0,13, $y^{(0)}=-1{,}8$.

Тогда следующие приближения будут вычисляться схеме:

$$\begin{cases} x^{(k)} = x^{(k-1)} + \Delta x^{(k-1)}, \\ y^{(k)} = y^{(k-1)} + \Delta y^{(k-1)}, \end{cases} \quad \text{где } k = 0,\ 1,\ \ldots$$

А приращения будут находиться из систем вида:

$$\begin{bmatrix} \cos(x^{(k)} - 0{,}5) & -1 \\ 2 & -\sin(y^{(k)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\sin(x^{(k)} - 0{,}5) - y^{(k)} - 1{,}5\right) \\ -\left(2x^{(k)} - \cos y^{(k)} - 0{,}6\right) \end{bmatrix},$$

где k – номер приближения.

Результаты вычислений в следующей таблице.

Таблица 3

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\Delta x^{(k)}$	$\Delta y^{(k)}$
0	0,13	–1,8	0,059424	–0,00621
1	0,189424	–1,80621	–0,00436	–0,00346
2	0,18506	–1,80968	–0,00229	–0,00222
3	0,18277	–1,81189	–0,00147	–0,00141
4	0,181301	–1,81331	–0,00093	–0,0009
5	0,180366	–1,8142		

Итерации были прекращены, когда выполнилось условие

$$\max\{\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}\}<0{,}001.$$

2.4. Модифицированный метод Ньютона

Пусть требуется решить систему нелинейных уравнений (СНУ) вида:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

При решении СНУ (4.1) с помощью модифицированного метода Ньютона также состоится итерационная последовательность, получаемая из схемы:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = x_1^{(k-1)} + \Delta x_1^{(k-1)}, \\ x_2^{(k)} = x_2^{(k-1)} + \Delta x_2^{(k-1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = x_n^{(k-1)} + \Delta x_n^{(k-1)}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Схема нахождения приращений переменных методом Ньютона

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k-1)} \\ \Delta x_2^{(k-1)} \\ \ldots \\ \Delta x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \\ -F_2(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -F_n(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \end{bmatrix}$$

В отличие от метода Ньютона в модифицированном методе при определении $\Delta x_i^{(k-1)}$ используется схема, у которой матрица при неизвестных остается постоянной – значения всех частных производных находятся только в точке $x^{(0)}$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) & \ldots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k-1)} \\ \Delta x_2^{(k-1)} \\ \ldots \\ \Delta x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \\ -F_2(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -F_n(x_1^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k-1)}) \end{bmatrix}.$$

Счет прекращается, если выполняется условие: $\max_i |\Delta x_i| < \varepsilon$.

Модифицированный метод Ньютона сходится медленнее, чем метод Ньютона.

Пример 4. Используя модифицированный метод Ньютона, решить следующую систему нелинейных уравнений с точностью до 0,001.

$$\begin{cases} \sin(x-0{,}5) - y = 1{,}5; \\ 2x - \cos y = 0{,}6. \end{cases}$$

Решение. Приращения переменных, согласно методу, будем находить по схеме:

$$\begin{bmatrix} \cos(x^{(0)}-0{,}5) & -1 \\ 2 & -\sin(y^{(0)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(x^{(k)}-0{,}5) - y^{(k)} - 1{,}5 \\ 2x^{(k)} - \cos y^{(k)} - 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Результаты вычислений помещены в табл. 4.

Таблица 4

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$	$\Delta x^{(k)}$	$\Delta y^{(k)}$
0	0,13	–1,8	0,059424	–0,00621
1	0,189424	–1,80621	–0,00436	–0,00346
2	0,185062	–1,80967	–0,00229	–0,00222
3	0,182773	–1,81189	–0,00147	–0,00141
4	0,181304	–1,8133	–0,00094	–0,0009
5	0,180369	–1,8142		