2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными (или, *линейная система*) в линейной алгебре – это система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где x_i – неизвестные переменные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных (числа); b_j – свободные члены (числа).

Система (2.1) называется ***однородной***, если все её свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), иначе – ***неоднородной***.

Неоднородная

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6; \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6; \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 9. \end{cases}$$

Однородная

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases}$$

Система (2.1) называется ***квадратной***, если число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$).

Решением системы (2.1) называется совокупность n чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему (2.1) обращает все ее уравнения в тождества.

Система (2.1) называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если у нее нет ни одного решения.

Систему (2.1) можно записать в матричной форме (в виде расширенной матрицы):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]. \qquad (2.2)$$

Матричная форма записи

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6; \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6; \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 9. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 5 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 6 & 9 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad \mathbf{(2.1)}$$

Если обозначим через

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – матрицу коэффициентов,

$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$ – столбец свободных членов, $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ – столбец неизвестных,

то систему (2.1) можно также записать в виде

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}.$$

Прямые методы позволяют получить решение системы за конечное число арифметических операций, и если все операции выполняются точно (без ошибок округления), то решение заданной системы также получается точным. Эти методы иногда называют точными методами. Однако данное название не совсем корректное, так как при использовании округления чисел решения всегда получаются с погрешностями. Влияние использования приближенных входных чисел на результат выполнения операций мы с вами рассмотрели на первой лекции.

К прямым методам решения систем линейных уравнений относятся методы Гаусса, Крамера, квадратных корней, Холецкого и др.

Итерационные методы позволяют найти приближенное решение системы путем построения последовательности приближений (итераций), начиная с некоторого начального приближения. Само приближенное решение является результатом вычислений, полученным после конечного числа итераций.

2.1. Прямые методы решения СЛАУ

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Решение СЛАУ **матричным методом** можно записать в виде:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{A}^{-1}$ – матрица, обратная матрице $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения матрицы $\boldsymbol{A}$**:**

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

здесь M_{ij} – дополнительный минор, определитель матрицы, получающийся из исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ путем вычеркивания i-й строки и j-го столбца.
Очевидно, что данный метод можно было применить только если $\det \boldsymbol{A} \neq 0$

Матричный метод достаточно *трудоемкий*, для вычисления обратной матрицы с его помощью необходимо произвести вычисление: $\boldsymbol{n}$ *определителей разных матриц размерностью* $(n-1) \times (n-1)$ *и **один** определителя матрицы размерностью* $n \times n$.

Пример использования матричного метода для решения СЛАУ

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6; \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6; \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 9. \end{cases}$$

Имеем: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 60 + 24 + 1 - 20 + 4 + 18 = 87.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 32; \; A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 14;$$

$$A_{13} = -19; \; A_{21} = -19; \; A_{22} = 8; \; A_{23} = 14; \; A_{31} = 1; \; A_{32} = -5; \; A_{33} = 13.$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{87}\begin{bmatrix}32 & -19 & 1\\ 14 & 8 & -5\\ -19 & 14 & 13\end{bmatrix} \text{ или } \boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{32}{87} & \frac{-19}{87} & \frac{1}{87}\\ \frac{14}{87} & \frac{8}{87} & \frac{-5}{87}\\ \frac{-19}{87} & \frac{14}{87} & \frac{13}{87}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{32}{87} & \frac{-19}{87} & \frac{1}{87}\\ \frac{14}{87} & \frac{8}{87} & \frac{-5}{87}\\ \frac{-19}{87} & \frac{14}{87} & \frac{13}{87}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6\\ 6\\ 9\end{bmatrix}$$

$$x_1=\frac{32\cdot 6-19\cdot 6+9}{87}=1;\ x_2=\frac{14\cdot 6+8\cdot 6-5\cdot 9}{87}=1;$$

$$x_3=\frac{-14\cdot 6+14\cdot 6+13\cdot 9}{87}=1.$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Систему (2.1) можно также решить **методом Крамера**, если:

- количество неизвестных n в системе равно числу уравнений;
- матрица А невырожденная, т.е. $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Тогда решение системы (2.1) можно найти по формулам Крамера

$$x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}},$$

где $\boldsymbol{A}_i$ – матрица, получаемая из исходной матрицы $\boldsymbol{A}$ заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов $\boldsymbol{b}$.

Для решения системы из n уравнений с n неизвестными по правилу Крамера нужно вычислить $n + 1$ определитель n-го порядка, что очевидно очень *трудоемко* (при самой экономичной организации вычислений потребуется выполнить порядка $\frac{2}{3}n^4$ арифметических операций).

Пример использования метода Крамера

$$x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6; \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 6; \\ 4x_1 - x_2 + 6x_3 = 9. \end{cases}$$

Имеем: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 60 + 24 + 1 - 20 + 4 + 18 = 87;$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 180 - 6 + 54 - 45 - 108 + 12 = 87;$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 4 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 73 - 9 + 48 - 24 - 36 + 36 = 87;$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 90 + 6 + 72 - 120 + 12 + 27 = 87.$$

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{87}{87} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{87}{87} = 1;$$

$$x_3 = \frac{\det \boldsymbol{A}_3}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{87}{87} = 1.$$

В качестве прямых методов, удобных для реализации их на компьютере, мы рассмотрим следующие:

- метод Гаусса;
- метод главных элементов;
- метод квадратных корней;
- схему Холецкого.

Все эти методы с помощью элементарных преобразований матриц приводят их к одной или нескольким матрицам треугольного вида.

2.1.1. Метод Гаусса

Первый этап (прямой ход или метод исключений). Последовательно исключая неизвестные, система (2.1) приводится к треугольному виду

$$x + B^{+} x = \varphi,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неизвестный (искомый) вектор; $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ – известный вектор; B^{+} – верхняя треугольная матрица.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] (2.2) \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{*} & \ldots & a_{1n}^{*} & b_1^{*} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right], (2.3)$$

где $a_{1j}^{*} = a_{1j} / a_{11}$, $b_1^{*} = b_1 / a_{11}$ $\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^{*} & \ldots & a_{1n}^{*} & & b_1^{*} \\ 0 & \boxed{a_{22}^{\circ}} & \ldots & a_{2n}^{\circ} & & b_2^{\circ} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{\circ} & \ldots & a_{nn}^{\circ} & & b_n^{\circ} \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} a_{ij}^{\circ} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}^{*}, \\ b_i^{\circ} = b_i - a_{i1} \cdot b_1^{*}, i = \overline{2, n}. \end{array} \tag{2.4}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^{*} & a_{13}^{*} & \ldots & a_{1n}^{*} & b_1^{*} \\ 0 & 1 & a_{23}^{*} & \ldots & a_{2n}^{*} & b_2^{*} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b_n^{*} \end{array}\right]. \tag{2.5}$$

Второй этап (обратный ход). Определение неизвестных x_n, x_{n-1}, …, x_1.

Обратный ход Гаусса состоит в определении всех неизвестных x_i из системы (2.5):

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* & \dots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & a_{23}^* & \dots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{array}\right]. \tag{2.5}$$

начиная с последнего:

$$\begin{cases} x_n = b_n^*, \\ x_{n-1} = b_{n-1}^* - a_{n-1\,n}^* b_n^*, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 = b_1^* - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}^* x_j. \end{cases} \tag{2.6}$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса с точностью до 0,0001:

$$\begin{cases} 0,14x_1+0,24x_2-0,84x_3=1,11; \\ 1,07x_1-0,83x_2+0,56x_3=0,48; \\ 0,64x_1+0,43x_2-0,38x_3=-0,83. \end{cases}$$

Решение:

Прямой ход

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,14 & 0,24 & -0,84 & 1,11 \\ 1,07 & -0,83 & 0,56 & 0,48 \\ 0,64 & 0,43 & -0,38 & -0,83 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,7143 & -6,0000 & 7,9286 \\ 1,0700 & -0,8300 & 0,5600 & 0,4800 \\ 0,6400 & 0,4300 & -0,3800 & -0,8300 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,7143 & -6,0000 & 7,9286 \\ 0 & -2,6643 & 6,9800 & -8,0036 \\ 0 & -0,6671 & 3,4600 & -5,9043 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1,7143 & -6,0000 & 7,9286 \\ 0 & 1 & -2,6198 & 3,0040 \\ 0 & -0,6671 & 3,4600 & -5,9043 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}7143 & -6{,}0000 & 7{,}9286 \\ 0 & 1 & -2{,}6198 & 3{,}0040 \\ 0 & 0 & 1{,}7122 & -3{,}9002 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}7143 & -6{,}0000 & 7{,}9286 \\ 0 & 1 & -2{,}6198 & 3{,}0040 \\ 0 & 0 & 1 & -2{,}2779 \end{array}\right]$$

или
$$\begin{cases} x_1 + 1{,}7143\,x_2 - 6{,}0000\,x_3 = 7{,}9286; \\ \qquad x_2 - 2{,}6198\,x_3 = 3{,}0040; \\ \qquad\qquad x_3 = -2{,}2779. \end{cases}$$

Обратный ход

$$\begin{cases} x_3 = -2{,}2779; \\ x_2 = 3{,}0040 - (-2{,}6198)\cdot(-2{,}2779) = -2{,}9637; \\ x_1 = 7{,}9286 - 1{,}7143\cdot(-2{,}9637) - (-6{,}0000)\cdot(-2{,}2779) = -0{,}6582. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -0{,}6582, \quad x_2 = -2{,}9637, \quad x_3 = -2{,}2779$.

Выполнение прямого хода метода Гаусса позволяет также вычислить значение **определителя матрицы** системы, найти **обратную матрицу**.

Нахождение определителя матрицы с помощью прямого хода метода Гаусса. Ранее уже отмечалось, что непосредственное нахождение определителя требует большого объема вычислений. Вместе с тем легко вычисляется определитель треугольной матрицы: он равен произведению ее диагональных элементов.

Для приведения матрицы к треугольному виду может быть использован метод исключения, т.е. прямой ход метода Гаусса. Значение определителя после приведения матрицы A к треугольному виду вычисляется по формуле

$$\det A = (-1)^m \prod_{k=1}^{n} \alpha_{kk}.$$

Здесь диагональные элементы α_{kk} берутся из преобразованной к треугольному виду матрицы; m – количество перестановок строк (или столбцов) матрицы при ее приведении к треугольному виду.

Благодаря методу исключения можно вычислять определители 100-го и большего порядков.

Пример, пусть необходимо вычислить определитель матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Приведем матрица A к треугольному виду:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \left|\begin{matrix}\text{поменяяем местами} \\ \text{строки 1 и 2}\end{matrix}\right| = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} = \left|\begin{matrix}\text{прибавим к строке 3} \\ \text{строку 1, умноженную} \\ \text{на 4}\end{matrix}\right| =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 19 & 14 \end{bmatrix} = \left|\begin{matrix}\text{из строки 3 вычитаем} \\ \text{строку 2, умноженную на } \dfrac{19}{3}\end{matrix}\right| = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{23}{3} \end{bmatrix}.$$

Один раз мы меняли местами строки, поэтому $m = 1$. Окончательно получаем:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^1 \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{23}{3} \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot \frac{23}{3} = 23.$$

Нахождение обратной матрицы с помощью метода Гаусса. Элементы обратной матицы A^{-1} обозначим через z_{ij}.

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix}.$$

Необходимо найти все z_{ij}.

Как известно, $A \times A^{-1} = E$, следовательно

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Для нахождения неизвестных небходимо составить соотвествующие СЛАУ. Так, для нахождения элементов j-го столбца $\boldsymbol{A}^{-1}$ необходимо решить СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}z_{1j} + a_{12}z_{2j} + \cdots + a_{1n}z_{nj} = 0; \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{j1}z_{1j} + a_{j2}z_{2j} + \cdots + a_{jn}z_{nj} = 1; \\ a_{j+1,1}z_{1j} + a_{j+1,2}z_{2j} + \cdots + a_{j+1,n}z_{nj} = 0; \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\ a_{n1}z_{1j} + a_{n2}z_{2j} + \cdots + a_{nn}z_{nj} = 0. \end{cases}$$

То есть имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{1k}z_{k1} = 1;\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}z_{k2} = 0;\ \dots;\ \sum_{k=1}^{n} a_{1k}z_{kn} = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k}z_{k1} = 0; \sum_{k=1}^{n} a_{2k}z_{k2} = 1; \sum_{k=1}^{n} a_{2k}z_{k3} = 0;\ \dots;\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}z_{kn} = 0;\ \text{и т. д.}$$

Все эти линейные уравнения можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \tag{*}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j, \\ 0, \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для нахождения элементов одного столбца обратной матрицы необходимо решить линейную систему (*) с матрицей A.

Следовательно, для обращения матрицы нужно n раз решить систему уравнений приведенного вида при $j = 1, 2, \dots, n$. Поскольку матрица системы не меняется, то исключения неизвестных при использовании метода Гаусса (прямой ход) проводится только один раз.

Оценки показывают, что это весьма экономичный способ обращения матрицы. Он требует примерно лишь в три раза больше действий, чем при решении одной системы уравнений.

2.1.2. Метод главных элементов

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1f} & \dots & a_{1q} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2f} & \dots & a_{2q} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pf} & \dots & \boxed{a_{pq}} & \dots & a_{pn} & b_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nf} & \dots & a_{nq} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}. \qquad (2.7)$$

Пусть $\max |a_{ij}| = a_{pq}$

Вычислим множители

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}, \text{ для всех } i \neq p. \qquad (2.8)$$

Далее произведем следующую операцию: *к каждой неглавной строке прибавим главную, умноженную на соответствующий множитель* m_i (где i – номер строки).

В результате мы получим новую матрицу, у которой q-й столбец состоит из нулей.

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1f} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2f} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pf} & \dots & \boxed{a_{pq}} & \dots & a_{pn} & b_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nf} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}. \qquad (2.7)$$

«Отбрасывая» этот столбец и главную p-ю строку, получим новую матрицу $M^{(1)}$ с меньшим на единицу числом строк и столбцов.

$$
M^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q-1} & a_{1q+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q-1} & a_{2q+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-11} & a_{p-12} & \dots & a_{p-1q-1} & a_{p-1q+1} & \dots & a_{p-1n} & b_{p-1} \\ a_{p+11} & a_{p+12} & \dots & a_{p+1q-1} & a_{p+1q+1} & \dots & a_{p+1n} & b_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nq-1} & a_{nq+1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}. \qquad (2.8)
$$

Над матрицей $M^{(1)}$ повторим те же операции, что и операции проделанные с матрицей M.

Таким образом будет построена последовательность матриц

$$
M, M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(n-1)},
$$

последняя из которых есть двухчленная матрица-строка; ее также определим главной.

Для определения неизвестных x_i объединяем в систему все главные строки, начиная с последней, входящей в матрицу $M^{(n-1)}$.

После надлежащего изменения нумерации неизвестных (или перестановки столбцов), получается система с верхней треугольной матрицей, из которой можно легко найти неизвестные, используя обратный ход метода Гаусса.

Пример. Решить систему линейных уравнений, используя метод главных элементов:

$$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 3{,}17x_3 = 2{,}18; \\ 1{,}12x_1 + 0{,}83x_2 - 2{,}16x_3 = -1{,}15; \\ 0{,}18x_1 + 1{,}27x_2 + 0{,}76x_3 = 3{,}23. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 \qquad\qquad & x_2 \qquad\qquad & x_3 \qquad\qquad \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2{,}7400 & -1{,}1800 & \boxed{3{,}1700} & 2{,}1800 \\ 1{,}1200 & 0{,}8300 & -2{,}1600 & -1{,}1500 \\ 0{,}1800 & 1{,}2700 & 0{,}7600 & 3{,}2300 \end{array}\right]. \end{array}$$

В качестве главного возьмем наибольший по модулю элемент: $a_{13} = 3{,}1700$. Теперь вычислим множители m_2 и m_3. Из (2.11) следует, что

$$m_2 = -\frac{a_{23}}{a_{13}} = \frac{2{,}16}{3{,}17} = 0{,}6814, \quad m_3 = -\frac{a_{33}}{a_{13}} = -\frac{0{,}76}{3{,}17} = -0{,}2397.$$

Исходная матрица после арифметических действий, описанных в алгоритме, примет вид:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2{,}7400 & -1{,}1800 & \boxed{3{,}1700} & 2{,}1800 \\ 2{,}9870 & 0{,}0260 & 0 & 0{,}3354 \\ -0{,}4769 & 1{,}5529 & 0 & 2{,}7074 \end{array}\right]. \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{первая главная строка} \\ \\ \\ \end{array}$$

Исключим из рассмотрения первую строка и первый столбец.

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{2{,}9870} & 0{,}0260 & 0{,}3354 \\ -0{,}4769 & 1{,}5529 & 2{,}7074 \end{array}\right]. \end{array}$$

Здесь главным элементом выбираем a_{11}= 2,987. Следовательно, m_2= 0,1597 и

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \boxed{2,9870} & 0,0260 & 0,3354 \\ 0 & 1,5570 & 2,7609 \end{array}\right]. \leftarrow \text{вторая главная строка}$$

Наконец получаем матрицу строку:

$$x_2$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1,5570 & 2,7609 \end{array}\right]. \leftarrow \text{третья главная строка}$$

Теперь, начиная с последней, соберем вместе все главные строки

$$\begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3,1700 & 2,7400 & -1,1800 & 2,1800 \\ 0 & 2,9870 & 0,0260 & 0,3354 \\ 0 & 0 & 1,5570 & 2,7609 \end{array}\right].$$

Следовательно: $x_2 = \frac{2,7609}{1,557} = 1,7732$, $x_1 = \frac{0,3354 - 0,026 \cdot 1,7732}{2,987} = 0,0969$,

$$x_3 = \frac{2,18 + 1,18 \cdot 1,7732 - 2,74 \cdot 0,969}{3,17} = 1,264.$$

Ответ: $x_1 = 0,0969$, $x_2 = 1,7732$, $x_3 = 1,264$.

2.1.3. Метод прогонки

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_1 + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = d_2, \\ \qquad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 + \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = d_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n = d_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_n x_{n-1} + b_n x_n = d_{n-1}. \end{cases} \tag{2.9}$$

На главной диагонали матрицы этой системы стоят элементы $b_1, b_2, ..., b_n$, над ней – $c_1, c_2, ..., c_{n-1}$, под ней – элементы $a_2, a_3, ..., a_n$. При этом обычно все коэффициенты b_i не равны нулю.

Прямая прогонка состоит ив том, что каждое неизвестное x_i выражается через x_{i+1} с помощью прогоночных коэффициентов A_i, B_i:

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_1 + & = d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + & = d_2, \\ \quad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 + & = d_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \quad\quad a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n & = d_{n-1}, \\ \quad\quad\quad a_n x_{n-1} + b_n x_n & = d_{n-1}. \end{cases} \tag{2.9}$$

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2.10}$$

Из 1-го уравнения системы (2.9):

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1}.$$

По формуле (2.10):

$$x_1 = A_1 x_2 + B_1.$$

Тогда

$$A_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Из второго уравнения системы (2.9) выразим x_2 через x_3, заменяя x_1 по формуле (2.10):

$$\begin{cases} b_1x_1 + c_1x_1 + & = d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + & = d_2, \\ \quad a_3x_2 + b_3x_3 + c_3x_4 + & = d_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \quad a_{n-1}x_{n-2} + b_{n-1}x_{n-1} + c_{n-1}x_n & = d_{n-1}, \\ \quad a_nx_{n-1} + b_nx_n & = d_{n-1}. \end{cases} \quad \textbf{(2.9)}$$

$$x_i = A_ix_{i+1} + B_i, \quad i = 1,2,\dots,n-1 \quad \textbf{(2.10)}$$

$$a_2(A_1x_2 + B_1) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2. \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-c_2x_3 + d_2 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2} \quad \Rightarrow$$

$x_2 = A_2x_3 + B_2$, где $A_2 = -\dfrac{c_2}{e_2}$; $B_2 = \dfrac{d_2 - a_2B_1}{e_2}$; $e_2 = a_2A_1 + b_2$.

$$\boxed{A_i = -\frac{c_i}{e_i};\ B_i = \frac{d_i - a_iB_{i-1}}{e_i};\ e_i = a_iA_{i-1} + b_i,\ i = 2,3,\dots,n-1.}$$

Обратная прогонка состоит в последовательном вычислении неизвестных x_i. Сначала нужно найти x_n. Для этого воспользуемся выражением (2.10) при $i = n - 1$ и последним уравнением системы (2.9). Запишем их:

$$\begin{cases} b_1 x_1 + c_1 x_1 + & = d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + & = d_2, \\ \quad a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 + & = d_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n & = d_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n & = d_{n-1}. \end{cases} \qquad \textbf{(2.9)}$$

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad \textbf{(2.10)}$$

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= A_{n-1} x_n + B_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n &= d_n. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}.$$

Далее, используя формулы (2.10) и выражения для прогоночных коэффициентов, последовательно вычисляем все неизвестные x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_1.

2.1.4. Метод квадратных корней

Пусть матрица A является симметрической (!), т.е. $A' = A$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]. \qquad (*)$$

Матрицу коэффициентов при неизвестных A можно представить в виде:

$$A = T'T, \qquad (2.11)$$

где

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \text{ и } T' = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

При наличии соотношения (2.11) система уравнений (8) эквивалентно двум системам:

$$A = T'T \quad \mathbf{(2.11)}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \quad \mathbf{(*)}$$

$$T'y = b \text{ и } Tx = y$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots\dots & y_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} t_{11} & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b_1 \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} & b_1 \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots\dots & x_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} & y_1 \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} & y_n \end{array}\right] \end{array}$$

Коэффициенты матрицы Т находятся следующим образом:

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}},\ t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{t_{11}}, & (j > 1), \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, & (1 < i \le n), \\ t_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}, & (i < j), \\ t_{ij} = 0, & (i > j). \end{cases} \tag{2.12}$$

! При этом некоторые элементы матрицы *T* могут быть комплексными !

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{t_{11}}, \\ y_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \quad (i > 1), \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{t_{nn}}, \\ x_i = \dfrac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}} \quad (i < n). \end{cases} \tag{2.14}$$

Пример: Решить систему линейных уравнений методом квадратных корней с точностью до 0,001

$$\begin{cases} 4{,}25x_1 - 1{,}48x_2 + 0{,}73x_3 = 1{,}44; \\ -1{,}48x_1 + 1{,}73x_2 - 1{,}85x_3 = 2{,}73; \\ 0{,}73x_1 - 1{,}85x_2 + 1{,}93x_3 = -0{,}64. \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}},\, t_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{t_{11}}, & (j > 1), \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, & (1 < i \le n), \\ t_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}}, & (i < j), \\ t_{ij} = 0, & (i > j). \end{cases} \qquad \textbf{(2.12)}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4{,}25 & -1{,}48 & 0{,}73 & 1{,}44 \\ -1{,}48 & 1{,}73 & -1{,}85 & 2{,}73 \\ 0{,}73 & -1{,}85 & 1{,}93 & -0{,}64 \end{array}\right].$$

Тогда: $t_{11} = 2{,}0616;\ t_{12} = \dfrac{-1{,}48}{2{,}0616} = -0{,}7179;\ t_{13} = \dfrac{0{,}73}{2{,}0616} = 0{,}3541;$

$$t_{21} = 0;\ t_{22} = \sqrt{1{,}73 - (-0{,}7179)^2} = 1{,}1021;\ t_{23} = \frac{-1{,}85 + 0{,}7179 \cdot 0{,}3541}{1{,}1021} = -1{,}4480;$$

$$t_{31} = 0;\ t_{32} = 0;\ t_{33} = \sqrt{1{,}93 - 0{,}3541^2 - (-1{,}448)^2} = 0{,}5403i.$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{1{,}44}{2{,}0616} = 0{,}6985, \\ y_2 = \dfrac{2{,}73 + 0{,}7179 \cdot 0{,}6985}{1{,}1021} = 2{,}9321, \\ y_3 = \dfrac{-0{,}64 - 0{,}3541 \cdot 0{,}6985 + 1{,}4480 \cdot 2{,}9321}{0{,}5403i} = 6{,}2149i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{6{,}2149i}{0{,}5403i} = -11{,}5017; \\ x_2 = \dfrac{2{,}9321 - (-1{,}4480) \cdot (-11{,}5017)}{1{,}1021} = -12{,}4508; \\ x_1 = \dfrac{0{,}6985 - (-0{,}7179) \cdot (-12{,}4508) - 0{,}3541 \cdot (-11{,}5017)}{2{,}0616} = -2{,}0214. \end{cases}$$

$t_{11} = 2{,}0616;\ t_{12} = -0{,}7179;$

$t_{13} = 0{,}3541;\ t_{21} = 0;$

$t_{22} = 1{,}1021;\ t_{23} = -1{,}4480;$

$t_{31} = 0;\ t_{32} = 0;\ t_{33} = 0{,}5403i;$

$b_1 = 1{,}44;\ b_2 = 2{,}37;\ b_3 = -0{,}64$

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{t_{11}}, \\ y_i = \dfrac{b_i - \sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}} \quad (i > 1), \end{cases} \qquad \textbf{(2.13)}$$

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{t_{nn}}, \\ x_i = \dfrac{y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}} \quad (i < n). \end{cases} \qquad \textbf{(2.14)}$$

Ответ: $x_1 = -2{,}0214;\ x_2 = -12{,}4508;\ x_3 = -11{,}5017.$

2.1.5. Схема Холецкого

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Тогда решение системы:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right]$$

сводится к решению двух систем:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & & y_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} b_{11} & 0 & \dots & 0 & a_{1,n+1} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & a_{n,n+1} \end{array}\right] \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} & y_1 \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y_n \end{array}\right] \end{array}$$

Ненулевые элементы b_{ij} и c_{ij} определяются по формулам

$$\begin{cases} b_{i1} = a_{i1}, \\ b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} b_{ik} c_{kj} \quad (i \ge j > 1), \end{cases} \qquad (2.15)$$

$$\begin{cases} c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ c_{ij} = \dfrac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} c_{kj} \right) \quad (1 < i < j). \end{cases} \qquad (2.16)$$

Отсюда искомый вектор x может быть вычислен из систем уравнений $By = b$, $Cx = y$. Так как матрицы B и C – треугольные, то системы легко решаются, а именно:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{a_{1,n+1}}{b_{11}}, \\ y_i = \dfrac{1}{b_{ii}} \left(a_{i,n+1} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} y_k \right) \quad (i > 1) \end{cases} \qquad (2.17)$$

$$\begin{cases} x_n = y_n, \\ x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k \quad (i < n). \end{cases} \qquad (2.18)$$

Пример: Решить систему линейных уравнений по схеме Халецкого с точностью до 0,001.

$$\begin{cases} 0{,}14x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}11; \\ 1{,}07x_1 - 0{,}83x_2 + 0{,}56x_3 = 0{,}48; \\ 0{,}64x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}38x_3 = -0{,}83. \end{cases}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}14 & 0{,}24 & -0{,}84 & 1{,}11 \\ 1{,}07 & -0{,}83 & 0{,}56 & 0{,}48 \\ 0{,}64 & 0{,}43 & -0{,}38 & -0{,}83 \end{array}\right]$$

Сначала разложим матрицу коэффициентов на две матрицы *B* и *C,* ненулевые элементы которых находятся по формулам (2.15)-(2.16) (последовательность выполнения вычислений указана стрелками).

$$b_{11}=0{,}1400,\qquad c_{11}=1{,}0000,$$
$$b_{21}=1{,}0700,\qquad c_{12}=1{,}7143,$$
$$b_{22}=-2{,}6643,\qquad c_{13}=-6{,}0000,$$
$$b_{31}=0{,}6400,\qquad c_{22}=1{,}0000,$$
$$b_{32}=-0{,}6671,\qquad c_{23}=-2{,}6198,$$
$$b_{33}=1{,}7122;\qquad c_{33}=1{,}0000.$$

$$\begin{cases} b_{i1}=a_{i1}, \\ b_{ij}=a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} \quad (i\ge j>1), \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\begin{cases} c_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ c_{ij}=\dfrac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}\right) \quad (1<i<j). \end{cases} \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{a_{1,n+1}}{b_{11}}, \\ y_i=\dfrac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,n+1}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k\right) \quad (i>1) \end{cases} \tag{2.17}$$

Отсюда следует:

$$y_1=\frac{1{,}1100}{0{,}1400}=7{,}9286;$$

$$y_2=\frac{0{,}48-1{,}0700\cdot 7{,}9286}{-2{,}6643}=3{,}0040;$$

$$y_3=\frac{-0{,}83-0{,}6400\cdot 7{,}9286-(-0{,}6671)\cdot 3{,}0040}{1{,}7122}=-2{,}2779$$

$$y_1 = 7{,}9286; \quad y_2 = 3{,}0040; \quad y_3 = -2{,}2779$$

$$\begin{cases} x_n = y_n, \\ x_i = y_i - \sum\limits_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k \quad (i < n). \end{cases} \qquad \textbf{(2.18)}$$

$$x_3 = -2{,}2779,$$

$$x_2 = 3{,}0040 - (-2{,}6198) \cdot (-2{,}2779) = -2{,}9637,$$

$$x_1 = 7{,}9286 - 1{,}7143 \cdot (-2{,}9637) - (-6{,}000) \cdot (-2{,}2779) = -0{,}6582.$$

2.2. Итерационные методы решения СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases} \tag{2.18}$$

Достаточные условия сходимости:

1) $\alpha = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$; **2)** $\alpha = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1$; **3)** $\alpha = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij}{}^2} < 1.$

2.2.1. Метод простых итераций

Если одно из условий сходимости выполняется, то задается нулевое (начальное) приближение неизвестных x.

Часто (*хотя и не обязательно*) это столбец свободных членов, т.е.

$$x_1^{(0)} = b_1,\ x_2^{(0)} = b_2,\ \ldots,\ x_n^{(0)} = b_n.$$

Начальные приближения могут быть произвольными.

Тогда следующее (**первое**) приближение переменных находятся так:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \alpha_{11}x_1^{(0)} + \alpha_{12}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(0)} + \beta_1, \\ x_2^{(1)} = \alpha_{21}x_1^{(0)} + \alpha_{22}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(0)} + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(1)} = \alpha_{n1}x_1^{(0)} + \alpha_{n2}x_2^{(0)} + \ldots + \alpha_{nn}x_n^{(0)} + \beta_n. \end{cases} \tag{2.19}$$

Второе приближение переменных находится с использованием найденных первых приближений:

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \alpha_{11} x_1^{(1)} + \alpha_{12} x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{1n} x_n^{(1)} + \beta_1, \\ x_2^{(2)} = \alpha_{21} x_1^{(1)} + \alpha_{22} x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{2n} x_n^{(1)} + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(2)} = \alpha_{n1} x_1^{(1)} + \alpha_{n2} x_2^{(1)} + \ldots + \alpha_{nn} x_n^{(1)} + \beta_n. \end{cases} \qquad (2.19)$$

Таким образом, **схема процесса итераций** будет следующей:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11} x_1^{(k)} + \alpha_{12} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n} x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21} x_1^{(k)} + \alpha_{22} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n} x_n^{(k)} + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1} x_1^{(k)} + \alpha_{n2} x_2^{(k)} + \ldots + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases} \tag{2.20}$$

Условия остановки процесса уточнения корня:

$\max\limits_{1 \le i \le n} | x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} | \le \varepsilon$, где k – номер приближения.

Пример. Методом простых итераций решить систему линейных уравнений с точностью до 0,0001.

$$\begin{cases} 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41; \\ 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44; \\ 3{,}92x_1 - 7{,}99x_2 + 8{,}37x_3 = 55{,}56. \end{cases}$$

Решение.

1. Сначала построим сходящуюся схему итераций. Для этого сначала получим систему с преобладающими диагональными коэффициентами, поэтому в качестве первого уравнения возьмем второе, третьего – первое, а второго – сумму первого с третьим. Получим следующую систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} 8{,}04x_1 + 5{,}22x_2 + 0{,}27x_3 = -6{,}44; \\ 6{,}26x_1 - 12{,}20x_2 - 3{,}24x_3 = 69{,}97; \\ 2{,}34x_1 - 4{,}21x_2 - 11{,}61x_3 = 14{,}41. \end{cases}$$

Далее, разделим каждое уравнение на его диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}6492537x_2 - 0{,}033581x_3 - 0{,}800995; \\ x_2 = 0{,}5131148x_1 - 0{,}2655738x_3 - 5{,}7352459; \\ x_3 = 0{,}2015504x_1 - 0{,}3626184x_2 - 1{,}2411714. \end{cases}$$

Так как для полученной системы выполняется второе условие сходимости (т.е. процесс итераций будет сходиться), то ее можно использовать для построения схемы приближения неизвестных, которая для данной системы будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}6492537x_2^{(k)} - 0{,}033581x_3^{(k)} - 0{,}800995; \\ x_2^{(k+1)} = 0{,}5131148x_1^{(k)} - 0{,}2655738x_3^{(k)} - 5{,}7352459; \\ x_3^{(k+1)} = 0{,}2015504x_1^{(k)} - 0{,}3626184x_2^{(k)} - 1{,}2411714. \end{cases}$$

Пусть начальные приближения неизвестных равны соответственно: $x_1^{(0)} = 2{,}3$, $x_2^{(0)} = -4{,}8$, $x_3^{(0)} = 1$.

Результаты вычислений помещены в следующей таблице.

Номер итерации, k	Значения переменных после k-й итерации			Погрешность приближения после k-й итерации		
	x_1	x_2	x_3	$\lvert x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} \rvert$
0	2,30000	–4,8000	1,000	–	–	–
1	2,28184	–4,82066	0,96296	0,01816	0,02066	0,03704
2	2,29650	–4,82014	0,96679	0,01465	0,00052	0,00383
3	2,29603	–4,81364	0,96956	0,00047	0,00650	0,00277
4	2,29172	–4,81461	0,96711	0,00431	0,00097	0,00245
5	2,29243	–4,81617	0,96659	0,00071	0,00156	0,00052
6	2,29346	–4,81567	0,96730	0,00103	0,00050	0,00071
7	2,29311	–4,81533	0,96733	0,00035	0,00034	0,00003
8	2,29289	–4,81551	0,96713	0,00022	0,00019	0,00019
9	2,29302	–4,81558	0,96715	0,00013	0,00006	0,00002
10	2,29306	–4,81552	0,96715	0,00004	0,00006	0,00005

Из таблицы видно, что итерации были завершены, когда $\max\limits_i \lvert x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \rvert < 0{,}0001$.

2.2.2. Метод Зейделя

Сначала вспомним **схему процесса итераций** предыдущего метода:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21}x_1^{(k)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, \\ x_3^{(k+1)} = a_{31}x_1^{(k)} + a_{32}x_2^{(k)} + a_{33}x_2^{(k)} \ldots + a_{3n}x_n^{(k)} + b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{(k)} + a_{n2}x_2^{(k)} + a_{33}x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k)} + b_n. \end{cases} \tag{2.20}$$

Схема процесса итераций методом Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} \ldots + a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} \ldots + a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, \\ x_3^{(k+1)} = a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_2^{(k)} \ldots + a_{3n}x_n^{(k)} + b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn}x_n^{(k+1)} + b_n. \end{cases} \tag{2.21}$$

Пример. Методом Зейделя решить приведенную к итерационному виду систему из предыдущего примера до 0,0001.

Итак, пусть дана система:

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}6492537x_2 - 0{,}033581x_3 - 0{,}800995; \\ x_2 = 0{,}5131148x_1 - 0{,}2655738x_3 - 5{,}7352459; \\ x_3 = 0{,}2015504x_1 - 0{,}3626184x_2 - 1{,}2411714. \end{cases}$$

В качестве начального приближения можно взять любые значения. Пусть $x_1^{(0)} = 2{,}3$, $x_2^{(0)} = -4{,}8$, $x_3^{(0)} = 1$. Итерации будем производить по схеме:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0{,}6492537x_2^{(k)} - 0{,}033581x_3^{(k)} - 0{,}800995; \\ x_2^{(k+1)} = 0{,}5131148x_1^{(k+1)} - 0{,}2655738x_3^{(k)} - 5{,}7352459; \\ x_3^{(k+1)} = 0{,}2015504x_1^{(k+1)} - 0{,}3626184x_2^{(k+1)} - 1{,}2411714. \end{cases}$$

Результаты вычислений помещены в следующей таблице.

Номер итера-ции, k	Значения переменных после k–й итерации			Погрешность приближения после k–й итерации		
	x_1	x_2	x_3	$\lvert x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} \rvert$	$\lvert x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} \rvert$
0	2,30000	–4,8000	1,000	–	–	–
1	2,28184	–4,82997	0,97017	0,01816	0,02997	0,02983
2	2,30230	–4,81155	0,96762	0,02046	0,01842	0,00256
3	2,29043	–4,81697	0,96719	0,01187	0,00541	0,00043
4	2,29396	–4,81504	0,96720	0,00353	0,00193	0,00001
5	2,29271	–4,81569	0,96718	0,00125	0,00065	0,00002
6	2,29313	–4,81547	0,96719	0,00042	0,00022	0,00000
7	2,29298	–4,81554	0,96718	0,00014	0,00007	0,00000
8	2,29303	–4,81552	0,96718	0,00005	0,00003	0,00000

Как видно из примеров, метод Зейделя дает более быструю сходимость при одинаковых начальных условиях.