8. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обыкновенными дифференциальными уравнениями (**ОДУ**) называются такие уравнения, которые содержат одну или несколько производных от искомой функции $y = y(x)$. Их можно записать в виде

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

где x – неизвестная переменная.

Примеры ОДУ: $y' = -y/x$ $\qquad y'' - y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$

Наивысший порядок n входящей в уравнение (1) производной называется **порядком дифференциального уравнения**.

Решением дифференциального уравнения (1) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая после ее подстановки в уравнение превращает его в тождество.

ОДУ n-го порядка содержит n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, т.е. **общее решение уравнения** (1) имеет вид

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{2}$$

Примеры общих решений ОДУ:

1) для уравнения $y' = -y/x$ решением будет функция $x \cdot y = C$

2) для уравнения $y'' - y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$ – функция $y = C_1 e^{3x} + C_2$

Частное решение дифференциального уравнения получается из общего, если произвольным постоянным (C_i) придать определенные значения.

В зависимости от способа задания дополнительных условий для получения частного решения дифференциального уравнения существуют два различных типа задач.

1. Если дополнительные условия задаются в одной точке, то задача называется **задачей Коши**.

Дополнительные условия в задаче Коши называются **начальными условиями**, а точка $x = x_0$, в которой они задаются, – **начальной точкой**.

$$\begin{cases} y' - \dfrac{3y}{x} = x^3 + x, \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

2. Если дополнительные условия задаются в более чем одной точке, т.е. при различных значениях независимой переменной, то такая задача называется **краевой**.

Дополнительные условия называются **граничными** (или **краевыми**) **условиями**. Обычно граничные условия задаются в двух точках $x = a$ и $x = b$ – граничных точках области решения дифференциального уравнения.

$$\begin{cases} y'' - y = 2x, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

8.1. Задача Коши

Требуется найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3}$$

и принимающую при $x = x_0$ заданное числовое значение y_0:

$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

При этом будем для определенности считать, что решение нужно получить для значений аргумента x, которые больше x_0 ($x > x_0$).

Для решения задачи Коши (3)–(4) будем использовать, так называемые, **разностные методы**.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

Введем последовательность точек (аргументов функции)

$$x_0, x_1, \ldots$$

и шаги (т.е. расстояния между соседними узлами)

$$h_i = x_{i+1} - x_i \quad (i = 0,1,\ldots).$$

По условию задачи имеем:

Значения аргументов функции x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	…
Значения функции $Y(x)$ *в точках* x_i	y_0	**?**	**?**	**?**	

В каждой точке x_i называемой **узлом**, вместо значений функции $Y(x_i)$ вводятся числа y_i, аппроксимирующие точное решение Y на заданном множестве точек.

Функцию y, заданную в виде таблицы $\{x_i, y_i\}$ $(i = 0,1,\ldots)$, называют **сеточной функцией**.

Прозводную в уравнении (3) можно заменить отношением конечных разностей.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \quad \textbf{(4)}$$

Например, с помощью левой конечной односторонней производной дифференциал в формуле (3) можно заменить таким отношением конечных разностей:

$$y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

В этом случае получим соотношение

$$\frac{y_1 - y_0}{h} = f\big(x_0, y(x_0)\big),$$

с помощью которого можно найти y_1:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

т.е. y_1 является значением функции, которая зависит от x_0, h, y_0:

$$y_1 = F(x_0, h, y_0).$$

В общем случае переходят от дифференциальной задачи (3)–(4) относительно функции $y(x)$ к разностной задаче относительно сеточной функции y:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, \ldots, y_{i-k+1}), \quad i = 1, 2, \ldots, \qquad (5)$$

$$y_0 = Y_0 \qquad (6)$$

Здесь разностное уравнение (5) записано в общем виде, а конкретное выражение его правой части зависит от способа аппроксимации производной. Для каждого численного метода получается свой вид уравнения (5).

Если в правой части (5) отсутствует y_{i+1}, т.е. значение y_{i+1} явно вычисляется по k предыдущим значениям $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, ..., y_{i-k+1}$:

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, ..., y_{i-k+1}), \quad i = 1, 2, ..., \quad \textbf{(5)}$$

$$y_0 = Y_0 \quad \textbf{(6)}$$

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_i, ..., y_{i-k+1}), \quad i = 1, 2, ...,$$

то разностная схема называется **явной**.

При этом получится k-шаговый метод:

при $k = 1$ – **одношаговый:**

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_i), \quad i = 1, 2, ..., ;$$

$k = 2$ – **двухшаговый:**

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_i, y_{i-1}), \quad i = 1, 2, ..., ;$$

и т.д.

В одношаговых методах для вычисления y_{i+1} используется лишь одно ранее найденное значение на предыдущем шаге y_i, в многошаговых – несколько предыдущих.

Если в правую часть уравнения (5) входит искомое значение y_{i+1}, то решение этого уравнения усложняется.

$$y_{i+1} = F(x_i, h_i, y_{i+1}, y_i, ..., y_{i-k+1}), \quad i = 1, 2, ..., \qquad \textbf{(5)}$$

$$y_0 = Y_0 \qquad \textbf{(6)}$$

В таких методах, называемых **неявными**, приходится решать уравнение (5) относительно y_{i+1} с помощью итерационных методов.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \quad \textbf{(4)}$$

8.1.1. ОДНОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ

1. Метод Эйлера

Метод Эйлера является простейшим численным методом решения задачи Коши для ОДУ (3)–(4).

Он основан на разложении искомой функции $y(x)$ в ряд Тейлора в окрестностях узлов $x = x_i$ $(i = 0,1,...)$, в котором отбрасываются все члены, содержащие производные второго и более высоких порядков.

Разложим функцию $y(x)$ в ряд Тейлора:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$y(x_i + \Delta x_i) = y(x_i) + y'(x_i)\Delta x_i + O(\Delta x_i^2) \qquad \textbf{(7)}$$

Заменим значения функции Y в узлах x_i значениями сеточной функции y_i. Учитывая, что по формуле (3)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

то положим:

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) = f(x_i, y_i).$$

Для простоты будем считать, что узлы равноотстоящие, т.е. шаг постоянный: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{const} \ \ (i = 0,1,\ldots)$.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$y(x_i + \Delta x_i) = y(x_i) + y'(x_i)\Delta x_i + O(\Delta x_i^2) \qquad \textbf{(7)}$$

$$y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)) = f(x_i, y_i)$$

Тогда, пренебрегая членами порядка $O(h^2)$, из равенства (7) получаем следующую разностную схему

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,... \qquad (8)$$

$$y(x_0) = y_0$$

которая называется **методом Эйлера.**

Построение сеточной функции $y(x)$ с помощью метода Эйлера

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,... \qquad \textbf{(8)}$$

$$y(x_0) = y_0$$

Сначала сеточная функция задана только значениями аргументом и значением функции в начальной точке:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
y	y_0	?	?	?	?		?

Задача состоит в получение значений функций для остальных аргументов.

Полагая $i = 0$, с помощью соотношения (8) находим значение сеточной функции y_1 при $x = x_1$:

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,... \qquad \textbf{(8)}$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_n
y	y_0	$\mathbf{y_1}$	?	?	?		?

Аналогично находятся значения сеточной функции в других узлах:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,\ldots \qquad \textbf{(8)}$$
$$y(x_0) = y_0$$

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4		y_n

Для вычисления значения сеточной функции y_{i+1} в любом узле x_{i+1} требуется знание ее значения y_i в предыдущем узле x_i.

В связи с этим метод Эйлера относится к **явным одношаговым**.

Суммарная погрешность равна $nO(h^2)$. Таким образом, метод Эйлера имеет первый порядок точности.

2. Метод Эйлера с пересчетом

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,... \qquad \textbf{(8)}$$

$$y(x_0) = y_0$$

В методе Эйлера в правой части (8) вместо $f(x_i, y_i)$ возьмем среднее арифметическое значение $f(x_i, y_i)$ и $f(x_{i+1}, y_{i+1})$.

В результате получим такую разностную схему:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0,1,... \qquad (9)$$

Схема (9) является **неявной**, так как искомое значение y_{i+1} входит в обе части соотношения (9).

Для вычисления y_{i+1} с помощью схемы (9) можно применить один из итерационных методов.

Если имеется хорошее начальное приближение y_i, то можно построить решение с использованием двух итераций следующим образом.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0,1,... \qquad \textbf{(9)}$$

$y(x_0) = y_0$

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,... \qquad \textbf{(8)}$$

$y(x_0) = y_0$

Пусть y_i является начальным приближением значения искомой функции в точке x_i. Вычисляем первое приближение $\tilde{y}_{i+1}$ по формуле Эйлера (8):

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \qquad (10)$$

Новое значение $\tilde{y}_{i+1}$ подставляем вместо y_{i+1} в правую часть соотношения (9):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]. \qquad (11)$$

Алгоритм (10), (11) можно записать в виде одного соотношения:

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad \textbf{(10)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})] \quad \textbf{(11)}$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0,1,... \qquad (12)$$

Эти рекуррентные соотношения описывают новую разностную схему, являющуюся модификацией метода Эйлера, которая называется **методом Эйлера с пересчетом** (модифицированный метод).

Этот метод имеет второй порядок точности.

С помощью метода Эйлера с пересчетом можно производить **контроль точности решения** путем сравнения значений $\tilde{y}_{i+1}$ и y_{i+1} и выбора на основании этого соответствующей величины шага h в каждом узле:

Метод Эйлера с пересчетом

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0,1,...$$

$$y(x_0) = y_0$$

если $|\tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}|$ сравним с заданной погрешностью, то шаг можно увеличить, иначе h следует уменьшить.

Пример. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = x^2 - \sin 2x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,\ldots \qquad \textbf{(8)}$$

$$y(x_0) = y_0$$

Пусть шаг сетки ***h* = 0,2**. Тогда $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$ и т.д.

В нашем случае

$$f(x, y) = x^2 - \sin 2x.$$

Тогда получаем следующую схему:

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i^2 - \sin 2x_i).$$

Используя эту схему, последовательно получаем:

$y_1 = y_0 + h(x_0^2 - \sin 2x_0) = 2 + 0{,}2(0 - 0) = 2,$

$y_2 = y_1 + h(x_1^2 - \sin 2x_1) = 2 + 0{,}2(0{,}2 - \sin(2 \cdot 0{,}2)) = 1{,}930,$

$y_3 = y_2 + h(x_2^2 - \sin 2x_2) = 1{,}930 + 0{,}2(0{,}4 - \sin(2 \cdot 0{,}4)) = 1{,}819,$ и т.д.

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i (методом Эйлера)	2	2,000	1,930	1,819	1,704	1,632	1,650	1,803	2,128	2,652	3,389

Если шаг сетки уменьшить в 2 раза (***h* = 0,1**), то получим следующие значения:

$y_1 = y_0 + h(x_0^2 - \sin 2x_0) = 2 + 0{,}1(0 - 0) = 2,$

$y_2 = y_1 + h(x_1^2 - \sin 2x_1) = 2 + 0{,}1(0{,}1 - \sin(2 \cdot 0{,}1)) = 1{,}981,$

$y_3 = y_2 + h(x_1^2 - \sin 2x_1) = 1{,}981 + 0{,}1(0{,}2 - \sin(2 \cdot 0{,}2)) = 1{,}946,$

$y_4 = y_3 + h(x_1^2 - \sin 2x_1) = 1{,}946 + 0{,}1(0{,}3 - \sin(2 \cdot 0{,}3)) = 1{,}899,$ и т.д.

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	2	2,000	1,981	1,946	1,899	1,843	1,784	1,727	1,677	1,641	1,625

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
y_i	1,634	1,674	1,750	1,868	2,030	2,241	2,503	2,818	3,186	3,608

$$f(x_i, y_i) = x_i^2 - \sin 2x_i$$

$$f\big(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)\big) =$$
$$= x_{i+1}^2 - \sin 2x_{i+1}$$

Метод Эйлера с пересчетом

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0,1,\ldots$$

$$y(x_0) = y_0$$

Тогда получаем следующую схему:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\big((x_i^2 - \sin 2x_i) + (x_{i+1}^2 - \sin 2x_{i+1})\big).$$

Вычислим значения функции для шага $h = 0{,}2$.

Точное решение заданной задачи Коши равно следующему выражению:

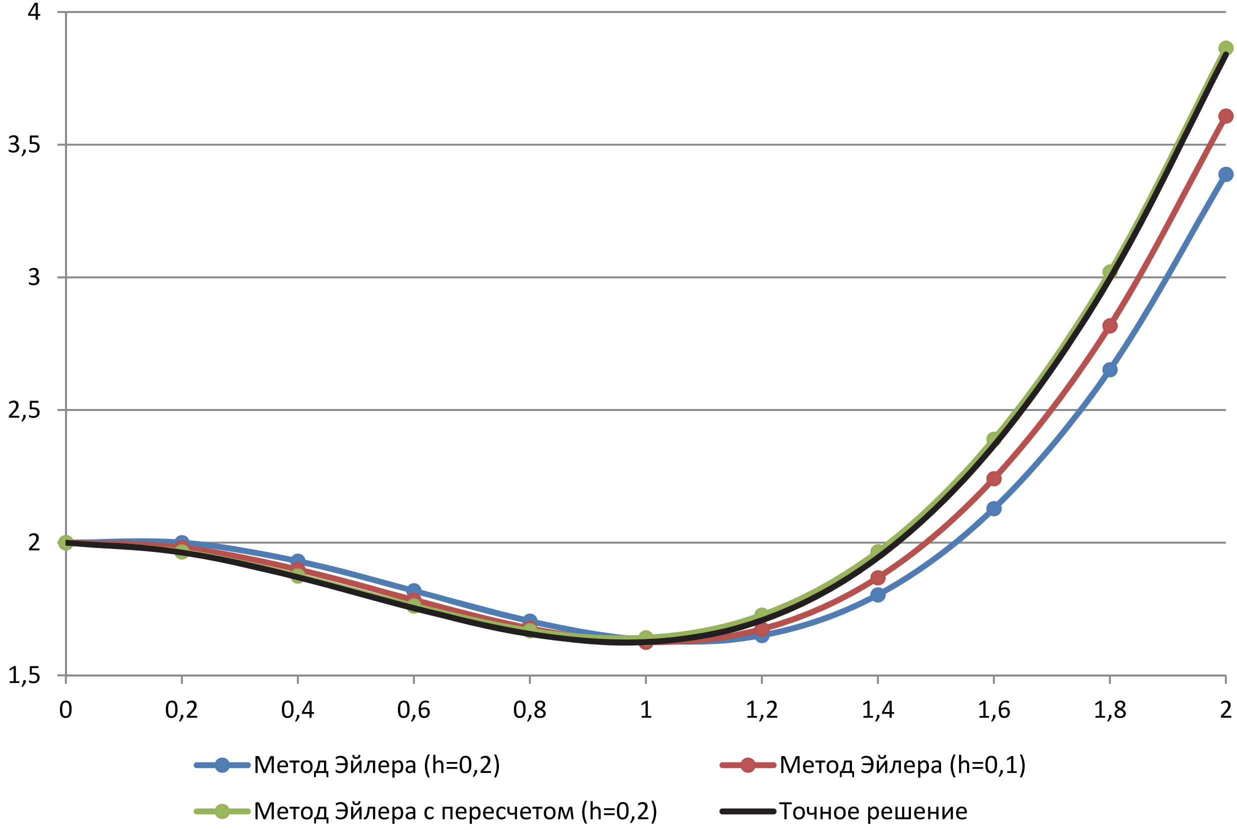
$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{\cos\ 2x}{2} + \frac{3}{2}.$$

Будем использовать это выражения для контроля точности.

Сводная таблица решения задачи Коши

$$\begin{cases} y' = x^2 - \sin 2x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
y_i (методом Эйлера, h = 0,2)	2	2,000	1,930	1,819	1,704	1,632	1,650	1,803	2,128	2,652	3,389
y_i (методом Эйлера, h = 0,1)	2	1,981	1,899	1,784	1,677	1,625	1,674	1,868	2,241	2,818	3,608
y_i (методом Эйлера с пересчетом, h = 0,2)	2	1,965	1,874	1,761	1,668	1,641	1,727	1,966	2,390	3,020	3,864
y_i (точное)	2	1,963	1,870	1,753	1,656	1,625	1,707	1,944	2,366	2,996	3,840


4
3,5
3
2,5
2
1,5
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
Метод Эйлера (h=0,2)
Метод Эйлера (h=0,1)
Метод Эйлера с пересчетом (h=0,2)
Точное решение

3. Метод Рунге-Кутта

Задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

Метод Рунге-Кутты используют для расчета стандартных моделей достаточно часто, так как при небольшом объеме вычислений он обладает хорошей точностью.

Для построения разностной схемы интегрирования воспользуемся разложением искомой функции $y(x)$ в ряд Тейлора:

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \cdots \qquad (13)$$

Заменим вторую производную в этом разложении выражением

$$y''(x_k) = \big(y'(x_k)\big)' = f'\big(x_k, y(x_k)\big) \approx \frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f\big(x_k, y(x_k)\big)}{\Delta x}, \qquad (14)$$

где $\tilde{x} = x_k + \Delta x$; $\tilde{y} = y(x_k + \Delta x)$.

Причем Δx в формуле (14) подбирается из условия достижения наибольшей точности записанного выражения.

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + y'(x_k)h + y''(x_k)\frac{h^2}{2} + \cdots \qquad \textbf{(13)}$$

$$y''(x_k) \approx \frac{f(\tilde{x},\tilde{y}) - f\big(x_k, y(x_k)\big)}{\Delta x}, \qquad \textbf{(14)}$$

Для дальнейших выкладок произведем замену $\tilde{y}$ разложением в ряд Тейлора:

$$\tilde{y} = y(x_k + \Delta x) = y(x_k) + y'(x_k)\Delta x + \cdots \qquad (15)$$

Введем обозначение: $y_k = y(x_k)$. Тогда для исходного уравнения (13) построим вычислительную схему:

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h + \frac{h^2}{2\Delta x}\Big(f\big(x_k + \Delta x,\ y_k + {y'}_k\Delta x\big) - f(x_k, y_k)\Big), \qquad (15)$$

которую преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right)f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x}f\big(x_k + \Delta x,\ y_k + {y'}_k\Delta x\big)\right] = \\ &= y_k + h\left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right)f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x}f\left(x_k + \frac{\Delta x}{h}h,\ y_k + f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h}h\right)\right]. \end{aligned} \qquad (16)$$

$$y_{k+1} = y_k + h\left[\left(1 - \frac{h}{2\Delta x}\right) f(x_k, y_k) + \frac{h}{2\Delta x} f\left(x_k + \frac{\Delta x}{h}h,\ y_k + f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h}h\right)\right]. \quad \textbf{(16)}$$

Введем следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{h}{2\Delta x}, \qquad \beta = 1 - \frac{h}{2\Delta x}, \qquad \gamma = \frac{\Delta x}{h}, \qquad \delta = f(x_k, y_k)\frac{\Delta x}{h}.$$

Эти обозначения позволяют записать предыдущее выражение в форме:

$$y_{k+1} = y_k + h[\beta f(x_k, y_k) + \alpha f(x_k + \gamma h,\ y_k + \delta h)].$$

Очевидно, что все введенные коэффициенты зависят от величины Δx и могут быть определены через коэффициент α, который в этом случае играет роль параметра:

$$\beta = 1 - \alpha, \qquad \gamma = \frac{1}{2\alpha}, \qquad \delta = f(x_k, y_k)\frac{2}{\alpha}.$$

Окончательно схема Рунге-Кутта принимает вид:

$$y_{k+1} = y_k + h\left[(1 - \alpha) f(x_k, y_k) + \alpha f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha},\ y_k + f(x_k, y_k)\frac{2h}{\alpha}\right)\right]. \qquad (17)$$

$$y_{k+1} = y_k + h\left[(1-\alpha)f(x_k, y_k) + \alpha f\left(x_k + \frac{h}{2\alpha},\ y_k + f(x_k, y_k)\frac{2h}{\alpha}\right)\right]. \qquad \textbf{(17)}$$

При $\alpha = 0$ получаем как частный случай уже известную схему Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

При $\alpha = 0{,}5$ получаем как частный случай схему Эйлера с пересчетом

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\big(x_k + h,\ y_k + hf(x_k, y_k)\big)\right].$$

Метод Рунге-Кутта 4-го порядка

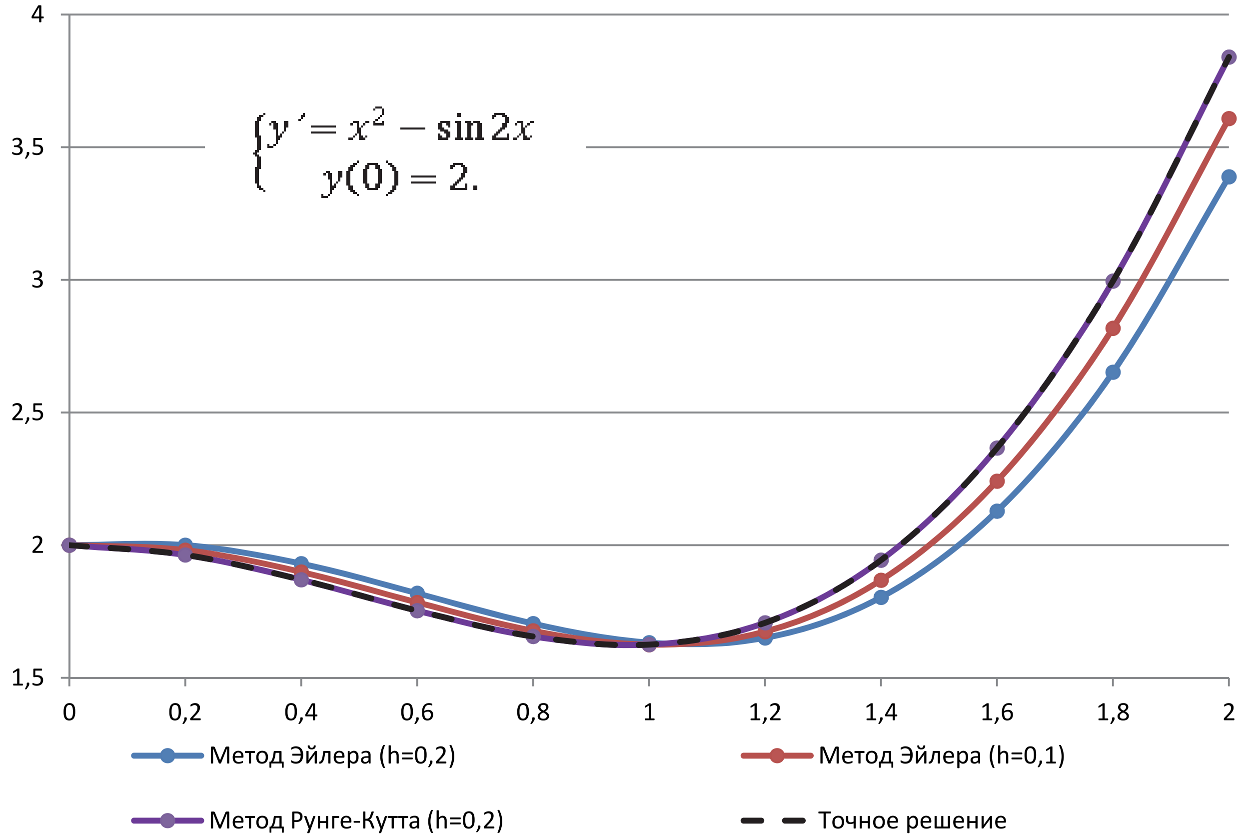
Рассмотрим разностную схему Рунге-Кутта четвертого порядка точности, которую на практике использует чаще других:

$$
\begin{aligned}
&y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad i = 0,1,\ldots,\\
&k_0 = f(x_i, y_i), \quad k_1 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_0\right),\\
&k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right), \quad k_3 = f(x_i + h, y_i + hk_2).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Таким образом, метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения $f(x, y)$.

Метод Рунге-Кутта (18) требует большего объема вычислений, однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с большим шагом. Другими словами, для получения результатов с одинаковой точностью в методе Эйлера потребуется значительно меньший шаг, чем в методе Рунге-Кутта.

С уменьшением шага h локальная погрешность метода Эйлера снижается, но при этом возрастет количество узлов, что неблагоприятно повлияет на точность результатов. Поэтому метод Эйлера применяется достаточно редко при небольшом числе расчетных точек. Наиболее употребительным одношаговым методом является метод Рунге-Кутта.



$\begin{cases} y' = x^2 - \sin 2x \\ y(0) = 2. \end{cases}$
4
3,5
3
2,5
2
1,5
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
Метод Эйлера (h=0,2)
Метод Эйлера (h=0,1)
Метод Рунге-Кутта (h=0,2)
Точное решение

Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью метода Рунге-Кутта

Рассмотренные методы могут быть использованы также для решения систем дифференциальных уравнений. Покажем это для системы двух уравнений вида

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y, z),$$
$$\frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z).$$

Начальные условия зададим в виде

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0 .$$

По аналогии с (18) запишем формулу Рунге-Кутта для системы двух уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = \psi(x, y, z). \qquad y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3),$$
$$z_{i+1} = z_i + \frac{1}{6}(l_0 + 2l_1 + 2l_2 + l_3), \qquad i = 0,1,\ldots$$

$$k_0 = h\phi(x_i, y_i, z_i), \quad l_0 = h\psi(x_i, y_i, z_i),$$

$$k_1 = h\phi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}, z_i + \frac{l_0}{2}\right), \quad l_1 = h\psi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}, z_i + \frac{l_0}{2}\right),$$

$$k_2 = h\phi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right), \quad l_2 = h\psi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}, z_i + \frac{l_1}{2}\right),$$

$$k_3 = h\phi\left(x_i + h, y_i + k_2, z_i + l_2\right), \quad l_3 = h\psi\left(x_i + h, y_i + k_2, z_i + l_2\right).$$

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений второго (и выше) порядка с помощью метода Рунге-Кутта

К решению систем уравнений сводятся также задача Коши для уравнений высших порядков. Рассмотрим задачу Коши для уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = z_0, \end{cases}$$

Данную задачу можно свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = f(x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dx} = z, \\ y(x_0) = y_0,\ z(x_0) = z_0, \end{cases}$$

Особенностью одношаговых методов является то, что *для получения решения в каждом новом расчетном узле достаточно иметь значение сеточной функции лишь в предыдущем узле*.

Это позволяет непосредственно начать счет при $i = 0$ по известным начальным значениям.

Эта особенность допускает изменение шага в любой точке в процессе счета, что позволяет строить численные алгоритмы с автоматическим выбором шага.

8.1.2. МНОГОШАГОВЫЕ МЕТОДЫ

Задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \mathbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \mathbf{(4)}$$

Для вычисления значений y_{i+1} с помощью k-шагового метода используются результаты не одного, а k предыдущих шагов, т.е. значения $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots, y_{i-k+1}$.

Многошаговые методы могут быть построены следующим образом. Запишем исходное уравнение $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ (3) в виде

$$dy(x) = f(x, y)dx \qquad (19)$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по x на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y)dx \qquad (20)$$

Интеграл от левой части (20) вычисляется легко:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy(x) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \quad \textbf{(20)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy(x) = y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i. \quad (21)$$

Для вычисления интеграла от правой части уравнения (20) сначала строится интерполяционный многочлен $P_{k-1}(x)$ степени $(k-1)$ для аппроксимации функции $f(x, y)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ по значениям

$$f(x_{i-k+1}, y_{i-k+1}),\ f(x_{i-k+2}, y_{i-k+2}),\ \ldots,\ f(x_i, y_i).$$

После этого можно положить, что

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx. \quad (22)$$

Приравнивая выражения, полученные в (21) и (22), получаем формулу для определения неизвестного значения сеточной функции y_{i+1} в узле x_{i+1}:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dy(x) = y(x_{i+1}) - y(x_i) \approx y_{i+1} - y_i. \qquad \textbf{(21)}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx. \qquad \textbf{(22)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx\,. \qquad (23)$$

На основе этой формулы можно строить различные многошаговые методы любого порядка точности. Порядок точности зависит от степени интерполяционного многочлена $P_{k-1}(x)$, для построения которого используются значения сеточной функции $y_i, y_{i-1}, ..., y_{i-k+1}$ вычисленные на k предыдущих шагах.

1. Метод Адамса

> **Задача Коши**
>
> $$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$
>
> $$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

Широко распространенным семейством многошаговых методов являются **методы Адамса**. Простейший из них, получающийся при $k = 1$, совпадает с рассмотренным ранее методом Эйлера первого порядка точности.

В практических расчетах чаще всего используется вариант метода Адамса 4-го порядка. Именно его обычно и называют методом Адамса. Рассмотрим этот метод.

Пусть найдены значения $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ в четырех последовательных узлах ($k = 4$). При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части уравнения (3):

$$f_{i-3} = f(x_{i-3}, y_{i-3});$$
$$f_{i-2} = f(x_{i-2}, y_{i-2});$$
$$f_{i-1} = f(x_{i-1}, y_{i-1});$$
$$f_i = f(x_i, y_i).$$

Задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_{k-1}(x)dx \qquad \textbf{(23)}$$

В качестве интерполяционного $P_3(x)$ в (23) можно взять многочлен Ньютона. В случае постоянного шага h конечные разности для правой части в узле x_i имеют вид:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1},$$
$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

Тогда **разностная схема четвертого порядка метода Адамса** записывается в виде:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i. \quad (24)$$

Сравнивая метод Адамса с методом Рунге-Кутта той же точности, отмечаем его экономичность, поскольку он требует вычисления лишь одного значения правой части на каждом шаге (метод Рунге-Кутта – четырех).

Задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$f_{i-3} = f(x_{i-3}, y_{i-3});$$
$$f_{i-2} = f(x_{i-2}, y_{i-2});$$
$$f_{i-1} = f(x_{i-1}, y_{i-1});$$
$$f_i = f(x_i, y_i)$$

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1},$$
$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

Но метод Адамса неудобен тем, что невозможно начать счет по одному лишь известному значению y_0. Расчет может быть начат лишь с узла x_3.

Значения y_1, y_2, y_3, необходимые для вычисления y_4, нужно получить каким-либо другим способом (например, методом Рунге-Кутта), что существенно усложняет алгоритм.

Кроме того, метод Адамса не позволяет (без усложнения формул) изменить шаг h в процессе счета; этого недостатка лишены одношаговые методы.

2. Метод прогноза и корректировки

Рассмотрим еще одно семейство многошаговых методов, которые используют **неявные схемы**, – **метод прогноза** и **коррекции** (они называются также методами **предиктор-корректор**). Суть этих методов состоит в следующем.

На каждом шаге вводятся два этапа, использующих многошаговые методы:

1) с помощью явного метода (**предиктора**) по известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение $y_{i+1} = y_{i+1}^{(0)}$ в новом узле;

2) используя неявный метод (**корректор**), в результате итераций находятся приближения $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(2)}, \ldots$

Один из вариантов метода прогноза и коррекции может быть получен на основе метода Адамса четвертого порядка:

на этапе предиктора

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}); \qquad (25)$$

на этапе корректора

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \qquad (26)$$

Явная схема (25) используется на каждом шаге один раз, а с помощью неявной схемы (26) строится итерационный процесс вычисления y_{i+1}, поскольку это значение входит в правую часть выражения $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$. Расчет по этому методу может быть начат только со значения y_4. Необходимые при этом y_1, y_2, y_3 находятся по методу Рунге-Кутта, y_0 задается начальным условием.

Задача Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad \textbf{(3)}$$

$$y(x_0) = y_0 \qquad \textbf{(4)}$$

$$f_{i-3} = f(x_{i-3}, y_{i-3});$$
$$f_{i-2} = f(x_{i-2}, y_{i-2});$$
$$f_{i-1} = f(x_{i-1}, y_{i-1});$$
$$f_i = f(x_i, y_i)$$

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1},$$
$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$
$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

8.1.3. Повышение точности результатов

Точность численного решения можно повысить различными путями. Например, путем уменьшения значения шага h. Однако этот путь ограничен требованием экономичности, поскольку получение решения с необходимой точностью может потребовать огромного объема вычислений.

На практике часто для повышения точности численного решения без существенного увеличения машинного времени используется **метод Рунге**. Он состоит в том, что проводятся повторные расчеты по одной разностной схеме с различными шагами. Уточненное решение в совпадающих при разных расчетах узлах строится с помощью проведенной серии расчетов.

Предположим, что проведены две серии расчетов по схеме порядка k соответственно с шагами h и $\frac{h}{2}$. В результате расчетов получены множества значений сеточной функции y_h и $y_{h/2}$. Тогда в соответствии с методом Рунге уточненное значение y_h^* сеточной функции в узлах сетки с шагом h вычисляется по формуле

$$y_h^* = \frac{2^k y_{h/2} - y_h}{2^k - 1} + O(h^{k+1}).$$

Порядок точности этого решения равен k+1, хотя используемая разностная схема имеет порядок точности k. Таким образом, решение задачи на двух сетках позволяет на порядок повысить точность результатов.

Для схемы Эйлера первого порядка точности (k = 1) формула Рунге принимает вид:

$$y_h^* = 2y_{h/2} - y_h + O(h^2).$$

Аналогично можно записать формулу для уточнения решения, получаемого по методу Рунге-Кутта при k = 4.