МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Методы вычислений»

Методические указания
по выполнения лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 9
«Численное интегрирование»

Чебоксары
2019

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Ознакомление с общими принципами численного интегрирования функций, заданных таблично или имеющих сложное аналитическое выражение.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задача численного интегрирования функций заключается в вычислении приближенного значения определенного интеграла

$$I=\int_a^b f(x)\rho(x)dx,\quad (\rho(x)>0 \text{ - весовая функция})$$

на основе ряда значений подынтегральной функции в узлах $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$: $\left\{f(x)\big|_{x=x_k}=f(x_k)=y_k\right\}$. Для численного решения подынтегральную функцию $f(x)$ заменяют интерполяционным полиномом, тем самым, переходя от интегрирования к суммированию значений функции в узлах. Например, если использовать интерполяционные многочлены Лагранжа, то получим формулу Ньютона-Котесса

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathrm{K}_i+R_n[f],$$

где $h=\dfrac{b-a}{n}$; $f(x_i)=f(a+ih)$; $\mathrm{K}_i=\dfrac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\dfrac{1}{n}\int_0^n\dfrac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(q-i)}dq$ – коэффициенты Котесса ($\sum_{i=0}^{n}\mathrm{K}_i=1,\ \mathrm{K}_i=\mathrm{K}_{n-i}$); $R_n[f]$ – остаточный член.

В зависимости от выбора степени интерполяционного многочлена, получаются различные формулы.

2.2. Важнейшие частные случаи формулы Ньютона-Котесса

Пусть отрезок интегрирования $[a, b]$ разбит на n частей с шагом $h=\dfrac{b-a}{n}$.

2.2.1. Формулы прямоугольников (степень интерполяционного полинома равна 1)

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \text{ (формула левых прямоугольников);}$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \text{ (формула правых прямоугольников);}$$

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) \text{ (формула средних прямоугольников);}$$

где $x_i=a+ih\quad (i=0,1,2,\ldots,n)$.

Остаточные члены этих формул соответственно равны

$$R_{\text{тр}}(f)=\frac{(b-a)^2}{2n}f'(\xi),\quad R_{\text{тр}}(f)=-\frac{(b-a)^2}{2n}f'(\xi),\quad R_{\text{тр}}(f)=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi),$$

где $a\le\xi\le b$.

2.2.2. Формула трапеций (степень интерполяционного полинома равна 1)

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + [y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}] + \frac{1}{2}y_N\right),$$

где $y_i = f(x_i) \quad (i = \overline{0,n})$, причем $R_n(f) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad a \le \xi \le b$.

2.2.3. Формула Симпсона (число *n* – обязательно четное) (степень интерполяционного полинома равна 2)**:**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})],$$

причем $R_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{IV}(\xi), \quad a \le \xi \le b$.

3. ЗАДАНИЕ

Используя методы прямоугольников, трапеций и Симпсона вычислить следующие интегралы.

1.	$\int_0^1 \cos(x + x^3)dx$	2.	$\int_0^1 \sin(x^4 + 2x^3 + x^2)dx$	3.	$\int_1^2 \sin x^3 dx$
4.	$\int_0^1 e^{\sin x} dx$	5.	$\int_0^1 \sin xe^{-x^2} dx$	6.	$\int_1^2 x^{-1} e^x dx$
7.	$\int_0^1 e^{\cos x} dx$	8.	$\int_0^1 \mathrm{ch}\, x^2 dx$	9.	$\int_0^{\pi/4} x \sin x^3 dx$
10.	$\int_0^1 \cos x^2 dx$	11.	$\int_0^1 \sin(x + x^3)dx$	12.	$\int_0^{\pi/4} x \cos x^3 dx$
13.	$\int_0^1 \cos xe^{-x^2} dx$	14.	$\int_1^2 \sin 2xe^{-x^2} dx$	15.	$\int_{0.1}^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$
16.	$\int_1^2 e^{-\left(x + \frac{1}{x}\right)} dx$	17.	$\int_1^2 \ln x(x+1)^{-1} dx$	18.	$\int_1^2 x^{-1} \ln(1 + x)dx$
19.	$\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{x}e^{-x^2} dx$	20.	$\int_0^1 \cos x^3 dx$	21.	$\int_1^2 \mathrm{ch}\, x^2 dx$
22.	$\int_0^1 \cos x^2 dx$	23.	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin x dx$	24.	$\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \cos x)dx$
25.	$\int_0^{\pi} \cos(2 \sin x)dx$	26.	$\int_0^{\pi} x^2 e^{-x^2} dx$	27.	$\int_{0.1}^2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$
28.	$\int_0^{\pi} x^4 e^{-x^2} dx$	29.	$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos(x + x^3)dx$	30.	$\int_0^{\pi} \sin(2 \cos x)dx$