

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Вычислительная математика»

Методические указания  
по выполнению лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 3  
**«Решение систем линейных алгебраических уравнений  
итерационными методами»**

Чебоксары  
2019





$$\begin{cases} 8,04x_1 + 5,22x_2 + 0,27x_3 = -6,44; \\ 6,26x_1 - 12,20x_2 - 3,24x_3 = 69,97; \\ 2,34x_1 - 4,21x_2 - 11,61x_3 = 14,41. \end{cases}$$

Разделим теперь каждое уравнение на его диагональный коэффициент и выразим из каждого уравнения диагональное неизвестное:

$$\begin{cases} x_1 = -0,6492537x_2 - 0,033581x_3 - 0,800995; \\ x_2 = 0,5131148x_1 - 0,2655738x_3 - 5,7352459; \\ x_3 = 0,2015504x_1 - 0,3626184x_2 - 1,2411714. \end{cases}$$

Так как для полученной системы выполняется второе условие сходимости (т.е. процесс итераций будет сходиться), то ее можно использовать для построения схемы приближения неизвестных:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0,6492537x_2^{(k)} - 0,033581x_3^{(k)} - 0,800995; \\ x_2^{(k+1)} = 0,5131148x_1^{(k)} - 0,2655738x_3^{(k)} - 5,7352459; \\ x_3^{(k+1)} = 0,2015504x_1^{(k)} - 0,3626184x_2^{(k)} - 1,2411714. \end{cases}$$

Пусть начальные приближения неизвестных равны соответственно:  $x_1^{(0)} = 2,3$ ,  $x_2^{(0)} = -4,8$ ,  $x_3^{(0)} = 1$ .

Результаты вычислений помещены в следующей таблице.

Номер итерации, $k$	Значения переменных после $k$ -й итерации			Погрешность приближения после $k$ -й итерации		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$ x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} $	$ x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} $	$ x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} $
0	2,30000	-4,8000	1,000	-	-	-
1	2,28184	-4,82066	0,96296	0,01816	0,02066	0,03704
2	2,29650	-4,82014	0,96679	0,01465	0,00052	0,00383
3	2,29603	-4,81364	0,96956	0,00047	0,00650	0,00277
4	2,29172	-4,81461	0,96711	0,00431	0,00097	0,00245
5	2,29243	-4,81617	0,96659	0,00071	0,00156	0,00052
6	2,29346	-4,81567	0,96730	0,00103	0,00050	0,00071
7	2,29311	-4,81533	0,96733	0,00035	0,00034	0,00003
8	2,29289	-4,81551	0,96713	0,00022	0,00019	0,00019
9	2,29302	-4,81558	0,96715	0,00013	0,00006	0,00002
10	2,29306	-4,81552	0,96715	0,00004	0,00006	0,00005

Из таблицы видно, что итерации были завершены, когда  $\max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < 0,0001$ .

### 2.1.2. Метод Зейделя

Небольшое усовершенствование алгоритма метода простых итераций позволяет ускорить сходимость итераций. Из формулы (4) следует, что к моменту вычисления

$(k+1)$ -го приближения для  $i$ -го компонента решения уже вычислены  $(k+1)$ -е приближения компонент с меньшими номерами: 1, 2, 3, ...,  $i-1$ . Если учитывать эти уточненные значения для каждой последующей компоненты решения, то получим итерационный метод Зейделя

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11}x_1^{(k)} + a_{12}x_2^{(k)} + a_{13}x_3^{(k)} \dots + a_{1n}x_n^{(k)} + b_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{22}x_2^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} \dots + a_{2n}x_n^{(k)} + b_2, \\ x_3^{(k+1)} = a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + a_{33}x_3^{(k)} \dots + a_{3n}x_n^{(k)} + b_3, \\ \dots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{nn}x_n^{(k+1)} + b_n. \end{cases} \quad (5)$$

**Пример.** Методом Зейделя решить приведенную к итерационному виду систему первого до 0,0001.

Пусть дана система:

$$\begin{cases} x_1 = -0,6492537x_2 - 0,033581x_3 - 0,800995; \\ x_2 = 0,5131148x_1 - 0,2655738x_3 - 5,7352459; \\ x_3 = 0,2015504x_1 - 0,3626184x_2 - 1,2411714. \end{cases}$$

В качестве начального приближения можно взять любые значения. Пусть  $x_1^{(0)} = 2,3$ ,  $x_2^{(0)} = -4,8$ ,  $x_3^{(0)} = 1$ . Итерации будем производить по схеме:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0,6492537x_2^{(k)} - 0,033581x_3^{(k)} - 0,800995; \\ x_2^{(k+1)} = 0,5131148x_1^{(k+1)} - 0,2655738x_3^{(k)} - 5,7352459; \\ x_3^{(k+1)} = 0,2015504x_1^{(k+1)} - 0,3626184x_2^{(k+1)} - 1,2411714. \end{cases}$$

Результаты вычислений помещены в следующей таблице.

Номер итерации, $k$	Значения переменных после $k$ -й итерации			Погрешность приближения после $k$ -й итерации		
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$ x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)} $	$ x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)} $	$ x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} $
0	2,30000	-4,8000	1,000	-	-	-
1	2,28184	-4,82997	0,97017	0,01816	0,02997	0,02983
2	2,30230	-4,81155	0,96762	0,02046	0,01842	0,00256
3	2,29043	-4,81697	0,96719	0,01187	0,00541	0,00043
4	2,29396	-4,81504	0,96720	0,00353	0,00193	0,00001
5	2,29271	-4,81569	0,96718	0,00125	0,00065	0,00002
6	2,29313	-4,81547	0,96719	0,00042	0,00022	0,00000
7	2,29298	-4,81554	0,96718	0,00014	0,00007	0,00000
8	2,29303	-4,81552	0,96718	0,00005	0,00003	0,00000

Как видно из примеров, метод Зейделя дает более быструю сходимость при одинаковых начальных условиях.

### 3. ЗАДАНИЕ

Решить систему линейных уравнений методами простых итераций и Зейделя с точностью до 0,0001.

#### 3. Варианты

Варианты совпадают с номерами в журнале по технике безопасности.

$$\begin{cases} \text{№1.} & \begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,04x_2 + 0,21x_3 - 0,18x_4 + 1,24; \\ x_2 = 0,45x_1 - 0,23x_2 + 0,06x_3 - 0,88; \\ x_3 = 0,26x_1 + 0,34x_2 - 0,11x_3 + 0,62; \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,26x_2 + 0,34x_3 - 0,12x_4 - 1,17. \end{cases} \\ \text{№2.} & \begin{cases} x_1 = 0,21x_1 + 0,12x_2 - 0,34x_3 - 0,16x_4 - 0,64; \\ x_2 = 0,34x_1 - 0,08x_2 + 0,17x_3 - 0,18x_4 + 1,42; \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,34x_2 + 0,15x_3 - 0,31x_4 - 0,42; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,26x_2 - 0,08x_3 - 0,25x_4 + 0,83. \end{cases} \\ \text{№3.} & \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,02x_3 + 0,21x_4 + 1,83; \\ x_2 = 0,16x_1 + 0,12x_2 - 0,14x_3 + 0,27x_4 - 0,65; \\ x_3 = 0,37x_1 + 0,27x_2 - 0,02x_3 - 0,24x_4 + 2,23; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,21x_2 - 0,18x_3 + 0,25x_4 - 1,13. \end{cases} \\ \text{№4.} & \begin{cases} x_1 = 0,42x_1 - 0,52x_2 + 0,03x_3 + 0,44; \\ x_2 = 0,31x_1 - 0,26x_2 - 0,36x_3 + 1,42; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,08x_2 - 0,14x_3 - 0,24x_4 - 0,83; \\ x_4 = 0,15x_1 - 0,35x_2 - 0,18x_3 - 1,42. \end{cases} \\ \text{№5.} & \begin{cases} x_1 = 0,18x_1 - 0,34x_2 - 0,12x_3 + 0,15x_4 - 1,33; \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,45x_3 + 0,32x_4 + 0,84; \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,12x_2 + 0,14x_3 - 0,18x_4 - 1,16; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,08x_2 + 0,06x_3 + 0,57. \end{cases} \\ \text{№6.} & \begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,23x_2 - 0,44x_3 - 0,05x_4 + 2,13; \\ x_2 = 0,24x_1 - 0,31x_3 + 0,15x_4 - 0,18; \\ x_3 = 0,06x_1 + 0,15x_2 - 0,23x_4 + 1,44; \\ x_4 = 0,72x_1 - 0,08x_2 - 0,05x_3 + 2,42. \end{cases} \\ \text{№7.} & \begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,31x_2 - 0,18x_3 + 0,22x_4 - 1,71; \\ x_2 = -0,21x_1 + 0,33x_3 + 0,22x_4 + 0,62; \\ x_3 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,05x_3 - 0,19x_4 - 0,89; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,28x_2 - 0,14x_3 + 0,94. \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{№8.} & \begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,27x_2 - 0,22x_3 - 0,18x_4 + 1,21; \\ x_2 = -0,21x_1 - 0,45x_3 + 0,18x_4 - 0,33; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,13x_2 - 0,33x_3 + 0,18x_4 - 0,48; \\ x_4 = 0,33x_1 - 0,05x_2 + 0,06x_3 - 0,28x_4 - 0,17. \end{cases} \\ \text{№9.} & \begin{cases} x_1 = 0,19x_1 - 0,07x_2 + 0,38x_3 - 0,21x_4 - 0,81; \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,08x_2 + 0,11x_3 + 0,33x_4 - 0,64; \\ x_3 = 0,51x_1 - 0,07x_2 + 0,09x_3 - 0,11x_4 + 1,71; \\ x_4 = 0,33x_1 - 0,41x_2 - 1,21. \end{cases} \\ \text{№10.} & \begin{cases} x_1 = 0,22x_2 - 0,11x_3 + 0,31x_4 + 2,7; \\ x_2 = 0,38x_1 - 0,12x_3 + 0,22x_4 - 1,5; \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,51x_4 + 1,2; \\ x_4 = 0,17x_1 - 0,21x_2 + 0,31x_3 - 1,7. \end{cases} \\ \text{№11.} & \begin{cases} x_1 = 0,07x_1 - 0,08x_2 + 0,11x_3 - 0,18x_4 - 0,51; \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,52x_2 + 0,21x_4 + 1,17; \\ x_3 = 0,13x_1 + 0,31x_2 - 0,21x_4 - 1,02; \\ x_4 = 0,08x_1 - 0,33x_3 + 0,28x_4 - 0,28. \end{cases} \\ \text{№12.} & \begin{cases} x_1 = 0,05x_1 - 0,06x_2 - 0,12x_3 + 0,14x_4 - 2,17; \\ x_2 = 0,04x_1 - 0,12x_2 + 0,68x_3 + 0,11x_4 + 1,4; \\ x_3 = 0,34x_1 + 0,08x_2 - 0,06x_3 + 0,44x_4 - 2,1; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,03x_4 - 0,8. \end{cases} \\ \text{№13.} & \begin{cases} x_1 = 0,08x_1 - 0,03x_2 - 0,04x_3 - 0,04x_4 - 1,2; \\ x_2 = 0,51x_2 + 0,27x_3 - 0,08x_4 + 0,81; \\ x_3 = 0,33x_1 - 0,37x_3 + 0,21x_4 - 0,92; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,03x_3 + 0,58x_4 + 0,17. \end{cases} \\ \text{№14.} & \begin{cases} x_1 = 0,12x_1 - 0,23x_2 + 0,25x_3 - 0,16x_4 + 1,24; \\ x_2 = 0,14x_1 + 0,34x_2 - 0,18x_3 + 0,24x_4 - 0,89; \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,03x_2 + 0,46x_3 - 0,32x_4 + 1,15; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,05x_2 + 0,15x_4 - 0,57. \end{cases} \\ \text{№15.} & \begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,14x_2 + 0,06x_3 - 0,12x_4 + 1,21; \\ x_2 = 0,12x_1 + 0,32x_3 - 0,18x_4 - 0,72; \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,12x_2 + 0,23x_3 + 0,32x_4 - 0,58; \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,22x_2 + 0,14x_3 + 1,56. \end{cases} \\ \text{№16.} & \begin{cases} x_1 = 0,14x_1 + 0,23x_2 + 0,18x_3 + 0,17x_4 - 1,42; \\ x_2 = 0,12x_1 - 0,14x_2 + 0,08x_3 + 0,09x_4 - 0,83; \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,24x_2 - 0,35x_4 + 1,21; \\ x_4 = 0,23x_1 - 0,08x_2 + 0,55x_3 + 0,25x_4 + 0,65. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{№17.} \begin{cases} x_1 = 0,24x_1 + 0,21x_2 + 0,06x_3 - 0,34x_4 + 1,42; \\ x_2 = 0,05x_1 + 0,32x_3 + 0,12x_4 - 0,57; \\ x_3 = 0,35x_1 - 0,27x_2 - 0,05x_4 + 0,68; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,43x_2 + 0,34x_3 - 0,21x_4 - 2,14. \end{cases}$$

$$\text{№18.} \begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,27x_2 - 0,13x_3 - 0,11x_4 - 1,42; \\ x_2 = 0,13x_1 - 0,12x_2 + 0,09x_3 - 0,06x_4 + 0,48; \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,05x_2 - 0,02x_3 + 0,12x_4 - 2,34; \\ x_4 = 0,13x_1 + 0,18x_2 + 0,24x_3 + 0,43x_4 + 0,72. \end{cases}$$

$$\text{№19.} \begin{cases} x_1 = 0,15x_1 + 0,05x_2 - 0,08x_3 + 0,14x_4 - 0,48; \\ x_2 = 0,32x_1 - 0,43x_2 - 0,12x_3 + 0,11x_4 + 1,24; \\ x_3 = 0,17x_1 + 0,06x_2 - 0,08x_3 + 0,12x_4 + 1,15; \\ x_4 = 0,21x_1 - 0,16x_2 + 0,36x_3 - 0,88. \end{cases}$$

$$\text{№20.} \begin{cases} x_1 = 0,28x_1 - 0,17x_3 + 0,06x_4 + 0,21; \\ x_2 = 0,52x_1 + 0,12x_3 + 0,17x_4 - 1,17; \\ x_3 = 0,17x_1 - 0,18x_2 + 0,21x_3 - 0,81; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,22x_2 + 0,03x_3 + 0,05x_4 + 0,72. \end{cases}$$

$$\text{№21.} \begin{cases} x_1 = 0,52x_2 + 0,08x_3 + 0,13x_4 - 0,22; \\ x_2 = 0,07x_1 - 0,38x_2 - 0,05x_3 + 0,41x_4 + 1,8; \\ x_3 = 0,04x_1 + 0,42x_2 + 0,11x_3 - 0,07x_4 - 1,3; \\ x_4 = 0,17x_1 + 0,18x_2 - 0,13x_3 + 0,19x_4 + 0,33. \end{cases}$$

$$\text{№22.} \begin{cases} x_1 = 0,01x_1 + 0,02x_2 - 0,62x_3 + 0,08x_4 - 1,3; \\ x_2 = 0,03x_1 + 0,28x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 + 1,1; \\ x_3 = 0,09x_1 + 0,13x_2 + 0,42x_3 + 0,28x_4 - 1,7; \\ x_4 = 0,19x_1 - 0,23x_2 + 0,08x_3 + 0,37x_4 + 1,5. \end{cases}$$

$$\text{№23.} \begin{cases} x_1 = 0,17x_2 - 0,33x_3 + 0,18x_4 - 1,2; \\ x_2 = 0,18x_2 + 0,43x_3 - 0,08x_4 + 0,33; \\ x_3 = 0,22x_1 + 0,18x_2 + 0,21x_3 + 0,07x_4 + 0,48; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,07x_2 + 0,71x_3 + 0,04x_4 - 1,2. \end{cases}$$

$$\text{№24.} \begin{cases} x_1 = 0,03x_1 - 0,05x_2 + 0,22x_3 - 0,33x_4 + 0,43; \\ x_2 = 0,22x_1 + 0,55x_2 - 0,88x_3 + 0,07x_4 - 1,8; \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,13x_2 - 0,08x_3 - 0,05x_4 - 0,8; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,17x_2 + 0,29x_3 + 0,33x_4 + 1,7. \end{cases}$$

$$\text{№25.} \begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,22x_2 - 0,33x_3 + 0,07x_4 + 0,11; \\ x_2 = 0,45x_2 - 0,23x_3 + 0,07x_4 - 0,33; \\ x_3 = 0,11x_1 - 0,08x_3 + 0,78x_4 + 0,85; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,09x_2 + 0,33x_3 + 0,21x_4 - 1,7. \end{cases}$$



$$\text{№26.} \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,16x_2 - 0,08x_3 + 0,15x_4 + 2,42; \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,23x_2 + 0,11x_3 - 0,21x_4 + 1,43; \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,08x_2 + 0,34x_4 - 0,16; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,14x_2 - 0,18x_3 + 0,06x_4 + 1,62. \end{cases}$$

$$\text{№27.} \begin{cases} x_1 = 0,08x_2 - 0,23x_3 + 0,32x_4 + 1,34; \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,23x_2 + 0,18x_3 + 0,16x_4 - 2,33; \\ x_3 = 0,15x_1 + 0,12x_2 + 0,32x_3 - 0,18x_4 + 0,34; \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,21x_2 - 0,16x_3 + 0,03x_4 + 0,63. \end{cases}$$

$$\text{№28.} \begin{cases} x_1 = 0,06x_1 + 0,18x_2 + 0,33x_3 + 0,16x_4 + 2,43; \\ x_2 = 0,32x_1 + 0,23x_3 - 0,35x_4 - 1,12; \\ x_3 = 0,16x_1 - 0,08x_2 - 0,12x_4 + 0,43; \\ x_4 = 0,09x_1 + 0,22x_2 - 0,13x_3 + 0,83. \end{cases}$$

$$\text{№29.} \begin{cases} x_1 = 0,34x_2 + 0,23x_3 - 0,06x_4 + 1,42; \\ x_2 = 0,11x_1 - 0,23x_2 - 0,18x_3 + 0,36x_4 - 0,66; \\ x_3 = 0,23x_1 - 0,12x_2 + 0,16x_3 - 0,35x_4 + 1,08; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,12x_2 - 0,47x_3 + 0,18x_4 + 1,72. \end{cases}$$

$$\text{№30.} \begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,23x_2 + 0,41x_3 - 0,06x_4 + 0,67; \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,12x_2 - 0,33x_3 - 0,88; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,32x_2 - 0,05x_3 + 0,67x_4 - 0,18; \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,11x_2 + 0,09x_3 - 0,12x_4 + 1,44. \end{cases}$$