2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

2.2. Итерационные методы решения СЛАУ

Итерационные методы позволяют найти приближенное решение системы путем построения последовательности приближений (итераций), начиная с некоторого начального приближения. Само приближенное решение является результатом вычислений, полученным после конечного числа итераций.

Уточнение решения, полученного одним из прямых методов

Решения, принимаемые с помощью прямых методов, обычно содержат погрешности, вызванные округлениями при выполнении операций над числами с плавающей запятой на ЭВМ с ограниченным числом разрядов.

В ряде случаев эти погрешности могут быть значительными, и необходимо найти способ их уменьшения.

Рассмотрим один из методов, позволяющий уточнить решение, полученное с помощью прямого метода.

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

где x_i – неизвестные переменные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных (числа); b_j – свободные члены (числа).

Пусть с помощью некоторого прямого метода вычислены приближенные значения неизвестных

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}.$$

Подставляя это решение в левые части системы **(2.1)**, получаем некоторые значения $b_i^{(0)}$, отличные от b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad \mathbf{(2.1)}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(0)} = b_1^{(0)}, \\ a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(0)} = b_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(0)} = b_n^{(0)}. \end{cases} \qquad \mathbf{(2.19)}$$

Введем обозначения:

$\varepsilon_i^{(0)}$ – погрешности значений неизвестных;

$r_i^{(0)}$ – невязки,

т.е.

$$\varepsilon_i^{(0)} = x_i - x_i^{(0)}, \quad r_i^{(0)} = b_i - b_i^{(0)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \mathbf{(2.20)}$$

Вычитая каждое уравнение системы **(2.19)** из соответствующего уравнения системы **(2.1)**, с учетом обозначений **(2.20)** получаем

$$\begin{cases} a_{11}\varepsilon_1^{(0)} + a_{12}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}\varepsilon_n^{(0)} = r_1^{(0)}, \\ a_{21}\varepsilon_1^{(0)} + a_{22}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}\varepsilon_n^{(0)} = r_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\varepsilon_1^{(0)} + a_{n2}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{nn}\varepsilon_n^{(0)} = r_n^{(0)}. \end{cases} \qquad \textbf{(2.21)}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(0)} + a_{12}x_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}x_n^{(0)} = b_1^{(0)}, \\ a_{21}x_1^{(0)} + a_{22}x_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}x_n^{(0)} = b_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^{(0)} + a_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(0)} = b_n^{(0)}. \end{cases} \qquad \textbf{(2.19)}$$

$$\varepsilon_i^{(0)} = x_i - x_i^{(0)}, \quad r_i^{(0)} = b_i - b_i^{(0)}, \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Решая эту систему, находим значения погрешностей $\varepsilon_i^{(0)}$, которые используем в качестве поправок к решению. Следующие приближения неизвестных имеют вид

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \varepsilon_1^{(0)}, \quad x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \varepsilon_2^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_n^{(1)} = x_n^{(0)} + \varepsilon_n^{(0)}.$$

Таким же способом можно найти новые поправки к решению $\varepsilon_i^{(1)}$ и следующие приближения

$$x_1^{(2)} = x_1^{(1)} + \varepsilon_1^{(1)}, \quad x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \varepsilon_2^{(1)}, \quad \ldots, \quad x_n^{(2)} = x_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(1)}.$$

и т.д.

Процесс продолжается до тех пор, пока все очередные значения погрешностей (поправок) ε_i не станут достаточно малыми.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad \textbf{(2.1)}$$

$$\begin{cases} a_{11}\varepsilon_1^{(0)} + a_{12}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{1n}\varepsilon_n^{(0)} = r_1^{(0)}, \\ a_{21}\varepsilon_1^{(0)} + a_{22}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{2n}\varepsilon_n^{(0)} = r_2^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\varepsilon_1^{(0)} + a_{n2}\varepsilon_2^{(0)} + \ldots + a_{nn}\varepsilon_n^{(0)} = r_n^{(0)}. \end{cases} \quad \textbf{(2.21)}$$

Рассмотренный процесс уточнения решения представляет собой фактически итерационный метод решения системы линейных уравнений.

При этом заметим, что для нахождения очередного приближения, т.е. на каждой итерации, решаются системы уравнений вида **(2.21)** с одной и той же матрицей, являющейся матрицей исходной системы **(2.1)**, при разных правых частях.

Это позволяет строить экономические алгоритмы.

Например, при использовании метода Гаусса сокращается объем вычислений на этапе прямого хода.

Решение систем уравнений с помощью рассмотренного метода, а также при использовании других итерационных методов сводится к следующему:

1. *Вводятся исходные данные*. Необходимо также задать начальные приближения значений неизвестных, которые либо вводятся пользователем, либо вычисляются каким-либо способом заранее.

2. *Организуется циклический вычислительный процесс*, каждый цикл которого представляет собой одну итерацию. В результате каждой итерации получаются новые значения неизвестных. При малом (с заданной допустимой погрешностью) изменении этих значений на двух последовательных итерациях процесс прекращается, и происходит вывод значений неизвестных, полученных на последней итерации.

Заметим, что в этой схеме не предусмотрен случай отсутствия сходимости. Для предотвращения непроизвольных затрат машинного времени в алгоритм вводят счетчик числа итераций и при достижении им некоторого заданного значения счет прекращается.

2.2.1. Метод простых итераций

Пусть задана СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где x_i – неизвестные переменные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных (числа); b_j – свободные члены (числа).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad \textbf{(2.1)}$$

С помощью элементарных преобразований представим систему **(2.1)** к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n, \end{cases} \quad \textbf{(2.20)}$$

при этом все коэффициенты α_{ii} могут равняться 0, т.е. **(2.1)** можно привести и к такому виду:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \cdot x_1 + \gamma_{12}x_2 + \ldots + \gamma_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \gamma_{21}x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + \gamma_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \gamma_{n1}x_1 + \gamma_{n2}x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n + \beta_n, \end{cases} \quad \textbf{(2.20*)}$$

Зададим нулевые (*начальные*) приближения неизвестных x.

Часто (*хотя и не обязательно*) это столбец свободных членов, т.е.

$$x_1^{(0)} = b_1,\ x_2^{(0)} = b_2,\ \ldots,\ x_n^{(0)} = b_n.$$

Если схема сходящаяся, то для любых начальных приближений процесс итераций за конечное число шагов сойдется к решению, точность которое будет не больше заданного значения ε.

Условия сходимости процесса итераций рассмотрим позже.

Начальные приближения неизвестных подставляем в правую часть системы **(2.20)**. Тогда следующее (**первое**) приближение переменных находятся так:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.20)}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \alpha_{11}x_1^{(0)} + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(0)} + \beta_1, \\ x_2^{(1)} = \alpha_{21}x_1^{(0)} + \alpha_{22}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(0)} + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = \alpha_{n1}x_1^{(0)} + \alpha_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(0)} + \beta_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.21)}$$

Второе приближение переменных находится с использованием найденных первых приближений:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \alpha_{11}x_1^{(1)} + \alpha_{12}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(1)} + \beta_1, \\ x_2^{(2)} = \alpha_{21}x_1^{(1)} + \alpha_{22}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(1)} + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(2)} = \alpha_{n1}x_1^{(1)} + \alpha_{n2}x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(1)} + \beta_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.22)}$$

Таким образом, **схема процесса итераций** будет следующей:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11} x_1^{(k)} + \alpha_{12} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n} x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21} x_1^{(k)} + \alpha_{22} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n} x_n^{(k)} + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1} x_1^{(k)} + \alpha_{n2} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases} \qquad \textbf{(2.23)}$$

Условия остановки процесса уточнения корня:

$$\max_{1 \le i \le n} | x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} | \le \varepsilon,$$

где k – номер приближения; ε – заданная точность вычислений.

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \quad \mathbf{(2.20)}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \dots + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases} \quad \mathbf{(2.23)}$$

систему **(2.20)** можно записать в матричной форме

$$x = \beta + \alpha x .$$

Если в качестве нулевого приближения взят столбец свободных членов $x^{(0)} = \beta$, то любое (k+1)-е приближение вычисляется по формуле

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) .$$

Если последовательность приближений

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$$

имеет предел

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{(k)},$$

то этот предел является решением системы **(2.20)**.

В самом деле, переходя к пределу в равенстве **(2.23)**, будем иметь:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$$

или

$$x^* = \beta + \alpha x^*,$$

т.е. предельный вектор x^* является решением системы **(2.20)**, а следовательно, и системы **(2.1)**.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad \textbf{(2.1)}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.20)}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k)} + \alpha_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.23)}$$

2.2.2. Условие сходимости процесса итерации

Например, пусть дана система трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ &3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2; \\ &x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.24)}$$

Перепишем эту систему в виде (2.24)

$$\begin{aligned} &x_1 = 3x_1 - x_2 - x_3 - 1; \\ &x_2 = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2; \\ &x_3 = x_1 - x_2 - 3. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.25)}$$

Примем теперь за начальное приближение, например, точку ***A*(0; 0; 0)** трехмерного пространства, подставим ее координаты в правую часть системы **(2.25)** и произведем вычисления. Получим координаты новой точки ***B*(–1; –2; –3)**. Используя теперь эту точку как начальную, можно получить следующую точку ***C*(1; –2; –2)** и т.д.

Оказывается, что при определенных условиях такая последовательность точек сходится, и ее предел является решением системы уравнений **(2.25)**, следовательно, системы **(2.24)**.

Геометрически итерационный процесс, в частности, можно интерпретировать следующим образом.

Если рассматривать расстояния

$$\rho(A,B),\ \rho(B,C),\ \rho(C,D),\ \ldots$$

между точками последовательных приближений данного примера, то, очевидно, что чем ближе точка последующего приближения к предыдущей точке, тем меньше расстояние между ними.

Пусть точное решение соответствует точке $W(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Подстановка этих значений в правую часть системы **(2.25)** приведет к тем же самым значениям левой части

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_1 - x_2 - x_3 - 1; \\ x_2 &= 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2; \\ x_3 &= x_1 - x_2 - 3. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.25)}$$

$$3x_1^* - x_2^* - x_3^* - 1 = x_1^*;$$
$$3x_1^* - 3x_2^* + x_3^* - 2 = x_2^*;$$
$$x_1^* - x_2^* - 3 = x_3^*,$$

т.е. соответствующее расстояние окажется равным нулю.

Поэтому последовательность расстояний между точками итераций должна стремиться к нулю. В связи с этим вспомним некоторые сведения из математического анализа.

См. пример в Excel

Пусть правая часть итерационной системы определяет отображение F:

$$F : y_i = F(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2.26}$$

преобразующее точку n-мерного векторного пространства

$$x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

в точку того же пространства

$$y(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Функция $\rho(x, y)$, определяющая расстояние между точками X и Y, называется **метрикой множества** X, если выполнены условия

$$\rho(x, y) \geq 0;$$

$\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

$$\rho(x, y) = \rho(y, x);$$

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Множество X с введенной в нем метрикой становится **метрическим пространством**.

Последовательность точек метрического пространства называется **фундаментальной**, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число N, что для всех $m, n > N$ выполняется неравенство $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Пространство называется **полным**, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

Пусть F – отображение, действующее в метрическом пространстве E с метрикой ρ; x и y – точки пространства E, а Fx, Fy – образы этих точек.

Отображение F пространства E в себя называется **сжимающим отображением**, если существует такое число α $(0 < \alpha < 1)$, что для любых точек $x, y \in E$ выполняется неравенство:

$$\rho(Fx, Fy) \le \alpha\rho(x, y). \qquad \textbf{(2.27)}$$

Для исследования вопроса о решении системы линейных уравнений методом итераций исключительно важное значение имеет следующая теорема.

Принцип сжимающих отображений

Если F – сжимающее отображение, определенное в полном метрическом пространстве, то существует единственная неподвижная точка x^*, *такая, что* $x^* = Fx^*$. *При этом итерационная последовательность, построенная для отображения F с любым начальным членом* $x^{(0)}$, *сходится к x.*

Оценка расстояния между неподвижной точкой отражения и приближением $x^{(k)}$ дается формулой

$$\rho\left(x, x^{(k)}\right) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho\left(x^{(0)}, x^{(k)}\right). \qquad \textbf{(2.28)}$$

Эта оценка появляется в процессе доказательства принципа сжимающих отображений. Приняв (k–1)-е приближение за нулевое (k = 1), получаем еще одно полезное для приложений неравенство:

$$\rho\left(x^*, x^{(k)}\right) \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} \rho\left(x^{(k-1)}, x^{(k)}\right), \qquad \textbf{(2.29)}$$

где α – множитель из условия сжимаемости **(2.28)**.

Таким образом, используя принципы сжимающих отображений, можно заключить, что для решения системы **(2.20)** методом итераций достаточно установить, что отображение F, заданное соотношением

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.20)}$$

$$F : y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \quad (i = \overline{1,n}), \qquad (2.30)$$

является сжимающим.

В этом случае решение СЛАУ может быть получено с любой точностью при произвольном начальном приближении.

Рассмотрим условия, при которых отображение **(2.30)** будет сжимающим.

$$F: y_i = \sum_{j=1}^{h} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \quad \textbf{(2.30)}$$

$$(i = \overline{1, n})$$

Пусть $x(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y(y_1, y_2, ..., y_n)$ – две точки n-мерного пространства.

При практическом применении метода итерации удобно рассматривать СЛАУ с одной из следующих метрик:

$$1)\ \rho_1(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|; \quad \textbf{(2.31)}$$

$$2)\ \rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|; \quad \textbf{(2.32)}$$

$$3)\ \rho_3(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,. \quad \textbf{(2.33)}$$

Сформулируем условия сжимаемости отображения **(2.20)** в пространстве с метриками ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Эти условия выражаются в конечном итоге через коэффициенты при неизвестных СЛАУ.

Заметим, что эти коэффициенты собственно являются частными производными:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1,n}), \qquad \textbf{(2.34)}$$

где F_i – правая часть соответствующего уравнения системы **(2.20).**

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$F : y_i = \sum_{j=1}^{h} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \qquad \textbf{(2.30)}$$

$(i = \overline{1,n})$

Рассматриваемые метрики:

1) $\rho_1(x,y) = \max\limits_{1 \le i \le n} | x_i - y_i |$; **(2.31)**

2) $\rho_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$; **(2.32)**

3) $\rho_3(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. **(2.33)**

*Выражение **(2.34)** полезно иметь в виду при исследовании систем нелинейных уравнений и других приложений с итерационными процессами.*

Итак, для того, чтобы отображение F, заданное в метрическом пространстве уравнениями **(2.30)**, было сжимающим отображением, достаточно выполнения одного из условий:

а) **в пространстве с метрикой** ρ_1:

$$a = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \qquad \textbf{(2.35)}$$

т.е. *максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2.20), взятых по строкам, должна быть меньше единицы*;

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$F: y_i = \sum_{j=1}^{h} \alpha_{ij}x_j + \beta_i \qquad \textbf{(2.30)}$$

$(i = \overline{1,n})$

Рассматриваемые метрики:

1) $\rho_1(x,y) = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$; **(2.31)**

2) $\rho_2(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$; **(2.32)**

3) $\rho_3(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. **(2.33)**

б) **в пространстве с метрикой ρ_2:**

$$a = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1, \qquad \textbf{(2.36)}$$

т.е. *максимальная из сумм модулей коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2.20), взятых по столбцам, должна быть меньше единицы*;

в) **в пространстве с метрикой ρ_3:**

$$a = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{\,2}} < 1, \qquad \textbf{(2.37)}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \qquad \textbf{(2.20)}$$

$$F: y_i = \sum_{j=1}^{h} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \qquad \textbf{(2.30)}$$

$(i = \overline{1, n})$

Рассматриваемые метрики:

1) $\rho_1(x, y) = \max_{1 \le i \le n} | x_i - y_i |$; **(2.31)**

2) $\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} | x_i - y_i |$; **(2.32)**

3) $\rho_3(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. **(2.33)**

т.е. *сумма квадратов всех коэффициентов при неизвестных в правой части системы (2.20) должна быть меньше единицы*.

Каждое из условий **(2.35)–(2.37)** является **достаточным(!)** для того, чтобы отображение **(2.30)** было сжимающим.

Условие **(2.36)** является также необходимым для сжимаемости отображения **(2.30)** (в смысле метрики ρ_2).

$$F : y_i = \sum_{j=1}^{h} \alpha_{ij} x_j + \beta_i \quad \textbf{(2.30)}$$

$$(i = \overline{1, n})$$

Достаточные условия сходимости:

1) $a = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$; **(2.35)**

2) $a = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$; **(2.36)**

3) $a = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{2}} < 1$. **(2.37)**

Пример. Методом простых итераций решить систему линейных уравнений с точностью до 0,0001.

$$\begin{cases} 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41; \\ 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44; \\ 3{,}92x_1 - 7{,}99x_2 + 8{,}37x_3 = 55{,}56. \end{cases}$$

Решение.

Сначала построим сходящуюся схему итераций. Для этого сначала получим систему с преобладающими диагональными коэффициентами, поэтому в качестве первого уравнения возьмем второе, третьего – первое, а второго – сумму первого с третьим. Получим следующую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44; \\ 6{,}26x_1 - 12{,}20x_2 - 3{,}24x_3 = 69{,}97; \\ 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44; \\ 6{,}26x_1 - 12{,}20x_2 - 3{,}24x_3 = 69{,}97; \\ 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41. \end{cases}$$

Достаточные условия сходимости:

1) $a = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\,\alpha_{ij}\,| < 1$; **(2.35)**

2) $a = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\,\alpha_{ij}\,| < 1$; **(2.36)**

3) $a = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}^{\;2}} < 1$. **(2.37)**

Далее, разделим каждое уравнение на его диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}6492537x_2 - 0{,}033581x_3 - 0{,}800995; \\ x_2 = 0{,}5131148x_1 - 0{,}2655738x_3 - 5{,}7352459; \\ x_3 = 0{,}2015504x_1 - 0{,}3626184x_2 - 1{,}2411714. \end{cases}$$

Так как для полученной системы выполняется второе условие сходимости (т.е. процесс итераций будет сходиться), то ее можно использовать для построения схемы приближения неизвестных, которая для данной системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}6492537\,x_2^{(k)} - 0{,}033581x_3^{(k)} - 0{,}800995; \\ x_2^{(k+1)} = 0{,}5131148\,x_1^{(k)} - 0{,}2655738\,x_3^{(k)} - 5{,}7352459; \\ x_3^{(k+1)} = 0{,}2015504\,x_1^{(k)} - 0{,}3626184\,x_2^{(k)} - 1{,}2411714. \end{cases}$$

Пусть начальные приближения неизвестных равны соответственно:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}6492537x_2^{(k)} - 0{,}033581x_3^{(k)} - 0{,}800995; \\ x_2^{(k+1)} = 0{,}5131148x_1^{(k)} - 0{,}2655738x_3^{(k)} - 5{,}7352459; \\ x_3^{(k+1)} = 0{,}2015504x_1^{(k)} - 0{,}3626184x_2^{(k)} - 1{,}2411714. \end{cases}$$

$$x_1^{(0)} = 2{,}3\,,\ x_2^{(0)} = -4{,}8\,,\ x_3^{(0)} = 1\,.$$

Результаты вычислений помещены в следующей таблице.

Номер итерации, k	Значения переменных после k-й итерации			Погрешность приближения после k-й итерации		
	x_1	x_2	x_3	$\lvert x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} \rvert$
0	2,30000	–4,8000	1,000	–	–	–
1	2,28184	–4,82066	0,96296	0,01816	0,02066	0,03704
2	2,29650	–4,82014	0,96679	0,01465	0,00052	0,00383
3	2,29603	–4,81364	0,96956	0,00047	0,00650	0,00277
4	2,29172	–4,81461	0,96711	0,00431	0,00097	0,00245
5	2,29243	–4,81617	0,96659	0,00071	0,00156	0,00052
6	2,29346	–4,81567	0,96730	0,00103	0,00050	0,00071
7	2,29311	–4,81533	0,96733	0,00035	0,00034	0,00003

Номер итера-ции, k	Значения переменных после k-й итерации			Погрешность приближения после k-й итерации		
	x_1	x_2	x_3	$\lvert x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} \rvert$
8	2,29289	–4,81551	0,96713	0,00022	0,00019	0,00019
9	2,29302	–4,81558	0,96715	0,00013	0,00006	0,00002
10	2,29306	–4,81552	0,96715	0,00004	0,00006	0,00005

Из таблицы видно, что итерации были завершены, когда $\max\limits_i \lvert x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \rvert < 0{,}0001$.

2.2.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя можно рассматривать как некоторую модификацию метода итераций. Метод применяется для решения СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где x_i – неизвестные переменные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных (числа); b_j – свободные члены (числа).

В методе Зейделя также систему **(2.1)** с помощью элементарных преобразований необходимо представить к ввиду, удобному для построения процесса итераций:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad \textbf{(2.1)}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.20)}$$

Так же, как и в методе простых итераций, в методе Зейделя при использовании сходящейся схему, начальные приближения переменных x выбираются произвольно.

В чем же заключается модификация метода простых итераций?

Для ответа на этот вопрос еще раз рассмотрим **схему процесса итераций** предыдущего метода:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, \\ x_3^{(k+1)} = a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{33}x_2^{(k)} \ldots + a_{3n}x_n^{(k)} + b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{33}x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k)} + b_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.23)}$$

Согласно этой схеме:

1) для вычисления (k+1)-го приближения переменной x_1 ($x_1^{(k+1)}$) используются k-е приближения всех переменных – $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$;

2) для вычисления $x_2^{(k+1)}$ используются k-е приближения всех переменных – $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$ (хотя на этом этапе уже известно более лучшее приближение переменной x_1, а именно $x_1^{(k+1)}$) и т.д.

Основная идея метода Зейделя заключается в том, что при вычислении (k+1)-го приближения неизвестной x_i используются уже вычисленные (k+1)-е приближения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$, и k-е приближения остальных переменных $x_i, x_{i+1}, ..., x_n$

Схема метода простых итераций:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11} x_1^{(k)} + \alpha_{12} x_2^{(k)} + ... + \alpha_{1n} x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21} x_1^{(k)} + \alpha_{22} x_2^{(k)} + ... + \alpha_{2n} x_n^{(k)} + \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1} x_1^{(k)} + \alpha_{n2} x_2^{(k)} + ... + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.23)}$$

Схема процесса итераций методом Зейделя выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11} x_1^{(k)} + a_{12} x_2^{(k)} + a_{13} x_3^{(k)} ... + a_{1n} x_n^{(k)} + b_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21} x_1^{(k+1)} + a_{22} x_2^{(k)} + a_{23} x_3^{(k)} ... + a_{2n} x_n^{(k)} + b_2, \\ x_3^{(k+1)} = a_{31} x_1^{(k+1)} + a_{32} x_2^{(k+1)} + a_{33} x_2^{(k)} ... + a_{3n} x_n^{(k)} + b_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1} x_1^{(k+1)} + a_{n2} x_2^{(k+1)} + a_{33} x_2^{(k+1)} + ... + a_{nn} x_n^{(k)} + b_n. \end{cases} \quad \textbf{(2.38)}$$

Условия остановки процесса уточнения корня методом Зейделя такие же, как и для метода простых итераций, именно:

$$\max_{1\le i\le n} | x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} | \le \varepsilon ,$$

где k – номер приближения; ε – заданная точность вычислений.

Пример. Методом Зейделя решить приведенную к итерационному виду систему из предыдущего примера до 0,0001.

Схема метода Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, \\ x_3^{(k+1)} = a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_2^{(k)} \ldots + a_{3n}x_n^{(k)} + b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_2^{(k+1)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k)} + b_n. \end{cases} \qquad \textbf{(2.38)}$$

Итак, пусть дана система:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}6492537x_2 - 0{,}033581x_3 - 0{,}800995; \\ x_2 = 0{,}5131148x_1 - 0{,}2655738x_3 - 5{,}7352459; \\ x_3 = 0{,}2015504x_1 - 0{,}3626184x_2 - 1{,}2411714. \end{cases}$$

В качестве начального приближения можно взять любые значения. Пусть $x_1^{(0)} = 2{,}3$, $x_2^{(0)} = -4{,}8$, $x_3^{(0)} = 1$. Итерации будем производить по схеме:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}6492537\,x_2^{(k)} - 0{,}033581x_3^{(k)} - 0{,}800995; \\ x_2^{(k+1)} = 0{,}5131148\,x_1^{(k+1)} - 0{,}2655738\,x_3^{(k)} - 5{,}7352459; \\ x_3^{(k+1)} = 0{,}2015504\,x_1^{(k+1)} - 0{,}3626184\,x_2^{(k+1)} - 1{,}2411714. \end{cases}$$

Результаты вычислений помещены в следующей таблице.

Номер итерации, k	Значения переменных после k-й итерации			Погрешность приближения после k-й итерации		
	x_1	x_2	x_3	$\lvert x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} \rvert$
0	2,30000	–4,8000	1,000	–	–	–
1	2,28184	–4,82997	0,97017	0,01816	0,02997	0,02983
2	2,30230	–4,81155	0,96762	0,02046	0,01842	0,00256
3	2,29043	–4,81697	0,96719	0,01187	0,00541	0,00043
4	2,29396	–4,81504	0,96720	0,00353	0,00193	0,00001
5	2,29271	–4,81569	0,96718	0,00125	0,00065	0,00002
6	2,29313	–4,81547	0,96719	0,00042	0,00022	0,00000
7	2,29298	–4,81554	0,96718	0,00014	0,00007	0,00000
8	2,29303	–4,81552	0,96718	0,00005	0,00003	0,00000

Как видно из примеров, метод Зейделя дает более быструю сходимость при одинаковых начальных условиях.

Решение СЛАУ в математическом пакете MathCat

https://www.youtube.com/watch?v=8F8ERSzdcmU

Решение СЛАУ в математическом пакете MatLab

https://www.youtube.com/watch?v=rUmUKQxZdxA