МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Методы вычислений»

Методические указания
по выполнения лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 4
«Решение нелинейных уравнений»

Чебоксары
2019

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Ознакомление с численными методами решения нелинейных уравнений, на примере методов деления отрезков пополам (бисекции), хорд, касательных (Ньютона), модифицированного метода касательных и простых итераций.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В общем случае нелинейные уравнения можно записать в виде:

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$. В зависимости от вида функции их можно разделить на алгебраические и трансцендентные.

Для численного решения нелинейных уравнений существуют и прямые, и итерационные методы. Т.к. встречающиеся на практике уравнения не всегда удается решить прямыми методами, чаще применяются итерационные.

Как известно, для начала процесса итераций необходимо задать начальное приближение корня. Однако в отличие от линейной алгебры, здесь для этого необходимо сначала отделить его от других возможных корней. Процесс отделения корней заключается в определении окрестности рассматриваемой области, в которой содержится только одно значение корня.

2.1.1. Отделение корней

Отделение корней во многих случаях можно произвести графически, принимая во внимание, что действительные корни уравнения (1) – это точки пересечения графика функции $F(x)$ с осью абсцисс. А также по известной со школы схеме исследования функции, в процессе которого находятся интервалы знакочередования функции. При этом полезной будет следующая теорема.

Теорема 1. Если непрерывная функция $F(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. $F(\alpha)F(\beta)<0$, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения $F(x)=0$, т.е. найдется хотя бы одно число $\xi\in(\alpha, \beta)$ такое, что $F(\xi)=0$. Корень ξ заведомо будет единственным, если производная $F'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (α, β), т.е. если $F'(x)>0$ (или $F'(x)<0$) при $\alpha< x <\beta$.

2.1.2. Метод деления отрезков пополам

Пусть известен отрезок $[a, b]$, в котором расположено искомое значение корня $x=c$, т.е. $a<c<b$. В качестве начального приближения корня c_0 принимаем середину этого отрезка, т.е. $c_0 = \frac{a+b}{2}$. Далее исследуем значение функции $F(x)$ на концах отрез-

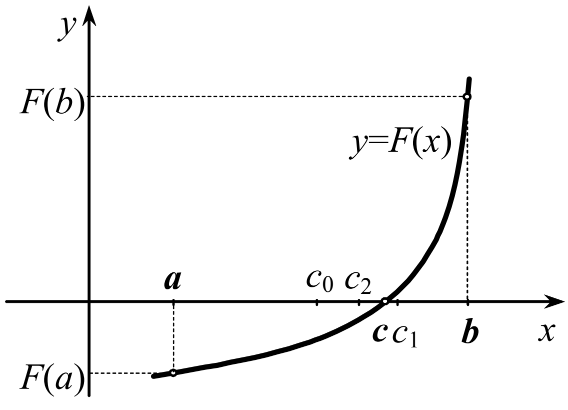

Рис. 1. Решение нелинейных уравнений методом деления отрезков пополам

ков $[a, c_0]$ и $[c_0, b]$, т.е. в точках a, c_0, b. Тот из них, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков (на рис.1 – это отрезок $[c_0,\ b]$), содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка. Вторую половину отрезка $[a,\ b]$, на которой знак $F(x)$ не меняется, отбрасываем. В качестве первой итерации (первого приближения корня) принимаем середину нового отрезка и т.д.

Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока значение функции $F(x)$ после n-й итерации не станет меньшим по модулю некоторого заданного малого числа ε, т.е. $|F(c_n)| < \varepsilon$. Можно также оценивать длину полученного отрезка: если она становится меньше допустимой погрешности, то счет прекращается.

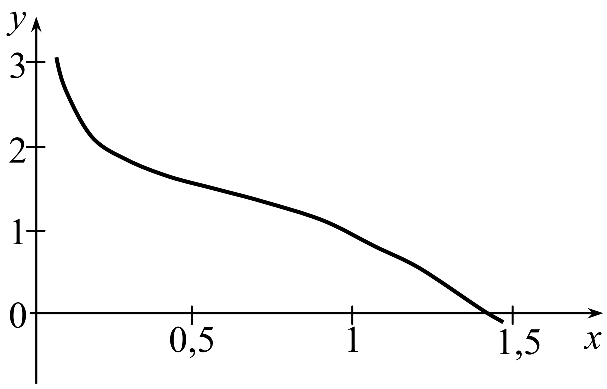

Рис.2

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ с точностью до 0,0001 методом деления отрезка пополам.

Для отделения корня построим график функции $y = \sin 2x - \ln x$. Из него (рис.2) следует, что уравнение имеет корень, принадлежащий отрезку [1,3; 1,5].

Процесс вычислений представлен в таблице 1.

Таблица 1

Номер итерации	Границы отрезка	Середина отрезка	Значения функции $F(x)$	Проверка условия: |F(x)|<ε=0,0001
0	1,3		0,253137	
	1,5		-0,26435	
		1,4	-0,00148	не выполняется
1	1,3		0,253137	
	1,4		-0,00148	
		1,35	0,127275	не выполняется
2	1,35		0,127275	
	1,4		-0,00148	
		1,375	0,063207	не выполняется
3	1,375		0,063207	
	1,4		-0,00148	
		1,3875	0,030933	не выполняется

Окончание табл. 1

Номер итерации	Границы отрезка	Середина отрезка	Значения функции $F(x)$	Проверка условия: $\|F(x)\|<\varepsilon=0,0001$
4	1,3875 1,4	 1,39375	0,030933 -0,00148 0,014741	 не выполняется
5	1,39375 1,4	 1,396875	0,014741 -0,00148 0,006633	 не выполняется
6	1,396875 1,4	 1,398438	0,006633 -0,00148 0,002575	 не выполняется
7	1,398438 1,4	 1,399219	0,002575 -0,00148 0,000546	 не выполняется
8	1,399219 1,4	 1,399609	0,000546 -0,00148 -0,00047	 не выполняется
9	1,399219 1,399609	 **1,399414**	0,000546 -0,00047 **0,0000385**	 **выполняется**

Как видно из таблицы, итерации были завершены, когда $x = 1,399414$, т.к. заданная точность (ε=0,0001) была достигнута.

Ответ: x=1,3994.

2.1.3. Метод хорд

Этот метод также как и метод деления отрезков пополам, предназначен для уточнения корня на интервале $[a, b]$, на концах которого функция $F(x)$ принимает разные знаки. Очередное приближение теперь в отличие от метода бисекции берем не в середине отрезка, а в точке c_0 пересечения хорды, проведенной через точки $(a, F(a))$ и $(b, F(b))$ с осью абсцисс (рис.3).

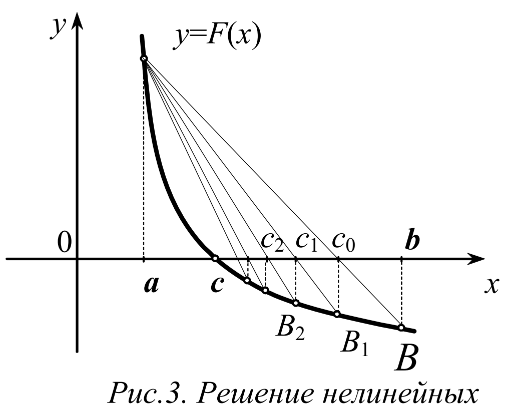

Рис.3. Решение нелинейных уравнений методом хорд

Например, если $F(a)>0$, $F(b)<0$, то начальное приближение определяется следующим образом:

$$c_0 = a - \frac{b-a}{F(b)-F(a)} F(a). \qquad (2)$$

Аналогично находятся остальные приближения.

Метод хорд дает обычно более быструю сходимость, чем метод деления отрезков пополам.

Пример 2. Решить уравнение $\sin 2x - \ln\ x = 0$ методом хорд с точностью до 0,0001.

Отрезок, содержащий корень уже известен (см.пример 1). Процесс вычислений представлен в таблице 2.

Таблица 2

Номер итерации	Границы отрезка	Пересечение хорды с осью абсцисс	Значения функции $F(x)$	Проверка условия: |F(x)|<ε=0,0001
0	1,3		0,253137	
	1,5		-0,26435	
		1,397834	0,004142	не выполняется
1	1,397834		0,004142	
	1,5		-0,26435	
		1,39941	**0,0000479**	**выполняется**

Как видно из таблицы, метод хорд приблизился к ответу с той же точностью быстрее (всего две итерации).

Ответ: x=1,3994.

2.1.4. Метод касательных

Его отличие от предыдущего метода состоит в том, что на k-й итерации вместо хорды проводится касательная к кривой y=$F(x)$ в точке с координатами (c_k, $F(c_k)$), и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс (эта точка будет следующим приближением корня). При этом не обязательно задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения y=$F(x)$, а достаточно лишь найти некоторое начальное приближение корня $x = c_0$. Его следует выбрать как можно точнее, т.к. при неудачном задании метод может вообще не сойтись.

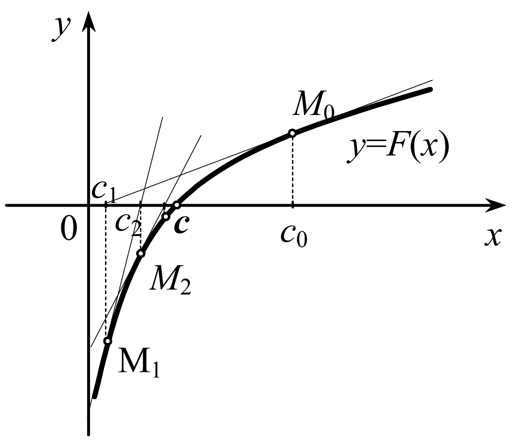

Рис. 4. Решение нелинейных уравнений методом Ньютона (касательных)

Вычисления производятся по формуле:

$$c_{n+1} = c_n - F(c_n) / F'(c_n). \qquad (3)$$

При этом необходимо, чтобы $F'(c_n)$ не равнялось нулю. Для окончания итерационного процесса может быть использовано или условие $|F(c_n)| < \varepsilon$, или условие близости двух последовательных приближений: $|c_{n+1} - c_n| < \varepsilon$.

Пример 3. Решить уравнение $\sin 2x - \ln\ x = 0$ методом Ньютона с точностью до 0,0001.

В качестве начального приближения корня возьмем x=1,3 (см. рис.1). Решение представлено в таблице 3.

Таблица 3

Номер приближения корня, i	Приближение корня, c_i	Значение функции, $F(c_i)$	Проверка условия: |F(x)|<ε=0,0001
0	1,3	0,253137	не выполняется
1	1,401948	-0,00655	не выполняется
2	**1,39943**	**-0,000003**	**выполняется**

Ответ: x=1,3994.

2.1.5. Модифицированный метод Ньютона

Если производная $F'(x)$ мало изменяется на отрезке [a, b], то можно положить: $F'(c_n) \approx F'(c_0)$.

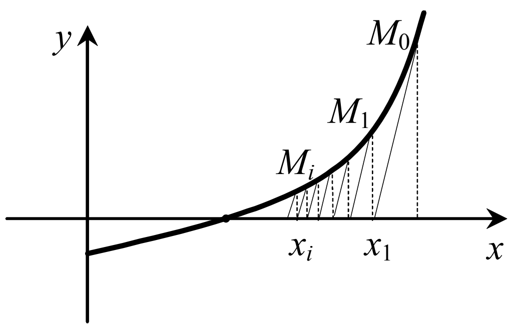

Рис.5. Решение нелинейных уравнений модифицированным методом Ньютона

Тогда следующее приближение вычисляется по формуле:

$$c_{n+1} = c_n - \frac{F(c_n)}{F'(c_0)} \quad (n = 0,1,...). \quad (4)$$

Геометрически этот способ означает, что мы заменяем касательную в точках $M_n[x_n, F(x_n)]$ прямыми, параллельными касательной к кривой y=F(x), в ее фиксированной точке $M_0[x_0, F(x_0)]$(рис. 5).

Пример 4. Решить уравнение $\sin 2x - \ln\ x = 0$ модифицированным методом Ньютона с точностью до 0,0001.

Начальное приближение возьмем из примера 3. Следовательно, имеем $F'(c_0)$=-2,48301 (см. табл.3). Этапы решения представлены в таблице 4.

Таблица 4

Номер приближения корня, i	Приближение корня, c_i	Значение функции, $F(c_i)$	Проверка условия: |F(x)|<ε=0,0001?
0	1,3	0,253137	не выполняется
1	1,401948	-0,00655	не выполняется
2	1,399311	0,000307	не выполняется
3	**1,399434**	**-0,00005**	**выполняется**

Ответ: x=1,3994.

2.1.6. Метод секущих

Если итерации x_k и x_{k+1} расположены достаточно близко друг к другу, то производную $F'(x_k)$ в алгоритме Ньютона можно заменить ее приближенным значением в виде отношения приращения функции $\Delta F = F(x_k) - F(x_{k-1})$ к приращению аргумента $\Delta x = x_k - x_{k-1}$. Таким образом, запишем формулу метода секущих:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{F(x_k) - F(x_{k-1})} F(x_k). \tag{5}$$

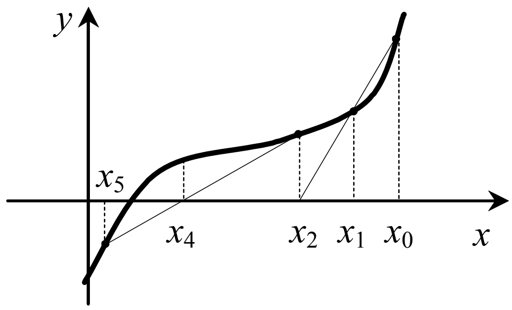

Рис.6. Решение нелинейных уравнений методом секущих

Геометрический смысл такого изменения алгоритма Ньютона в том, что вместо касательных строятся секущие (рис.6). Следовательно, чтобы начать итерационный процесс, необходимо задать два начальных приближения x_0 и x_1. Затем каждое новое приближение корня получается по приведенной выше формуле. Заканчивается процесс при выполнении условия $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, где ε - заданная абсолютная погрешность определения корня.

Метод секущих несколько уступает методу Ньютона в скорости сходимости, однако не требует вычисления производной левой части уравнения.

По алгоритму метод секущих близок к методу хорд, однако в отличие от последнего, начальные приближения в методе секущих могут располагаться как с разных сторон от корня, так и с одной стороны; кроме того, при уточнении корня не проверяются знаки функции $f(x)$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ методом секущих с точностью до 0,0001.

Здесь, в отличие от методов Ньютона, надо задать в качестве начального приближения две точки. Пусть это будут точки x_0=1,3, x_1=1,31, они обе очень близки к корню (см. рис.1). Результаты представлены в таблице 5.

Таблица 5

Номер приближения корня, i	Приближение корня, c_i	Значение функции, $F(c_i)$	Проверка условия: $\lvert F(x)\rvert<\varepsilon=0,0001$
0	1,3	0,253137	не выполняется
1	1,31	0,228235	не выполняется
2	1,401651	-0,00578	не выполняется
3	1,399389	0,000104	не выполняется
4	**1,399429**	**0,00000004**	**выполняется**

Ответ: x=1,3994.

2.7. Метод простых итераций

Для начала процесса итераций необходимо уравнение (1) привести к виду:

$$x=\varphi(x). \qquad (6)$$

Тогда после задания начального приближения корня x_0 итерации проводятся по схеме:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, ... \qquad (7)$$

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, т.е. последовательность приближений x_0, x_1, x_2, …, x_n сходится, то ξ является корнем уравнения (1) и может быть вычислен с любой степенью точности. Остановкой процесса итераций будет выполнение условия близости двух последовательных приближений: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, где ε - точность.

Для сходимости итерационного процесса на функцию φ(x) накладываются следующие условия:

1) φ(x) должна быть определена и дифференцируема на отрезке [a, b], содержащем корень;

2) значения функции φ(x) должны принадлежать отрезку [a, b] для любых значений аргумента $x\in[a, b]$;

3) $|\varphi'(x)| < 1$ для всех $x\in[a, b]$.

Если первые два условия не вызывают особого беспокойства, то условие 3) достаточно жесткое. Не всякое уравнение можно с ходу привести к виду (6) так, чтобы оно выполнялось. В таких случаях полезно знать следующие специальные приемы.

1. Уравнение (1) умножаем на m и к обеим частям прибавляем x:

$$x + mf(x) = x \text{ или } x = x - mf(x),$$

где m – отличная от нуля константа. Тогда можно обозначить:

$$\varphi(x) = x - mf(x).$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$\varphi'(x) = 1 - mf'(x).$$

Тогда для выполнения условия 3) достаточно подобрать m так, чтобы для всех x отрезка [a, b] выполнялось условие:

$$0 < |mf'(x)| < 1.$$

2. Пусть уравнение (1) удалось привести какими-либо эквивалентными преобразованиями к виду (6), однако оказалось, что для всех $x\in[a, b]$ $|\varphi'(x)| > 1$. Тогда вместо функции $y = \varphi(x)$ рассмотрим функцию $x = \psi(y)$, симметричную ей относительно прямой y=x.

По свойству производных обратных функций на отрезке [a, b] имеет место соотношение

$$|\psi'(x)| = \frac{1}{|\varphi'(x)|} < 1.$$

Причем уравнение $x = \psi(x)$ имеет тот же корень, что и (6).

Пример 6. Решить уравнение $\sin 2x - \ln x = 0$ методом простых итераций с точностью до 0,0001.

Приведем заданное уравнение к виду (6). Для этого воспользуемся первым способом преобразования.

$$x = x - m(\sin 2x - \ln x) \text{ или } \varphi(x) = x - m(\sin 2x - \ln x).$$

Подберем число m, так чтобы на отрезке [1,3; 1,5] (см. пример 1, этап отделения корня) выполнялось условие

$$|\varphi'(x)| = \left|1 - m(2\cos(2x) - 1/x)\right| < 1.$$

Например, при $m = -1/3$ это неравенство верно. Тогда

$$\varphi(x) = x + 1/3(\sin 2x - \ln x),$$

а схема итераций будет иметь вид

$$x_k = x_{k-1} + 1/3(\sin 2x_{k-1} - \ln x_{k-1}),$$

где x_k - k-е приближение корня, k=1, 2, 3, … Результаты приближений корня, начиная с нулевого x_0=1,3, представлены в таблице 6.

Таблица 6

Номер итерации, k	Приближение корня, x_k	Проверка условия: $\lvert x_k - x_{k-1} \rvert < \varepsilon = 0{,}0001$
0	1,3	
1	1,384379	не выполняется
2	1,397381	не выполняется
3	1,399154	не выполняется
4	1,399392	не выполняется
5	**1,399424**	**выполняется**

Ответ: x=1,3994.

3. ЗАДАНИЕ

Решить нелинейное уравнение с точностью до 0,0001 одной из следующих групп методов согласно варианту.

1. $\arccos x^2 - x = 0$
2. $e^x - \arccos\sqrt{x} = 0$
3. $\ln x - \frac{1}{1+x^2} = 0$
4. $\ln^2 x - \frac{1}{x} = 0$
5. $\ln\ln x - e^{-x^2} = 0$
6. $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - x^2 = 0$
7. $\ln^2 x - \frac{1}{x} = 0$
8. $\lg\ln x - \frac{1}{1+x^2} = 0$
9. $x - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$
10. $e^{-x^2} - \sqrt{x} = 0$
11. $\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} = 0$
12. $x^4 - 13x^2 + 36 - \frac{1}{x} = 0$
13. $2x^2 - x^4 - 1 - \ln x = 0$
14. $x - (\operatorname{arctg} x)^{-1} = 0$
15. $\ln\frac{1+x}{1-x} - \cos x^2 = 0$
16. $x - \frac{1}{x^4 - 13x^2 + 36} = 0$
17. $\operatorname{arctg} x - \ln x = 0$
18. $x^3 - 3x - 2e^{-x} = 0$
19. $\arcsin\frac{2x}{1+x^2} - e^{-x^2} = 0$
20. $\frac{1}{3+2\cos x} - x^3 = 0$
21. $x - \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0$
22. $x - e^{2x^2 - x^4 - 1} = 0$
23. $\frac{1+x}{1-x} - e^{\frac{1}{x}} = 0$
24. $x - \ln(x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 1}) = 0$
25. $\cos x^2 - 10x = 0$
26. $e^x - \operatorname{arctg} x = 0$
27. $\arccos(e^x - 3) - x = 0$
28. $\arccos x^2 - x^3 = 0$
29. $\sin x^2 - 6x + 1 = 0$
30. $e^x - 3 - \cos x = 0$