МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Методы вычислений»

Методические указания
по выполнения лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 8
«Численное дифференцирование»

Чебоксары
2019

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Ознакомление с общими принципами численного дифференцирования функций заданных таблично или имеющих сложное аналитическое выражение.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При решении практических задач часто нужно найти производные указанных порядков от функции $y = f(x)$, заданной таблично. Возможно также, что в силу сложности аналитического выражения функции $f(x)$ непосредственное дифференцирование ее затруднительно. В этих случаях обычно прибегают к численному дифференцированию.

Для вывода формул приближенного дифференцирования заменяют данную функцию $f(x)$ на интересующем отрезке $[a, b]$ интерполирующей функцией $P(x)$ (чаще всего полиномом), а затем полагают: $f'(x) = P(x)$ при $a \le x \le b$.
Аналогично поступают при нахождении производных высших порядков функции $f(x)$.

Погрешность производной $P'(x)$ выражается формулой $r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x)$, где $R(x)$ – погрешность интерполяции, т.е. погрешность производной интерполирующей функции равна производной от погрешности этой функции.

Для вычисления производной часто применяют аналитические методы: аппроксимация производной; метод неопределенных коэффициентов; использование интерполяционных формул.

2.1. Формула, основанная на использование интерполяционных полиномов Лагранжа

Формула Лагранжа для равноотстоящих узлов имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)},$$

где y_i – значение интерполируемой функции в узле интерполяции x_i $(i = \overline{1,n})$, $t^{[n+1]} = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n)$, $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Тогда, учитывая, что $x = x_0 + th$, а также $\dfrac{dx}{dt} = h$, получаем следующую формулу численного дифференцирования:

$$f'(x) \approx f'(x_0 + th) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \frac{d}{dt}\left[\frac{t^{[n+1]}}{t-i}\right].$$

Если допустить, что функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз, то оценка погрешности численного дифференцирования будет равна

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left\{f^{(n+1)}(\xi) w'_{\overline{0,n}}(x) + w_{\overline{0,n}}(x) \frac{d}{dx}\left[f^{(n+1)}(\xi)\right]\right\},$$

где $\xi = \xi(x)$ – значение из отрезка $[a, b]$, отличное от узлов и x; $w_{\overline{0,n}}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

2.2. Формула, основанная на использование интерполяционных полиномов Ньютона

Для функции $f(x)$, заданной своими значениями в равноотстоящих узлах первый интерполяционный многочлен Ньютона имеет вид:

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta\ y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{h}$.

Дифференцируя $N_n(x_0 + th)$ по t, получим:

$$f'(x) \approx N_n'(x_0 + th) \approx \frac{1}{h}\left[\Delta\ y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2t^3 - 9t^2 + 11t - 3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right].$$

Замечание: Каждый раз, вычисляя значение производной $f(x)$ в фиксированной точке x, в качестве x_0 следует брать ближайшее слева узловое значение аргумента.

Если исходным значением x оказывается один из узлов таблицы, то, учитывая, что в этом случае $x = x_0$, t=0, формула упрощается:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \ldots\right).$$

Для оценки погрешности дифференцирования используется формула

$$r_n(x_0) \approx \frac{(-1)^n \Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}.$$

3. ЗАДАНИЕ

С помощью интерполяционных формул Лагранжа и Ньютона найти значение первой производной при заданном значении аргумента для функции, заданной таблично.

Таблица 1

x	$f(x)$
2,4	3,526
2,6	3,782
2,8	3,945
3,0	4,043
3,2	4,104
3,4	4,155
3,6	4,222
3,8	4,331
4,0	4,507
4,2	4,775
4,4	5,159
4,6	5,683

Таблица 2

x	$f(x)$
1,5	10,517
2,0	10,193
2,5	9,807
3,0	9,384
3,5	8,977
4,0	8,637
4,5	8,442
5,0	8,482
5,5	8,862
6,0	9,707
6,5	11,132
7,0	13,302

Таблица 1 – **для нечетных вариантов**. Им надо найти значения производных в точках: 1) $x = 2{,}4 + 0{,}05n$; 2) $x = 3{,}12 + 0{,}03n$; 3) $x = 4{,}5 - 0{,}06n$; 4) $x = 4{,}040 - 0{,}04n$, где n – номер варианта.

Таблица 2 – **для четных вариантов**. Им надо найти значения производных в точках: 1) $x = 1{,}6 + 0{,}08n$; 2) $x = 3{,}27 + 0{,}11n$; 3) $x = 6{,}3 - 0{,}12n$; 4) $x = 5{,}85 - 0{,}09n$, где n – номер варианта.