МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Методы вычислений»

Методические указания
по выполнения лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 7
«Интерполяций функций кубическими сплайнами»

Чебоксары
2019

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Ознакомление с общими принципами интерполяции функций кубическими сплайнами.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a,b]$, а на каждом частном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

Пусть на отрезке $[a,b]$ определена непрерывная функция $f(x)$; задана невырожденная сетка $\overline{\omega}_n$

$$\overline{\omega}_n = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}.$$

Обозначим значения $f(x)$ в узлах сетки через $y_i = f(x_i)$. Тогда **кубическим сплайном** $S_3(x) \equiv S(x)$ на данной сетке $\overline{\omega}_n$ называется кусочно-полиномиальная 3-го порядка функция, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) на каждом частичном интервале $[x_{k-1}, x_k]$ многочлен $S(x)$ – многочлен третьей степени:

$$S(x) = a_k + b_k(x - x_{k-1}) + c_k(x - x_{k-1})^2 + d_k(x - x_{k-1})^3 \tag{1}$$
$$x_{k-1} \le x \le x_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

2) функция S(x), ее первая и вторая производные непрерывны на $[a,b]$, т.е.

$$S^{(l)}(x-0) = S^{(l)}(x+0), \quad \forall x \in [a,b], \quad l = 0,1,2 \tag{2}$$

(нужно проверять лишь в узлах сетки)

3) в узлах сетки $\overline{\omega}_n$ функция S(x) удовлетворяет условиям интерполяции

$$S(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

4) дополнительным, в некотором смысле естественным, условием для единственности определения сплайна является краевое условие в граничных точках сетки x_0 и x_n. Ограничимся рассмотрением случая нулевой кривизны сплайна $S(x)$. Тогда в этих точках

$$S''(x_0) = S''(x_n) = 0. \tag{4}$$

Для решения поставленной задачи необходимо на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ построить кубический сплайн в виде (1), где $\{a, b, c, d\}$ - неизвестные коэффициенты (всего их $4n$). Для этого сначала найдем производные функции $S(x)$:

$$\begin{aligned} S'(x) &= b_k + 2c_k(x - x_{k-1}) + 3d_k(x - x_{k-1})^2, \\ S''(x) &= 2c_k + 6d_k(x - x_{k-1}). \end{aligned} \tag{5}$$

В точке x_{k-1} имеем

$$\begin{aligned} S(x_{k-1}) &= a_k, \\ S'(x_{k-1}) &= b_k, \\ S''(x_{k-1}) &= c_k. \end{aligned} \tag{6}$$

Учитывая (3) имеем:

$$S(x_{k-1}) = a_k = y_{k-1}, k = \overline{1,n}, \tag{7}$$

т.е. получили *n* уравнений для нахождения коэффициентов $\{a\}$. С другой стороны из (1) следует, что

$$S(x_k) = a_k + b_k(x_k - x_{k-1}) + c_k(x_k - x_{k-1})^2 + d_k(x_k - x_{k-1})^3,\ k = \overline{1,n}.$$

Или, введя в рассмотрение шаг $h_k = x_k - x_{k-1}$, получим следующую систему, содержащую *n* уравнений:

$$a_k + b_k h_k + c_k h x_k{}^2 + d_k h_k{}^3 = y_k,\ k = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Для получения недостающих уравнений воспользуемся условиями (2) непрерывности производных.

1) непрерывность $S'(x)$ в точке x_k дает:

$$b_{k+1} = b_k + 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \quad k = \overline{1,n-1} \tag{9}$$

2) из непрерывности $S''(x)$ в точке x_k найдем:

$$c_{k+1} = c_k + 3d_k h_k, \quad k = \overline{1,n-1} \tag{10}$$

Таким образом получены еще 4*n*-2 уравнения. Для нахождения оставшихся двух уравнений воспользуемся граничными условиями (4):

$$\begin{aligned} S''(x_0) &= 0 \Rightarrow c_1 = 0; \\ S''(x_n) &= 2c_n + 6d_n h_n = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Уравнения (7)-(11) составляют систему линейных алгебраических уравнений для определения 4*n* коэффициентов $\{a, b, c, d\}$. Ее уже можно решить одним из численных методов решения СЛАУ. Однако эту систему можно привести к более удобному виду.

Из условия (7) можно сразу найти все коэффициенты a_k. Далее из (10) и (11) получим

$$d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k},\ k = \overline{1,n-1}; \quad d_n = -\frac{c_n}{3h_n}. \tag{12}$$

Учитывая (7) и (12) из (8) получим

$$b_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - \frac{h_i}{3}(c_{k+1} + 2c_k),\ k = \overline{1,n-1}; \quad b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} - \frac{2}{3}h_n c_n. \tag{13}$$

Подставляя найденные выражения в систему в (9) окончательно получим следующую систему уравнений только для коэффициентов c_k:

$$\begin{cases} c_1 = 0,\ c_{n+1} = 0 \\ h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_k = 3\left(\dfrac{y_k - y_{k-1}}{h_k} - \dfrac{y_{k-1} - y_{k-2}}{h_{k-1}}\right), \quad k = \overline{2,n-1}. \end{cases} \tag{14}$$

Получаем систему линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Поэтому решение (13) эффективно строится методом прогонки. По найденным коэффициентам $\{c_k\}$ из (12) и (13) явно находятся $\{b_k\}$ и $\{d_k\}$.

3. ЗАДАНИЕ

Вычислить значения заданной функции *f*(*x*) в узлах интерполяции $x_i = \alpha + h(i-1),\ i = \overline{1,n}$ на отрезке [α, β]. По вычисленной таблице $\{x_i, f(x_i)\}$ построить интерполяционный кубический сплайн *S*(*x*), вычислить его значения в промежуточных точках $x_j = \alpha + h/2 + h(j-1)$. Сравнить вычисленные значения с точными значениями функции в этих точках.

Номер варианта	***n***	**[*a*,*b*]**	***f*(*x*)**	**Номер варианта**	***n***	**[*a*,*b*]**	***f*(*x*)**
1	20	[0,2]	$\sin x^2$	16	20	[0,2]	$1/(1+e^2)$
2	25	[0,5]	$\cos x^2$	17	20	[0,4]	$1/(1+e^{-x})$
3	25	[0,5]	$e^{\sin x}$	18	20	[0,4]	$\sin(x+e^{\sin x})$
4	20	[-2,2]	$\cos(x+x^2)$	19	20	[-1,3]	$\ln(\sin x+e^x)$
5	10	[3,6]	$\ln(\cos x+e^{x/2})$	20	20	[1,100]	$\sin\ln x$
6	25	[0,5]	$\mathrm{sh}(\cos x/(1+x^2))$	21	20	[0,4]	$x^2e^{-x^2}$
7	25	[-1,4]	$\cos(x+\cos^3 x)$	22	20	[0,4]	$\begin{cases}\sin x/x, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$
8	20	[1,5]	$x\cos(x+\ln(1+x))$	23	25	[0,5]	$\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$
9	30	[-1,5]	$\dfrac{1+e^x}{1+e2^x}$	24	25	[0,5]	$\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}$
10	25	[0,5]	$\dfrac{\mathrm{arctg}\,x}{1+\mathrm{arctg}\,x}$	25	20	[1,5]	$e^{-(x+1/x)}$
11	20	[1,5]	$\ln x/(1+x)$	26	30	[0,6]	$(x-6)^2\,\mathrm{arctg}\,x^2$
12	20	[0,3]	$\sin x^2 e^{-x^2}$	27	20	[0,2]	$\dfrac{\mathrm{ch}\,x^2}{1+x}$
13	20	[0,2]	$\dfrac{1+x}{\mathrm{ch}x^2}$	28	25	[-1,4]	$\dfrac{1+x^3}{1+x^4}$
14	25	[-1,1]	$\dfrac{\cos x+x}{2+\mathrm{tg}\,x}$	29	20	[-2,2]	$\dfrac{e^x-\cos x}{e^x+\cos x}$
15	20	[2,10]	$\dfrac{x^2+x+x^3}{\ln(x^2+x^3)}$				