3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

К **нелинейным уравнениям** относятся алгебраические и трансцендентные уравнения

Алгебраическими уравнениями называются уравнения, которые можно преобразовать так, чтобы в левой части будет многочлен от неизвестных, а в правой – нуль, т.е.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0,$$

где a_i – коэффициенты (числа); n – степень многочлена.

Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), называются **трансцендентными**.

Примеры трансцендентных уравнений:

$$\sin(2x)\frac{5x+3}{0{,}5} - \mathrm{tg}(3x) = 0.$$

$$e^{-x} + 6\log_2(5-x) + 6\sin(x) = 0.$$

В общем случае нелинейные уравнения можно записать в виде:

$$\boldsymbol{f(x) = 0}, \qquad (3.1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$.

Всякое значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что $f(\xi) = 0$, называется **корнем уравнения** (3.1), или **нулем функции** $f(x)$.

Для численного решения нелинейных уравнений используют итерационные методы, т.е. методы последовательных приближений (уточнений) переменных, так как невозможно для всего многообразия таких уравнений построить прямой метод.

Итерационный процесс состоит в последовательном уточнении начального приближения x_0. Каждый такой шаг называется **итерацией**.

В результате итераций находится последовательность приближенных значений корня

$$x_1, x_2, \ldots, x_n .$$

Если

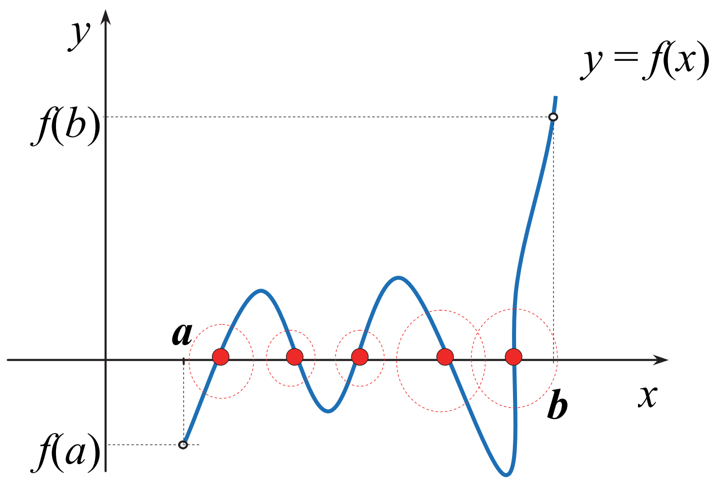
$$\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x_{\text{точное}} ,$$

то говорят, что **итерационный процесс сходится**.

Будем считать, что уравнение (3.1) имеет лишь **изолированные корни**, т.е. для каждого корня уравнения (3.1) существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

$$\boldsymbol{f(x) = 0}, \qquad (3.1)$$

где $f(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$.



$$\boldsymbol{f(x) = 0}, \qquad (3.1)$$

где $f(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$.

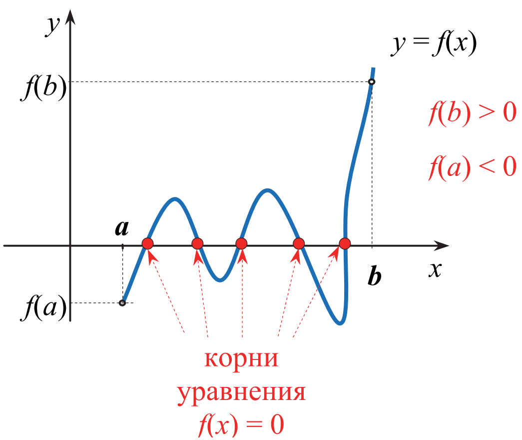
Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения (3.1) складывается из двух обязательных этапов:

1) **отделение корней**, т.е. установление возможно тесных отрезков $[\alpha, \beta]$, в которых содержится один и только один корень уравнения (3.1);

2) **уточнение приближенных корней**, т.е. доведение их до заданной степени точности.

Для отделения корней полезна известная теорема из курса математического анализа.

Теорема 3.1. *Если непрерывная функция* $f(x)$ *принимает значения разных знаков на концах отрезка* $[\alpha, \beta]$, *т.е.* $f(\alpha)f(\beta) < 0$, *то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения* $f(x) = 0$, *т.е. найдется хотя бы одно число* $\xi \in (\alpha, \beta)$ *такое, что* $f(\xi) = 0$.



Корень ξ заведомо будет единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (α, β), т.е. если $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$) при $\alpha < x < \beta$.

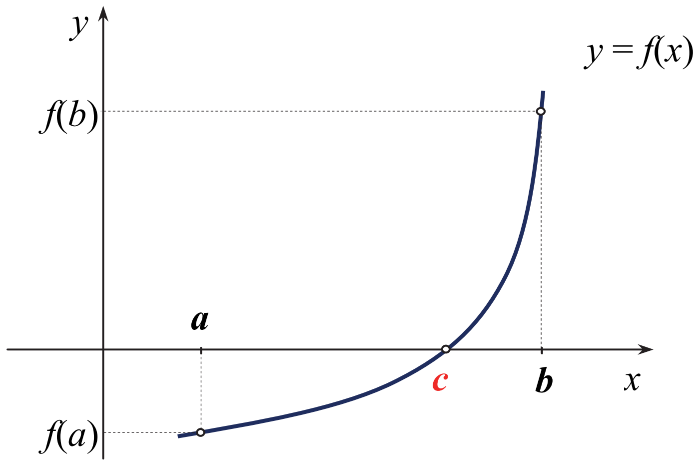
Процесс определения корней начинается с установления знаков функции $f(x)$ в граничных точках $x = a$ и $x = b$ области существования решения.

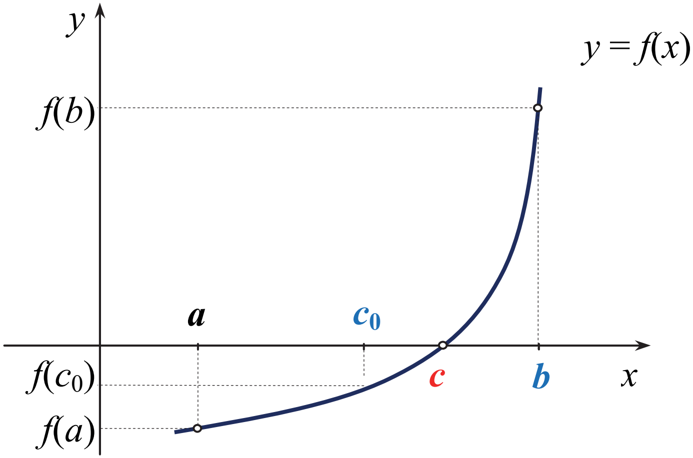
Затем определяются знаки функции $f(x)$ в промежуточных точках $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, выбор которых учитывает особенности функции $f(x)$. Если окажется, что $f(\alpha_k) f(\alpha_{k+1}) < 0$, то в силу Т. 3.1. в интервале (α_k, α_{k+1}) имеется корень уравнения $F(x) = 0$.

Определить отрезок $[\alpha, \beta]$, в котором содержится один и только один корень уравнения (3.1), можно графически.

3.1. Метод деления отрезков пополам

Пусть известен отрезок $[a, b]$, в котором расположено искомое точное значение корня $x = c$, т.е. $a < c < b$.





В качестве начального приближения корня c_0 принимаем середину этого отрезка, т.е.

$$c_0 = \frac{a+b}{2}.$$

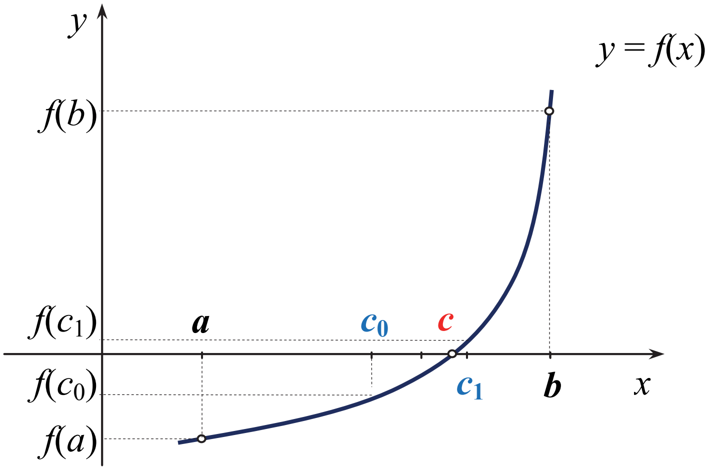
Далее исследуем значение функции $f(x)$ на концах отрезков

$$[a, c_0] \text{ и } [c_0, b],$$

т.е. в точках a, c_0, b.

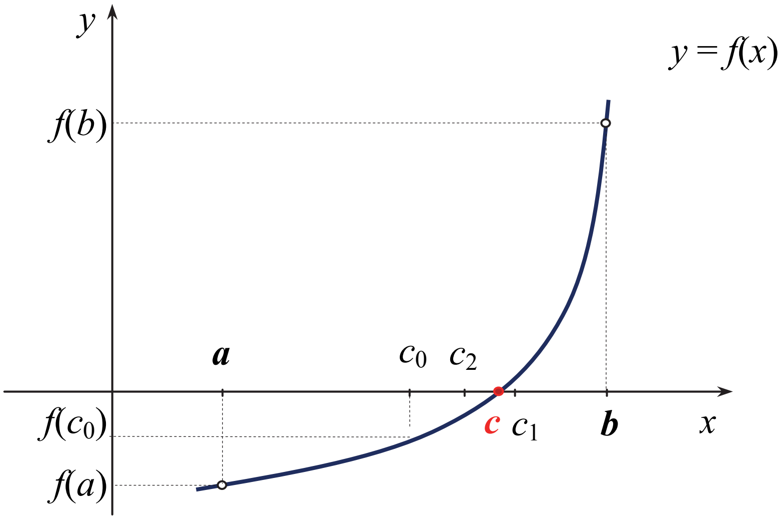
Так как в рассматриваемом случае $f(b)f(c_0) < 0$, то отрезок $[a, c_0]$ отбрасываем и поиск корня продолжаем только в отрезке $[c_0, b]$.

Следующее приближение: $c_1 = \dfrac{c_0 + b}{2}$.



При этом отрезок $[c_1, b]$ отбрасываем, поскольку $f(c_1) > 0$ и $f(b) > 0$, т.е. $c_0 < c < c_1$.

Аналогично находим другие приближения: $c_2 = \dfrac{c_0 + c_1}{2}$ и т.д.



Условия остановки итерационного процесса:

$$|f(c_n)| < \varepsilon \text{ или } |c_n - c_{n-1}| < \varepsilon.$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ с точностью до 0,0001 методом деления отрезка пополам.

Для отделения корня построим график функции $y = \sin 2x - \ln x$ (рис. 3.2). Из него следует, что корень уравнения принадлежит отрезку [1,3; 1,5].

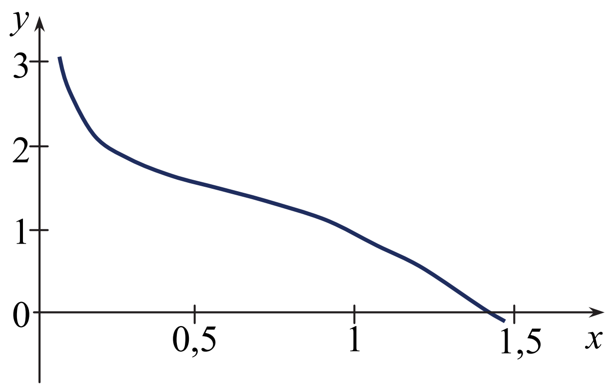


Рис. 3.2. График функции $y = \sin 2x - \ln x$

Процесс вычислений представлен в табл. 3.1.

Таблица 3.1

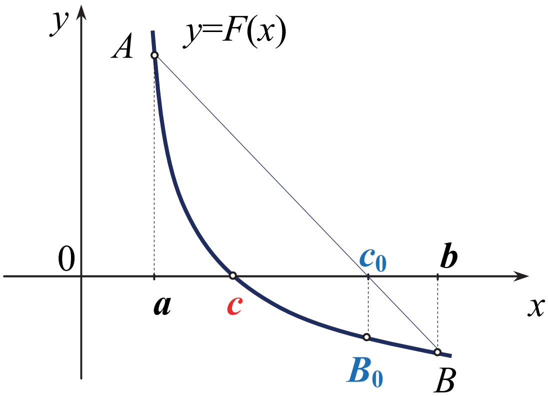
Номер итерации	Границы отрезка	Середина отрезка	Значения функции $f(x)$	Проверка условия: $\lvert f(x)\rvert < \varepsilon = 0{,}0001$
0	**1,3** 1,5	 **1,4**	0,253137 –0,26435 –0,00148	 не выполняется
1	1,3 **1,4**	 1,35	0,253137 –0,00148 0,127275	 не выполняется
2	1,35 **1,4**	 1,375	0,127275 –0,00148 0,063207	 не выполняется
3	1,375 **1,4**	 1,3875	0,063207 –0,00148 0,030933	 не выполняется
4	1,3875 **1,4**	 1,39375	0,030933 –0,00148 0,014741	 не выполняется

Номер итерации	Границы отрезка	Середина отрезка	Значения функции $f(x)$	Проверка условия: $\lvert f(x)\rvert < \varepsilon = 0{,}0001$
5	1,39375 **1,4**	 1,396875	0,014741 –0,00148 0,006633	 не выполняется
6	1,396875 **1,4**	 1,398438	0,006633 –0,00148 0,002575	 не выполняется
7	1,398438 **1,4**	 1,399219	0,002575 –0,00148 0,000546	 не выполняется
8	1,399219 **1,4**	 1,399609	0,000546 –0,00148 –0,00047	 не выполняется
9	1,399219 **1,399609**	 **1,399414**	0,000546 –0,00047 **0,0000385**	 **выполняется**

Как видно из табл. 3.1, итерации были завершены при $x = 1{,}399414$, так как заданная точность ($\varepsilon = 0{,}0001$) была достигнута.

3.2. Метод хорд

Этот метод также как и метод деления отрезков пополам, предназначен для уточнения корня на интервале $[a, b]$, на концах которого функция $F(x)$ принимает разные знаки. Очередное приближение теперь в отличие от метода бисекции берем не в середине отрезка, а в точке c_0 пересечения хорды, проведенной через точки $(a, F(a))$ и $(b, F(b))$ с осью абсцисс (рис. 3.3).



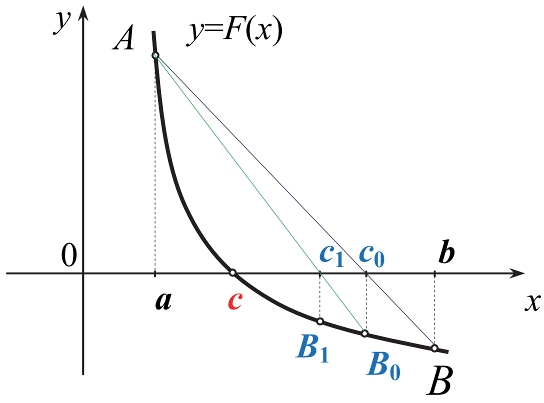
При $F(a) > 0$, $F(b) < 0$ начальное приближение определяется следующим образом:

$$c_0 = a - \frac{b-a}{F(b)-F(a)} F(a). \quad (3.2)$$

Точка c_0 разбивает отрезок $[a, b]$ на два отрезка:

$$[a, c_0] \text{ и } [c_0, b].$$

Так как функция меняет знак только на отрезке $[a, c_0]$ ($F(a) > 0$, $F(c_0) < 0$), уточнение корня продолжим только в этом отрезке.

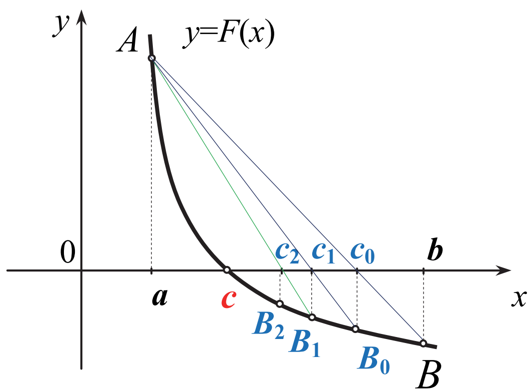


$$c_1 = a - \frac{c_0 - a}{F(c_0) - F(a)} F(a)$$

Точка c_1 разбивает отрезок $[a,\ c_0]$ на два отрезка:

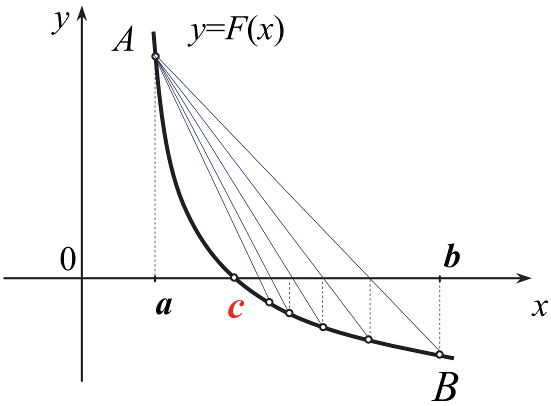
$$[a, c_1] \text{ и } [c_1, c_0].$$

Так как функция меняет знак только на отрезке $[a,\ c_1]$ $(F(a) > 0,\ F(c_1) < 0)$, уточнение корня продолжим только в этом отрезке.



$$c_2 = a - \frac{c_1 - a}{F(c_1) - F(a)} F(a)$$

и т.д.



Условия остановки

итерационного процесса:

$$|f(c_n)| < \varepsilon$$

или

$$|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$$

Пример 2. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ методом хорд с точностью до 0,0001.

Отрезок, содержащий корень уже известен (см. пример 1). Процесс вычислений представлен в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Номер итерации	Границы отрезка	Пересечение хорды с осью абсцисс	Значения функции $F(x)$	Проверка условия: $\|F(x)\|<\varepsilon=0{,}0001$
0	1,3		0,253137	
	1,5		–0,26435	
		1,397834	0,004142	не выполняется
1	1,397834		0,004142	
	1,5		–0,26435	
		1,39941	**0,0000479**	**выполняется**

3.3. Метод Ньютона (касательных)

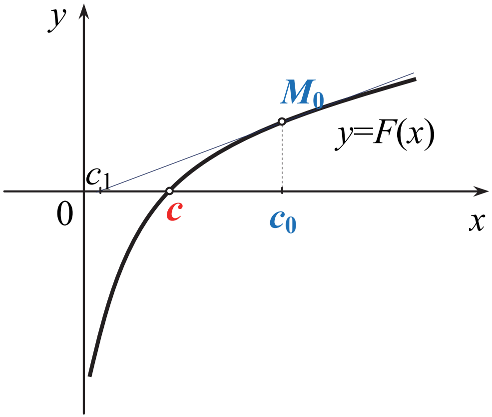
Отличие метода касательных от метода хорд состоит в том, что на k-й итерации вместо хорды проводится касательная к кривой $y = f(x)$ в точке с координатами $(c_k, f(c_k))$, и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (эта точка будет следующим приближением корня). При этом не обязательно задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения $y = f(x)$, а достаточно лишь найти некоторое начальное приближение корня $x = c_0$. Его следует выбрать как можно точнее, так как при неудачном задании метод может вообще не сойтись.

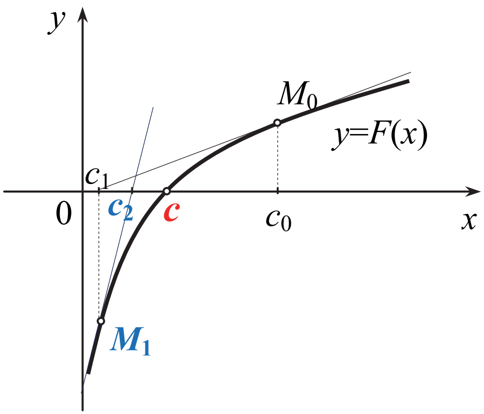
Вычисления производятся по формуле:

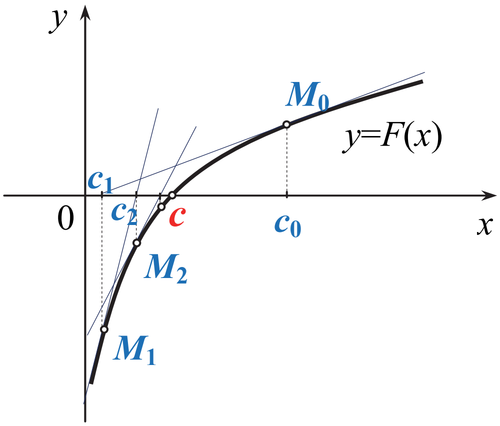
$$c_{n+1} = c_n - f(c_n) / f'(c_n). \tag{3.3}$$

при условии, что $f'(c_n) \neq 0$.

Условия остановки итерационного процесса: $|f(c_n)| < \varepsilon$ или $|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$







$$c_{n+1} = c_n - f(c_n)/f'(c_n), \quad (3.3)$$

Пример 3. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ методом Ньютона с точностью до 0,0001.

В качестве начального приближения корня возьмем $x = 1,3$ (см. рис. 3.2). Решение представлено в табл. 3.3.

Таблица 3.3

Номер приближения корня, i	Приближение корня, c_i	Значение функции, $f(c_i)$	Проверка условия: $\|f(x)\|<\varepsilon=0,0001$
0	1,3	0,253137	не выполняется
1	1,401948	–0,00655	не выполняется
2	**1,39943**	**–0,000003**	**выполняется**

3.4. Модифицированный метод Ньютона (касательных)

Метод Ньютона

$$c_{n+1} = c_n - f(c_n) / f'(c_n). \quad (3.3)$$

Если производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a, b]$, то можно положить:

$$f'(c_n) \approx f'(c_0).$$

Тогда следующее приближение вычисляется по формуле:

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_0)} \quad (n = 0,1,...). \qquad (3.4)$$

Геометрически этот способ означает, что мы заменяем касательную в точках $M_n[x_n, f(x_n)]$ прямыми, параллельными касательной к кривой $y = f(x)$, в ее фиксированной точке $M_0[x_0, f(x_0)]$(рис. 3.5).

Модифицированный метод Ньютона

$$c_{n+1} = c_n - \frac{f(c_n)}{f'(c_0)} \quad (n = 0,1,\ldots). \qquad (3.4)$$

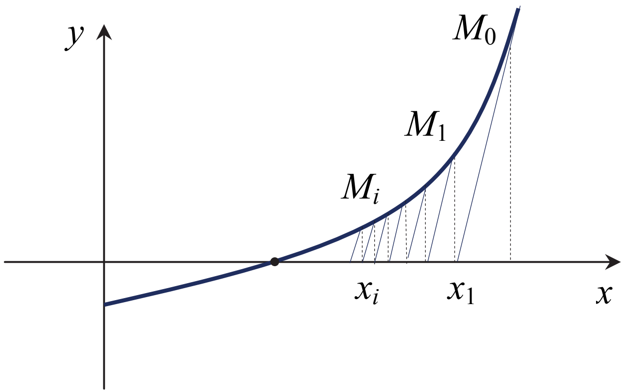


Рис. 3.5. Решение нелинейных уравнений модифицированным методом Ньютона

Пример 4. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ с помощью модифицированного метода Ньютона с точностью до 0,0001.

Начальное приближение возьмем из примера 3. Следовательно, имеем $f'(c_0) = -2{,}48301$ (см. табл. 3.3). Этапы решения представлены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Номер приближения корня, i	Приближение корня, c_i	Значение функции, $f(c_i)$	Проверка условия: $\lvert f(x)\rvert<\varepsilon=0{,}0001$?
0	1,3	0,253137	не выполняется
1	1,401948	–0,00655	не выполняется
2	1,399311	0,000307	не выполняется
3	**1,399434**	**–0,00005**	**выполняется**

3.5. Метод секущих

Метод Ньютона

$$c_{n+1} = c_n - f(c_n)/f'(c_n). \quad (3.3)$$

Если итерации x_k и x_{k+1} расположены достаточно близко друг к другу, то производную $f'(x_k)$ в алгоритме Ньютона можно заменить ее приближенным значением в виде отношения приращения функции $\Delta f = f(x_k) - f(x_{k-1})$ к приращению аргумента $\Delta x = x_k - x_{k-1}$.

Формула метода секущих:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k). \qquad (3.5)$$

Геометрический смысл такого изменения алгоритма Ньютона в том, что вместо касательных строятся секущие (рис. 3.6).

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k). \quad (3.5)$$

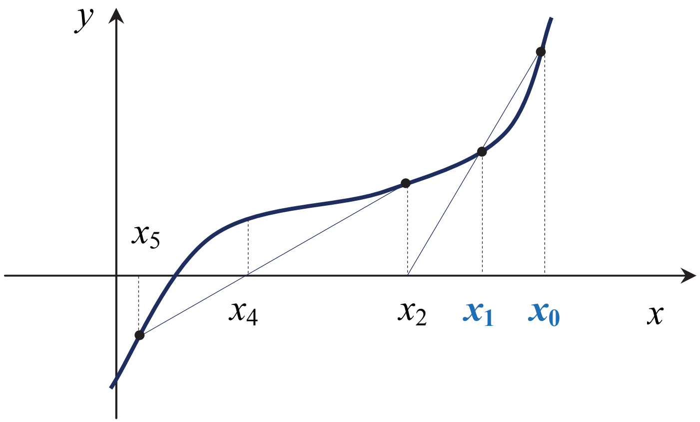


Рис. 3.6. Решение нелинейных уравнений методом секущих

Для начала итерационного процесса необходимо задать два начальных приближения x_0 и x_1. Каждое новое приближение корня получается по выше формуле (3.5).

Условия остановки итерационного процесса:

$$|f(c_n)| < \varepsilon \text{ или } |c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$$

Пример 5. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ методом секущих с точностью до 0,0001.

Здесь, в отличие от методов Ньютона, надо задать в качестве начального приближения две точки. Пусть это будут точки $x_0 = 1{,}3$, $x_1 = 1{,}31$, они обе очень близки к корню (см. рис. 3.2). Результаты представлены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Номер приближения корня, i	Приближение корня, c_i	Значение функции, $f(c_i)$	Проверка условия: $\lvert f(x)\rvert<\varepsilon=0{,}0001$
0	1,3	0,253137	не выполняется
1	1,31	0,228235	не выполняется
2	1,401651	–0,00578	не выполняется
3	1,399389	0,000104	не выполняется
4	**1,399429**	**0,00000004**	**выполняется**

3.6. Метод простых итераций

Пусть задано нелинейное уравнение

$$f(x) = 0, \qquad (3.1)$$

где функция $f(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$.

Для начала процесса итераций уравнение (3.1) необходимо привести к виду:

$$x = \varphi(x). \qquad (3.6)$$

Тогда после задания начального приближения корня x_0 итерации проводятся по схеме:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (3.7)$$

Если существует предел $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, т.е. последовательность приближений x_0, x_1, x_2, …, x_n сходится, то ξ является корнем уравнения (3.1) и может быть вычислен с любой степенью точности.

Условие остановки итераций: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, где ε – точность.

Для сходимости итерационного процесса на функцию $\varphi(x)$ накладываются следующие условия:

1) $\varphi(x)$ должна быть определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, содержащем корень;

2) значения функции $\varphi(x)$ должны принадлежать отрезку $[a, b]$ для любых значений аргумента $x \in [a, b]$;

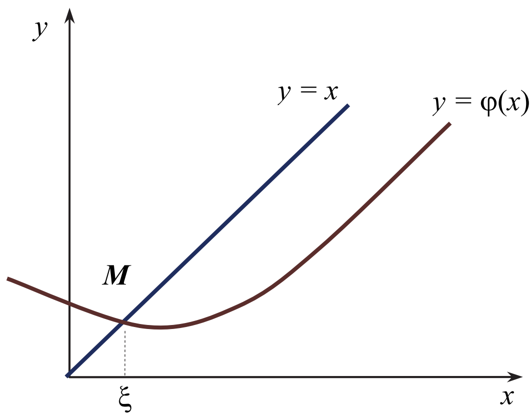
3) $|\varphi'(x)| < 1$ для всех $x \in [a, b]$.

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (3.7)$$

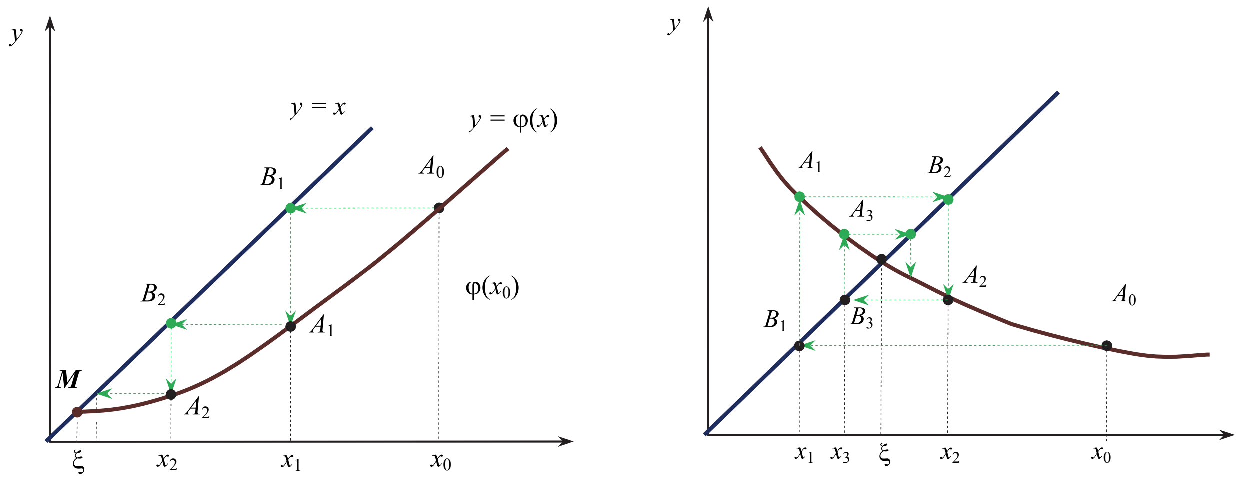
Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом. Построим на плоскости xOy графики функций

$$y = x \text{ и } y = \varphi(x).$$

Каждый действительный корень ξ уравнения (3.7) является абсциссой точки пересечения M кривой $y = \varphi(x)$ с прямой $y = x$ (рис. 3.7).



Сходящиеся процессы ($|\varphi'(x)|<1$)

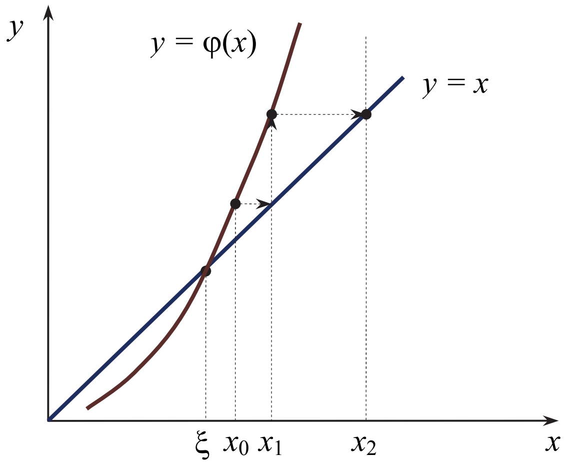


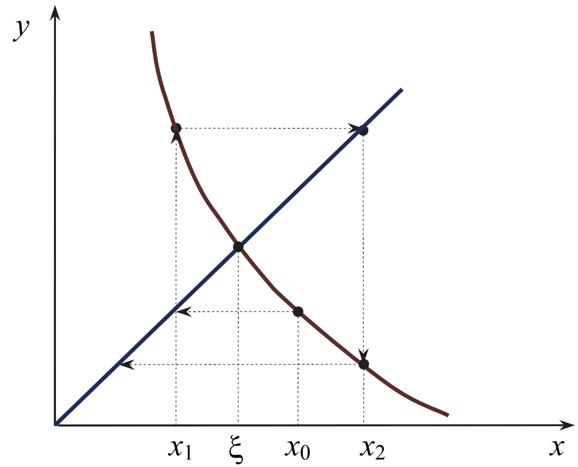
$0 < \varphi'(x) < 1$ **$-1 < \varphi'(x) < 0$**

Рис. 3.7. Геометрическая интерпретация

решения нелинейных уравнений методов интеграций

Несходящиеся процессы ($|\varphi'(x)| > 1$)





$\varphi'(x) > 1$

$\varphi'(x) < -1$

Рис. 3.8. Геометрическая интерпретация несходящегося процесса:

Для сходимости итерационного процесса полезно знать следующие специальные приемы.

1. Уравнение $f(x) = 0$ умножаем на m и к обеим частям прибавляем x:

$$x + mf(x) = x \text{ или } x = x - mf(x),$$

где m – отличная от нуля константа. Тогда можно обозначить:

$$\varphi(x) = x - mf(x).$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$\varphi'(x) = 1 - mf'(x).$$

Тогда для выполнения третьего условия достаточно подобрать m так, чтобы для всех x отрезка $[a, b]$ выполнялось условие:

$$0 < |mf'(x)| < 1.$$

2. Пусть уравнение $f(x) = 0$ удалось привести какими-либо эквивалентными преобразованиями к виду $x = \varphi(x)$, однако оказалось, что для всех $x \in [a, b]$ $|\varphi'(x)| > 1$. Тогда вместо функции $y = \varphi(x)$ рассмотрим функцию $x = \psi(y)$, симметричную ей относительно прямой $y = x$.

По свойству производных обратных функций на отрезке $[a, b]$ имеет место соотношение

$$|\psi'(x)| = \frac{1}{|\varphi'(x)|} < 1.$$

Причем уравнение $x = \psi(x)$ имеет тот же корень, что и $x = \varphi(x)$.

Пример 6. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ методом простых итераций с точностью до 0,0001.

Приведем заданное уравнение к виду $x = \varphi(x)$. Для этого воспользуемся первым способом преобразования.

$$x = x - m(\sin 2x - \ln x)\text{, или } \varphi(x) = x - m(\sin 2x - \ln x)\,.$$

Подберем число m, так чтобы на отрезке [1,3; 1,5] (см. пример 1, этап отделения корня) выполнялось условие

$$|\,\varphi'(x)\,| = \left|1 - m(2\cos(2x) - 1/x)\right| < 1\,.$$

Например, при $m = -1/3$ это неравенство верно. Тогда

$$\varphi(x) = x + 1/3(\sin 2x - \ln x)\,,$$

а схема итераций будет иметь вид

$$x_k = x_{k-1} + 1/3(\sin 2x_{k-1} - \ln x_{k-1})\,,$$

где x_k – k-е приближение корня, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Результаты приближений корня, начиная с нулевого $x_0 = 1{,}3$, представлены в табл. 3.6.

Таблица 3.6

Номер итерации, k	Приближение корня, x_k	Проверка условия: $\lvert x_k - x_{k-1} \rvert < \varepsilon = 0{,}0001$
0	1,3	
1	1,384379	не выполняется
2	1,397381	не выполняется
3	1,399154	не выполняется
4	1,399392	не выполняется
5	**1,399424**	**выполняется**