МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Методы вычислений»

Методические указания
по выполнения лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 6
«Полиномиальная интерполяция функций»

Чебоксары
2019

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Ознакомление с общими принципами интерполяции функций, а также с методами интерполяции функций при помощи интерполяционных полиномов Лагранжа и Ньютона.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Общая теория интерполяции функций

Пусть известные значения некоторой функции f образуют следующую таблицу:

$\boldsymbol{x}$	x_0	x_2	…	x_4
$\boldsymbol{y}$	y_0	y_2	…	y_4

При этом требуется получить значение функции f для такого значения аргумента x, которое входит в отрезок $[x_0, x_n]$, но не совпадает ни с одним из значений x_i (i=0, 1, …, n).

Требуется построить **интерполянту** – функцию $f(x)$, совпадающую с функцией $y(x)$, в узлах сетки:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Интерполирующие функции $f(x)$, как правило, строятся в виде линейных комбинаций некоторых элементарных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x),$$

где $\{\Phi_k(x)\}$ – фиксированные линейно независимые функции, $C_0, C_1, \ldots, C_n$ – неопределенные пока коэффициенты.

Если функции $\{\Phi_k(x)\}$ представляют собой линейные функции, то интерполяцию называют *линейной*. Такой вид интерполяции обычно дает большую погрешность. Чаще всего выбирают степенные или полиномиальные функции $\Phi_k(x) = x^k$ (*полиномиальная интерполяция*); тригонометрические функции $\Phi_k(x) = \begin{Bmatrix} \cos(kx) \\ \sin(kx) \end{Bmatrix}$ (*тригонометрическая интерполяция*); показательные функции $\Phi_k(x) = e^{kx}$ и другие.

2.2. Полиномиальная интерполяция

2.2.1. Интерполяционная формула Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{w(x)}{(x - x_k)w'(x_k)}$$

– полином степени не выше n и $L_n(x_i) = y_i$,

$$w(x) \equiv w_{\overline{0,n}}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

2.2.2. Интерполяционные формулы Ньютона

1. Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть функция задана таблицей с постоянным шагом. Тогда

$$N_n(x) = N_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

– представляет собой первую интерполяционную формулу Ньютона. Здесь $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ (h = const – шаг: $h = x_{i+1} - x_i \quad (i = \overline{0,n})$); $\Delta^k y_0$ – конечная разность k-го порядка ($\Delta^k y_0 = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \dfrac{k(k+1)}{2!} y_{i+k-2} - \ldots + (-1)^k y_i$).

Эта формула применяется для интерполяции в начале отрезка интерполяции, когда t мало по модулю. По этой причине первую интерполяционную формулу Ньютона называют формулой для интерполирования вперед.

2. Вторая интерполяционная формула Ньютона

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую формулу становится невыгодно. В этом случае применяется формула для интерполирования назад – вторая интерполяционная формула Ньютона:

$$N_n(x) = N_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

здесь $t = \dfrac{x - x_m}{h}$ (h = const – шаг: $h = x_{i+1} - x_i \quad (i = \overline{0,n})$); $\Delta^k y_0$ – конечная разность k-го порядка.

3. ЗАДАНИЕ

1) Используя данные таблицы 1, найти приближенное значение функции при данном значении аргумента с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа;

2) Используя данные таблицы 2, применяя первую или вторую интерполяционную формулу вычислить функции при данных значениях аргумента.

Таблица 1

x	*y(x)*	Вариант	*x*
0,43	1,6359	**1**	0,702
0,48	1,7323	**7**	0,512
0,55	1,8768	**13**	0,645
0,62	2,0334	**19**	0,736
0,70	2,2284	**25**	0,608
0,75	2,3597		

x	*y(x)*	Вариант	*x*
0,02	1,0231	**2**	0,102
0,08	1,0959	**8**	0,114
0,12	1,1472	**14**	0,125
0,17	1,2148	**20**	0,203
0,23	13012	**26**	0,154
0,30	1,4097		

x	*y(x)*	Вариант	*x*
0,35	2,7395	**3**	0,526
0,41	2,3008	**9**	0,453
0,47	1,9686	**15**	0,482
0,51	1,7877	**21**	0,552
0,56	1,5950	**27**	0,436
0,64	1,3431		

x	*y(x)*	Вариант	*x*
0,41	2,5741	**4**	0,616
0,46	2,3251	**10**	0,478
0,52	2,0933	**16**	0,665
0,60	1,8620	**22**	0,537
0,65	1,7492	**28**	0,673
0,72	1,6209		

x	*y(x)*	Вариант	*x*
0,68	0,8086	**5**	0,896
0,73	0,8949	**11**	0,812
0,80	1,0296	**17**	0,774
0,88	1,2096	**23**	0,955
0,93	1,3408	**29**	0,715
0,99	1,5236		

x	*y(x)*	Вариант	*x*
0,11	9,0542	**6**	0,314
0,15	6,6165	**12**	0,235
0,21	4,6917	**18**	0,332
0,29	3,3510	**24**	0,275
0,35	2,7395	**30**	0,186
0,40	2,3652		

Таблица 2

x	*y(x)*	Вариант	Значение аргумента			
1,415	0,888551		x_1	x_2	x_3	x_4
1,420	0,889599	**1**	1,4214	1,4353	1,4452	1,4605
1,425	0,890637	**7**	1,4215	1,4354	1,4453	1,4606
1,430	0,891667	**13**	1,4216	1,4355	1,4454	1,4607
1,435	0,892687	**19**	1,4217	1,4356	1,4455	1,4608
1,440	0,893698	**25**	1,4214	1,4353	1,4452	1,4605
1,445	0,896677					
1,450	0,897653					
1,455	0,898619					
1,460	0.897653					
1,465	0,898619					

x	*y(x)*	Вариант	Значение аргумента			
0,101	1,26183		x_1	x_2	x_3	x_4
0,106	1,27644	**2**	0,1074	0,1213	0,1312	0,1465
0,111	1,29122	**8**	0,1075	0,1214	0,1313	0,1466
0,116	1,30617	**14**	0,1076	0,1215	0,1314	0,1467
0,121	1.32130	**20**	0,1077	0,1216	0,1315	0,1468
0,126	1,33660	**26**	0,1074	0,1213	0,1312	0,1465
0,131	1,35207					
0,136	1,36773					
0,141	1,38357					
0,146	1,39959					
0,151	1,41579					

x	*y(x)*	Вариант	Значение аргумента			
0,15	0,860708		x_1	x_2	x_3	x_4
0,20	0,818731	**3**	0,2014	0,4003	0,5502	0,7005
0,25	0,778801	**9**	0,2015	0,4004	0,5503	0,7006
0,30	0,740818	**15**	0,2016	0,4005	0,5504	0,7007
0,35	0,704688	**21**	0,2017	0,4006	0,5505	0,7008
0,40	0,670320	**27**	0,2014	0,4003	0,5502	0,7005
0,45	0,637620					
0,50	0,606531					
0,55	0,576950					
0,60	0,548812					
0,65	0,522046					
0,70	0,496585					
0,75	0,472236					

x	*y(x)*	Вариант	Значение аргумента			
0,180	5,61543		x_1	x_2	x_3	x_4
0,185	5,46693	**4**	0,1864	0,2003	0,2152	0,2255
0,190	5,32634	**10**	0,1865	0,2004	0,2153	0,2256
0,195	5,19304	**16**	0,1866	0,2005	0,2154	0,2257
0,200	5,06649	**22**	0,1867	0,2006	0,2155	0,2258
0,205	4,94619	**28**	0,1864	0,2003	0,2152	0,2255
0,210	4,83170					
0,215	4,72261					
0,220	4,61855					
0,225	4,51919					
0,230	4,42422					
0,235	4,33337					

x	*y(x)*
3,50	33,1154
3,55	34,8133
3,60	36,5982
3,65	38,4747
3,70	40,4473
3,75	42,5211
3,80	44,7012
3,85	46,9931
3,90	49,4024
3,95	51,9354
4,00	54,5982
4,05	57,3975
4,10	60,3403
4,15	63,4340

Вариант	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
5	3,5514	3,7503	3,9002	4,0505
11	3,5515	3,7504	3,9003	4,0506
17	3,5516	3,7505	3,9004	4,0507
23	3,5517	3,7506	3,9005	4,0508
29	3,5514	3,7503	3,9002	4,0505

x	*y(x)*
0,115	8,65729
0,120	8,29329
0,125	7,95829
0,130	7,64893
0,135	7,36235
0,140	7,09613
0,145	6,84815
0,150	6,61659
0,155	6,39986
0,160	6,19658
0,165	6,00551
0,170	5,82558
0,175	5,65583
0,180	5,49543

Вариант	Значение аргумента			
	x_1	x_2	x_3	x_4
6	0,1214	0,1403	0,1552	0,1705
12	0,1215	0,1404	0,1553	0,1706
18	0,1216	0,1405	0,1554	0,1707
24	0,1217	0,1406	0,1555	0,1708
30	0,1214	0,1403	0,1552	0,1705