9. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ

9.1. Постановка задачи

Пусть величина y является функцией аргумента x, т.е. любому значению x из области определения поставлено в соответствие значение y.

На практике часто неизвестна явная связь между y и x, т.е. невозможно записать эту связь в виде некоторой аналитической записи $y = f(x)$.

В некоторых случаях даже при известной зависимости $y = f(x)$ она настолько громоздка и сложна, что ее использование в практических расчетах затруднительно.

Часто такая зависимость задается в виде некоторой таблицы $\{x_i, y_i\}$:

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	…	y_n

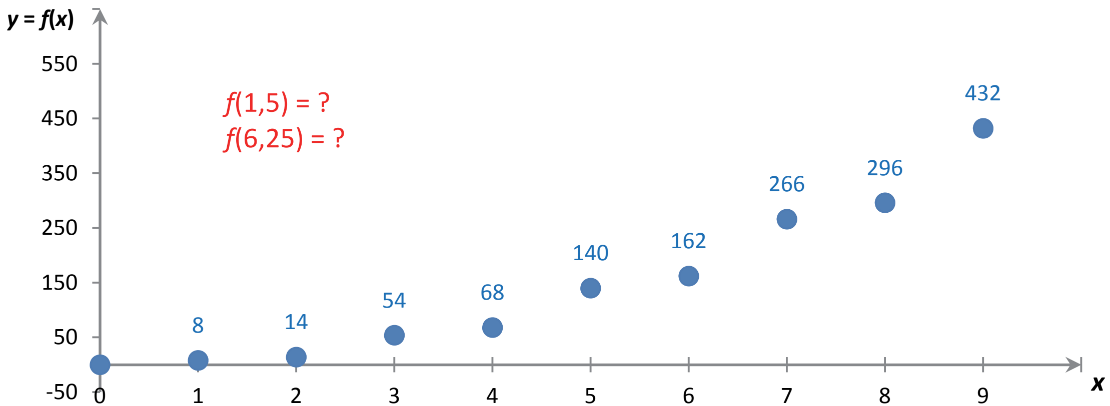
Например, функция $y = x^2$ на отрезке [1, 5] с шагом 1 могла бы быть задана такой таблицей:

x	1	2	3	4	5
$y = x^2$	1	4	9	16	25

Такие таблицы могут быть заполнены значениями, представляющими собой результаты расчетов или эксперимента.

Как оптимально найти значение функции $f(x)$ в точках, отличных от узлов x_i?

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_1	y_1	…	y_n



Оптимально – значит НЕ с помощью сложных расчетов или проведения дорогостоящих экспериментов.

Таким образом, с точки зрения экономии времени и средств мы приходим к необходимости использования имеющихся табличных данных для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении x (из некоторой области), поскольку точная зависимость $y = f(x)$ неизвестна.

Этой цели и служит **задача о приближении (аппроксимации) функции**:
функцию $f(x)$ *требуется приближенно заменить (**аппроксимировать**) некоторой функцией* $\varphi(x)$ *так, чтобы отклонение (в некотором смысле)* $\varphi(x)$ *от* $f(x)$ *в заданной области было наименьшим.*

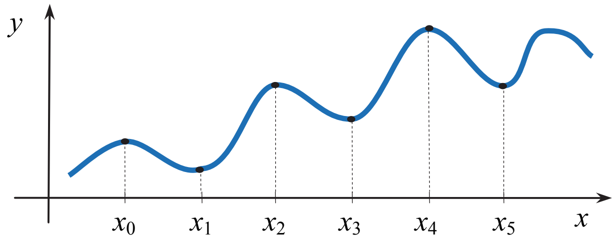
Функция $\varphi(x)$ при этом называется **аппроксимирующей**.

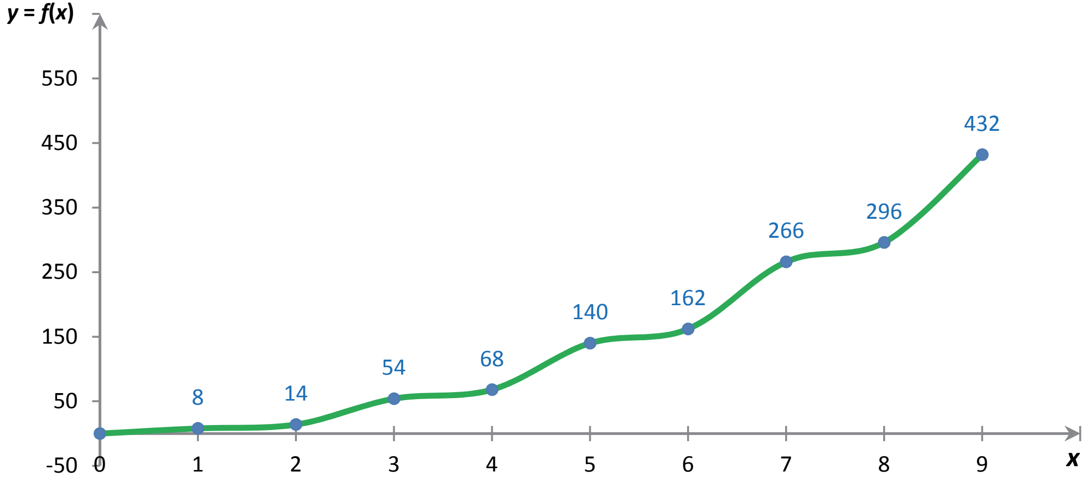
Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, то аппроксимирующая функция называется **точечной**.

К точечной аппроксимации относится такие виды приближения функций, как интерполяция, среднеквадратичное приближение и другие.

При построении приближения на непрерывном множестве точек аппроксимация называется **непрерывной** (или **интегральной**).

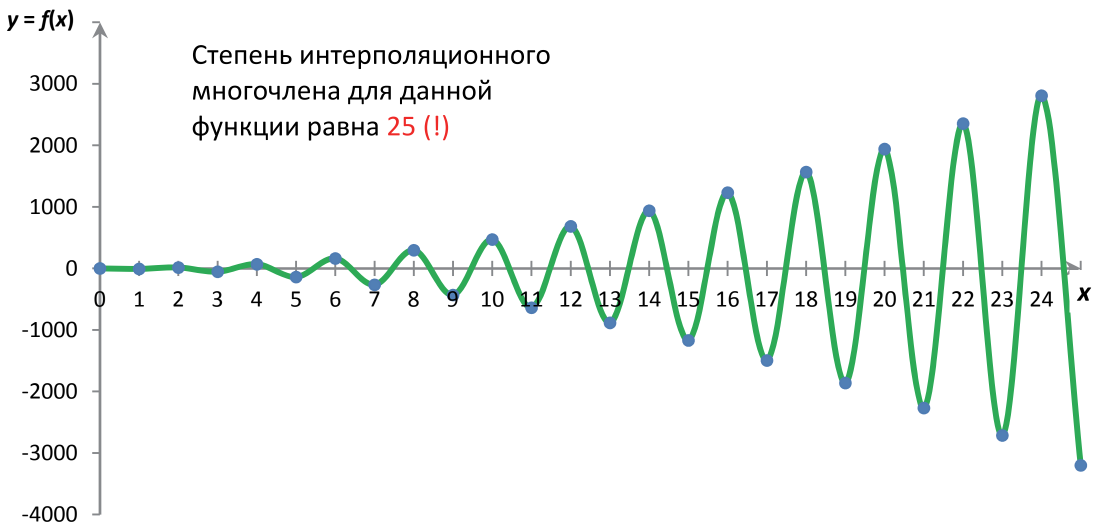
При **интерполировании** обязательным условием является совпадение значений интерполянты со значениями функции в узлах интерполяции.



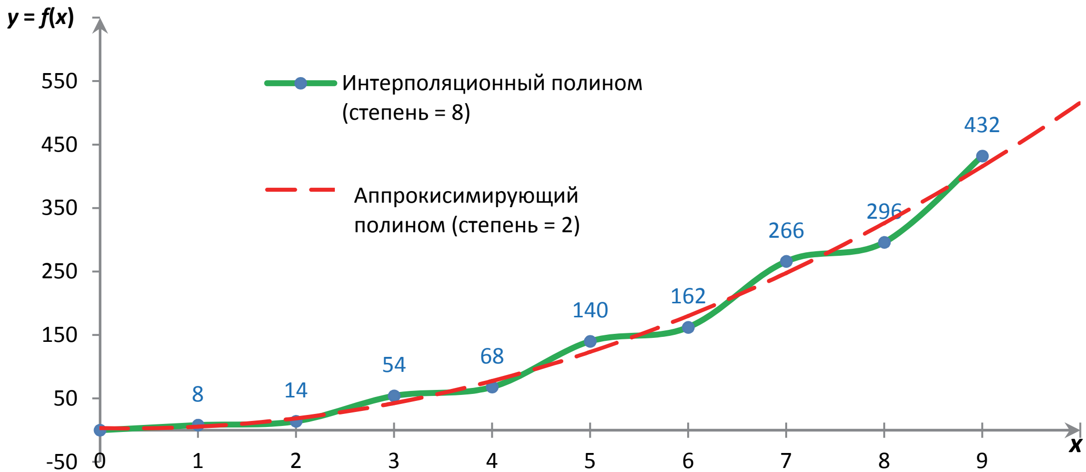


! В ряде случаев выполнение этого условия затруднительно или нецелесообразно.

1. При большом количестве узлов интерполяции получается высокая степень интерполяционного многочлена в случае глобальной интерполяции, т.е. когда нужно иметь один интерполяционный многочлен для всего интервала изменения аргумента.



2. Табличные данные могут быть получены путем измерений (эксперимента) и могут содержать ошибки (неточности, погрешности). Построение аппроксимирующего многочлена при условии обязательного прохождения его графика через эти экспериментальные точки (т.е. использование интерполяции) означало бы повторение ошибок, допущенных при измерениях.



Выход из этого положения может быть найден если выбрать такой многочлен, график которого проходит «**близко**» (уточняется при рассмотрении разных видов приближения) от данных точек.

Среднеквадратическое приближение функций

Одним из таких видов является **среднеквадратичное приближение** функций с помощью многочлена

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \qquad (1)$$

при $m \le n$, где n – количество узлов аппроксимации (интерполяции) (случай $m = n$ соответствует интерполяции).

На практике стараются подобрать аппроксимирующий многочлен как можно меньшей степени (как правило, m = 1, 2, 3).

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \qquad \textbf{(1)}$$

Мерой отклонения многочлена (1) от заданной функции $f(x)$ на множестве точек $\{x_i, y_i\}$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) при среднеквадратичном приближении является величина S, равная сумме квадратов разностей между значениями многочлена и функции в данных точках:

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 . \qquad (2)$$

Метод наименьших квадратов

Аппроксимирующий многочлен

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \qquad \textbf{(1)}$$

Мера отклонения многочлена (1)

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Метод наименьших квадратов состоит в построении аппроксимирующего многочлена $\varphi(x)$ с помощью подбора коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ так, чтобы его мера отклонения S была **наименьшей**.

Рассмотрим многочлен (1). Тогда формула (2) примет вид:

$$S = \sum_{i=0}^{n} [a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m - y_i]^2 \,. \qquad (3)$$

Здесь параметры $a_0, a_1, \ldots, a_m$ – неизвестные переменные функции S.

Для нахождения минимума функции (3) найдем ее частные производные по всем переменным (в нашем случае ими являются неизвестные параметры $a_0, a_1, ..., a_m$) и приравняем их к нулю:

$$S = \sum_{i=0}^{n} [a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m - y_i]^2 \quad \textbf{(3)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0; \; \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0; \; ...; \; \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0.$$

Частные производные функции (3) по переменным a_i равны:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^m - y_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^m - y_i) x_i,$$

....

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i + ... + a_m x_i^m - y_i) x_i^m.$$

С учетом того, что эти частные производные должны равняться нулю, а также переноса свободных коэффициентов, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + \ldots + a_mx_i^m - y_i),$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + \ldots + a_mx_i^m - y_i)x_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1x_i + \ldots + a_mx_i^m - y_i)x_i^m.$$

$$\begin{cases} (n+1)a_0 + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m = \sum\limits_{i=0}^{n} y_i\,, \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^3 + \ldots + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i\,y_i\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m + a_1\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + a_2\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + a_m\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i^m y_i\,. \end{cases} \tag{4}$$

Данная система – система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с неизвестными $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

Решая эту СЛАУ, получаем значения коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_m$ для многочлена (3).

Система (4):

$$\begin{cases}(n+1)a_0 + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i + a_2\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^m = \sum_{i=0}^{n} y_i\,, \\ a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2\sum_{i=0}^{n} x_i^3 + \ldots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} = \sum_{i=0}^{n} x_i\, y_i\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0\sum_{i=0}^{n} x_i^m + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1} + a_2\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + a_m\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=0}^{n} x_i^m\, y_i\,. \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

Систему (4) можно записать в более компактном виде:

$$\begin{cases} b_{00}a_0 + b_{01}a_1 + \ldots + b_{0m}a_m = c_0\,, \\ b_{10}a_0 + b_{11}a_1 + \ldots + b_{1m}a_m = c_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{m0}a_0 + b_{m1}a_1 + \ldots + b_{mm}a_m = c_m\,; \end{cases} \qquad (5)$$

$$b_{kl} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+l}; \quad c_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k\, y_i; \quad k,l = \overline{0,m}\,. \qquad (6)$$

Равномерное приближение

Аппроксимирующий многочлен

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \qquad \textbf{(1)}$$

Мера отклонения многочлена (1)

$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Во многих случаях, особенно при обработке экспериментальных данных, среднеквадратичное приближение вполне применимо, поскольку оно сглаживает некоторые неточности функции $f(x)$ и дает достаточно правильное представление о ней.

Однако иногда при построении приближения ставится более **жесткое условие**: *требуется, чтобы во всех точках некоторого отрезка* $[a, b]$ *отклонение многочлена* $\varphi(x)$ *от функции* $f(x)$ *было по абсолютной величине меньшим заданной величины* $\varepsilon > 0$:

$$| f(x) - \varphi(x) | < \varepsilon, \quad a \le x \le b .$$

В этом случае говорят, что многочлен $\varphi(x)$ **равномерно аппроксимирует** функцию $f(x)$ с точностью ε на отрезке $[a, b]$.

Аппроксимирующий многочлен

$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ **(1)**

Мера отклонения многочлена (1)

$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2$ **(2)**

Введем понятие **абсолютного отклонения** Δ многочлена $\varphi(x)$ от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Оно равно максимальному значению абсолютной величины разности между ними на данном отрезке:

$$\Delta = \max_{a \le x \le b} | f(x) - \varphi(x) |. \qquad (7)$$

Теорема Вейрштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $\varphi(x)$ степени $m = m(\varepsilon)$, абсолютное отклонение которого от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меньше ε.

Существует также понятие **наилучшего приближения функции $f(x)$** многочленом $\varphi(x)$ фиксированной степени m.

В этом случае коэффициенты многочлена (1) следует выбрать так, чтобы на заданном отрезке $[a, b]$ величина абсолютного отклонения (7) была минимальной.

Аппроксимирующий многочлен:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \qquad \textbf{(1)}$$

Мера отклонения многочлена (1):

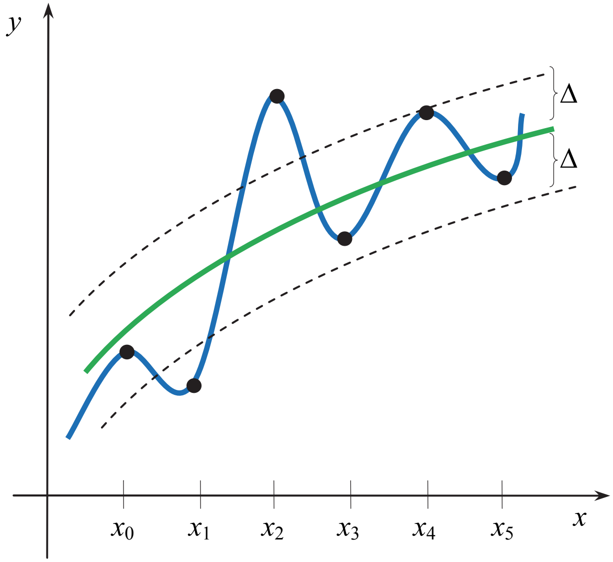
$$S = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Абсолютное отклонение многочлена (1):

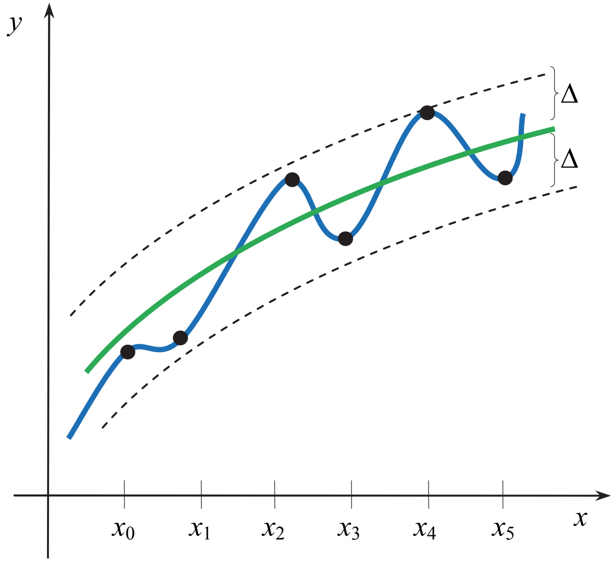
$$\Delta = \max_{a \le x \le b} | f(x) - \varphi(x) | \qquad \textbf{(7)}$$

В этом случае многочлен $\varphi(x)$ называется **многочленом наилучшего равномерного приближения**.

Теорема. Для любой функции $f(x)$, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве G, и любого натурального числа m существует многочлен $\varphi(x)$ степени не выше m, абсолютное отклонение которого от функции $f(x)$ минимально, т.е. $\Delta = \Delta_{\min}$, причем такой многочлен единственный.



Среднеквадратичное приближение



Равномерное приближение