ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ.

РЯД ФУРЬЕ.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Простановка задачи интерполяции (общая)

Пусть значения некоторой функции $y = f(x)$ заданы таблично на отрезке $[a; b]$:

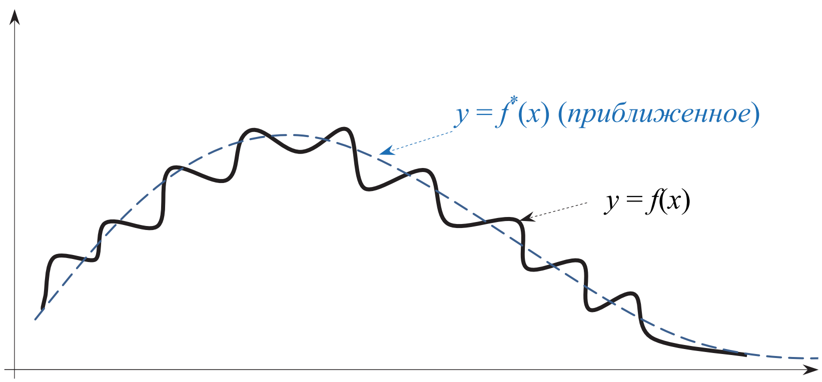
$\boldsymbol{x}$	$x_0 = a$	x_2	…	$x_n = b$
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…	$f(x_n)$

Эти значения могут быть найдены в результате наблюдений (измерений) в каком-то натуральном эксперименте, либо в результате вычислений.

Требуется **восстановить функцию** $\boldsymbol{f(x)}$ **для всех значений** $\boldsymbol{x}$ **на отрезке** $\boldsymbol{a \le x \le b}$, если известно ее значение в некотором конченом наборе точек этого отрезка.

Интерполяция применяется также и в случае, если функция $f(x)$ задана «**сложной**» аналитической формулой и вычисления ее значений по этой формуле очень трудоемки.

Замена «сложной» функции **более простой** позволит производить вычисления менее трудоемко. Например находить приближенное значение рассматриваемой функции с требуемой точностью в любой точке отрезка.



Пусть на отрезке $a \le x \le b$ задана сетка

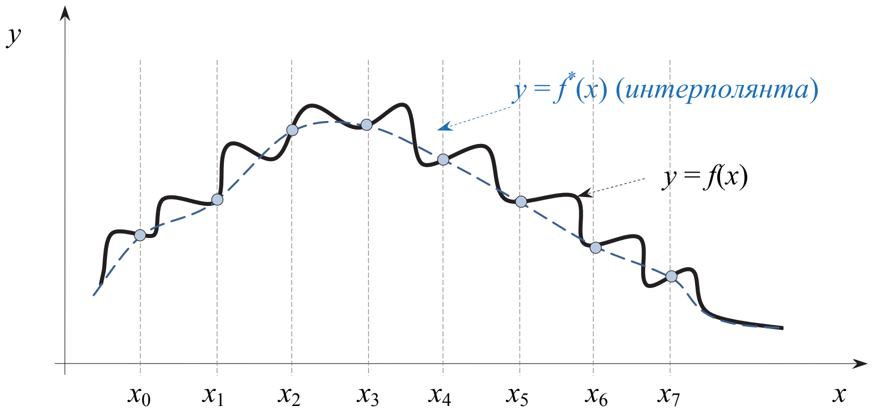
$$\overline{\omega} = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

в ее узлах заданы значения функции $y(x)$, равные

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,\ \ldots,\ y(x_i) = y_i,\ \ldots,\ y(x_n) = y_n\,.$$

Требуется построить **интерполянту** – *функцию f(x), совпадающую с функцией y(x), в узлах сетки*:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n\,.$$



Основная цель интерполяции – получить быстрый (экономичный) алгоритм вычисления значений $f(x)$ для значений x, не содержащихся в таблице данных.

Интерполирующие функции $f(x)$, как правило, строятся в виде линейных комбинаций некоторых элементарных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x), \qquad (5.2)$$

где $\{\Phi_k(x)\}$ – фиксированные линейно независимые функции, $C_0, C_1, \ldots, C_n$ – не определенные пока коэффициенты.

Из условий интерполяции: $f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n$ получим систему $n+1$ уравнений относительно коэффициентов $\{C_k\}$:

$$\begin{cases} C_0\,\Phi_0(x_0) + C_1\,\Phi_1(x_0) + \ldots + C_n\,\Phi_n(x_0) = y_0, \\ C_0\,\Phi_0(x_1) + C_1\,\Phi_1(x_1) + \ldots + C_n\,\Phi_n(x_1) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_0\,\Phi_0(x_n) + C_1\,\Phi_1(x_n) + \ldots + C_n\,\Phi_n(x_n) = y_n. \end{cases}$$

или

$$\sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,...,n\,.$$

Предположим, что система функций $\{\Phi_k(x)\}$ такова, что при любом невырожденном выборе узлов сетки $\overline{\omega}$ отличен от нуля определитель

$$\Delta(\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_n) = \begin{vmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \ldots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \ldots & \Phi_n(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \ldots & \Phi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Такую систему интерполяционных функций называют **чебышевской системой интерполяционных функций.**

В этом случае на данной сетке $\overline{\omega}$ по известным значениям $x_i, y_i, i = \overline{0,n}$ **однозначно** определяются коэффициенты $\{c_k\}_{k=\overline{0,n}}$ интерполяционного многочлена.

Теорема. *Для разрешимости задачи интерполяции необходимо и достаточно чтобы система функций* $\{\Phi_k(x)\}$ *образовывала на* $[a, b]$ *чебышевскую систему интерполяционных функций*.

В качестве интерполяционных функций чаще всего выбирают:

1) степенные, или полиномиальные, функции

$$\Phi_k(x) = x^k;$$

2) тригонометрические функции

$$\Phi_k(x) = \begin{Bmatrix} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{Bmatrix};$$

3) показательные функции

$$\Phi_k(x) = e^{kx}$$

и другие.

Задачи интерполяции применяются при построении приближенных методов вычисления интегралов, разностной аппроксимации дифференциальных уравнений на основе интегральных тождеств, в задачах оптимизации и др.

Тригонометрическая интерполяция

Построение интерполирующих функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x),$$

где $\Phi_k(x) = \begin{Bmatrix} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{Bmatrix}$ – фиксированные линейно независимые функции, $C_0, C_1, ..., C_n$ – не определенные пока коэффициенты, называется **тригонометрической интерполяцией.**

Вспомним раздел математического анализа, который называется гармоническим анализом.

Гармоническим анализом называют разложение функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, 2\pi]$, в ряд по функциям вида

$$\sin kx \text{ и } \cos kx,$$

где k-целое число.

Если функция $f(x)$ задана на другом отрезке, то линейной заменой переменной задачу можно свести к отрезку $[0, 2\pi]$.

Каждой абсолютно интегрируемой на отрезке $\left[0,2\pi\right]$ функции можно поставить в соответствие её **тригонометрический ряд Фурье**, то есть:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

коэффициенты ряда вычисляют по формулам Фурье–Эйлера:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx,\ k=0,1\ldots$$

и называют **коэффициентами ряда Фурье**.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *кусочно-линейная на отрезке* $[0, 2\pi]$, *то её тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке этого отрезка. Если* $S(x)$ – *сумма тригонометрического ряда Фурье, то есть*:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то справедливы следующие равенства:

1) $S(x) = \dfrac{[f(x+0) + f(x-0)]}{2}$ для любой точки из интервала $[0, 2\pi]$;

2) $S(0) = S(2\pi) = \dfrac{[f(0+0) + f(2\pi - 0)]}{2}$.

Для приближенного вычисления коэффициентов a_k и b_k можно использовать любые квадратурные формулы (формулы численного интегрирования одинарных определенных интегралов).

Ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kx\,dx,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kx\,dx,$$

$k=0,1\ldots$

Однако специальный вид подынтегральных функций $f(x)\sin kx$ или $f(x)\cos kx$ позволят получить простые квадратурные формулы, если интерполировать алгебраическим многочленом только функцию $f(x)$, а не всю подынтегральную функцию.

В частности, в случае кусочно-полиномиальной интерполяции

$$a_0 \cong \frac{1}{2N+1}\sum_{i=0}^{2N} f(x_i),$$

$$a_k \approx \frac{2}{2N+1}\sum_{i=0}^{2N} f(x_i)\cos\left(\frac{2\pi k}{2N+1}\right),$$

$$b_k \approx \frac{\alpha}{2N+1}\sum_{i=0}^{2N} f(x_i)\sin\left(\frac{2\pi k}{2N+1} i\right),$$

где $2N+1$ – число узлов квадратурной формулы; $\frac{2\pi}{2N+1}i$ – узлы квадратурной формулы, $i = 0,1,\ldots 2N$.

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx,$$

$k = 0,1\ldots$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[0,2\pi]$ таблицей значений $f(x_i)$ в равноотстоящих узлах

$$x_i = \frac{2\pi(i-1)}{2N+1}, (i = 1,2,\ldots N+1.)$$

Ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$a_0 \cong \frac{1}{2N+1}\sum_{i=0}^{2N} f(x_i),$$

$$a_k \approx \frac{2}{2N+1}\sum_{i=0}^{2N} f(x_i)\cos\left(\frac{2\pi k}{2N+1}\right),$$

$$b_k \approx \frac{\alpha}{2N+1}\sum_{i=0}^{2N} f(x_i)\sin\left(\frac{2\pi k}{2N+1} i\right),$$

Тригонометрическим многочленом степени N называют многочлен

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Задача тригонометрической интерполяции состоит в построении тригонометрического интерполяционного многочлена наименьшей степени, удовлетворяющего условиям $P_N(x_i) = f(x_i), \quad i = 1,\ldots,2N+1$.

Решением этой задачи является тригонометрический многочлен

$$P_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right),$$

коэффициенты которого вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{2N+1} \sum_{i=1}^{2N+1} f(x_i),$$

$$a_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{i=1}^{2N} f(x_i) \cos\left(\frac{2\pi k}{2N+1} i \right),$$

$$b_k = \frac{1}{2N+1} \sum_{i=1}^{2N+1} f(x_i) \sin\left(\frac{2\pi k}{2N+1} i \right).$$

Широкие возможности тригонометрической интерполяции следует из того факта, что с возрастанием N многочлен $P(x)$ аппроксимирует $f(x)$ с возрастающей точностью, т.е.

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|f(x)-P_N(x)\right|\to\infty.$$

Это утверждение справедливо для достаточно широкого класса функций. Этим тригонометрическая интерполяция существенно отличается от алгебраической интерполяции на системе равноотстоящих узлов. При алгебраическом интерполировании разность между функцией $f(x)$ и интерполяционным многочленом может быть как угодно большой всюду, кроме узлов интерполяции. Тригонометрическое интерполирование полностью свободно от этого недостатка.

Приближенное вычисление преобразования Фурье

При решении широкого круга задач, в частности в цифровом спектральном анализе, в цифровом моделировании фильтров, распознавании образов, анализе речевых сигналов, а также при решении многих задач численного анализа, возникает необходимость вычисления интегралов вида

$$\int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx, \tag{1}$$

где ω – произвольное действительное число.

Для вычисления интеграла (1) можно применить многие известные классические правила интегрирования такие, как формула трапеций, парабол и другие.

$$\int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx, \qquad (1)$$

Однако все эти формулы имеют существенный недостаток – они получаются с помощью замены интегрируемой функции алгебраическим многочленом невысокого порядка.

Поэтому следует ожидать, что они будут давать хорошую точность, если интегрируемая функция достаточно гладка и не очень быстро меняется.

В интеграле (1) интегрируемыми функциями являются произведением функций $f(x)\sin\omega x$ и $f(x)\cos\omega x$.

$$\int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx, \qquad (1)$$

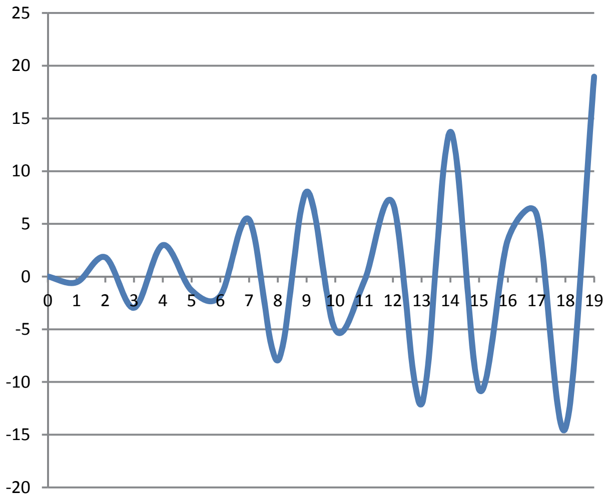


График функции $x \cdot \sin(10x)$

Если параметр ω – большое число, то функции $\cos\omega x$ и $\sin\omega x$ быстро колеблются. Для того чтобы точно проследить изменения произведений $f(x)\sin\omega x$ и $f(x)\cos\omega x$ даже при медленно меняющейся функции $f(x)$, нужно взять в квадратурной формуле большое число узлов. В результате вычисления могут стать трудными или даже невыполнимыми.

Чтобы построить квадратурную формулу, пригодную для вычисления интеграла (1) в широком диапазоне изменения параметра ω, необходимо учесть множители $\sin\omega x$ и $\cos\omega x$ $\left(e^{-i\omega x}\right)$ в подынтегральной функции.

$$\int_a^b f(x)e^{-i\omega x}dx, \qquad (1)$$

В прикладных задачах чаще всего требуется вычислить интеграл (1) не при одном, а сразу при нескольких значениях параметра ω вида:

$$\omega_k = k\Delta\omega, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Все это приводит к необходимости получить такую квадратурную формулу и алгоритм и реализации, в которых вычисления производят не последовательно для каждого значения параметра ω_k, а сразу для всей совокупности значений этого параметра.

Можно использовать квадратную формулу вида:

$$I = \int_a^b f(x) e^{-i\omega x} dx, \qquad (1)$$

$$I(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j A_j \,, \qquad (2)$$

где

$$A_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \exp(-\omega x) dx = \frac{1 - e^{-i\omega h}}{i\omega} e^{i\omega x_j};$$

$x_j = a + jh$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $j = \overline{0, n-1}$, x_j – узлы равномерной сетки на $[a, b]$,

$f_j = f(x_j)$ – значения функции $f(x)$ в узлах сетки.

Для значений $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{b-a}$, $\Delta\omega = \dfrac{2\pi}{b-a}$ формулу (2) можно переписать в виде:

$$I(\omega k) = \frac{1-e^{-i\omega kh}}{i\omega_k h} h e^{-i\beta\omega_k a} F(k)\,, \qquad (3)$$

$$I(\omega) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j A_j \qquad (2)$$

$$A_j = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \exp(-\omega x)dx = \frac{1-e^{-i\omega h}}{i\omega} e^{i\omega x_j}$$

где

$$F(k) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-i\frac{2\pi kj}{n}}\,. \qquad (4)$$

Переход от величины f_j к величине $F(k)$ $(j, k = \overline{0, n-1})$ называется **дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)**.

ДПФ является составной частью решения многих прикладных задач.

ДПФ

$$F(k)=\sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-i\frac{2\pi kj}{n}} \qquad \textbf{(4)}$$

Замечательным свойством ДПФ является возможность его обращения, то есть восстановление величин f_i по известным значениям $F(k)\,(j,k=0,\ldots,n-1)$. Эта операция осуществляется по формулам **обратного преобразования Фурье (ОДПФ)**

$$f_j=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(k)e^{i\frac{2kj}{n}}, \qquad (5)$$

Непосредственное осуществление ДПФ и ОДПФ по формулам (4) или (5) требует $Q(n^2)$ арифметических операций.

ДПФ

$$F(k)=\sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-i\frac{2\pi kj}{n}} \qquad \textbf{(4)}$$

ОДПФ

$$f_j=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} F(k)\, e^{i\frac{2kj}{n}} \qquad \textbf{(5)}$$

Для сокращения объёмы вычислений были разработаны алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Основная идея алгоритмов БПФ основана на том, что при составном n в правой части (4) или (5) можно выделить такие группы слагаемых, которые дают вклад во многие коэффициенты $F(k)$.

Наибольшее распространение прилучил алгоритм БПД, разработанный для случая $n=2^m$. Для его реализации требует $Q(n\log_2 n)$ арифметических операций.