МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Методы вычислений»

Методические указания
по выполнения лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 2
«Решение систем линейных алгебраических уравнений прямыми методами»

Чебоксары
2019

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Ознакомление с прямыми методами решения систем линейных алгебраических уравнений, на примере методов Гаусса, главных элементов, квадратных корней и схемы Халецкого.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Система m линейных уравнений с n неизвестными (или, *линейная система*) в линейной алгебре – это система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{1}$$

где x_i – неизвестные переменные, a_{ij} – коэффициенты при неизвестных (числа), b_j – свободные члены (числа).

Система (1) называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), иначе – *неоднородной*.

Система (1) называется *квадратной*, если число уравнений равно числу неизвестных (m=n).

Решением системы (1) называется совокупность n чисел c_1, c_2, …, c_n, таких что подстановка каждого c_i вместо x_i в систему (1) обращает все ее уравнения в тождества.

Система (1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если у нее нет ни одного решения.

Систему (1) можно записать в матричной форме:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]. \tag{2}$$

Прямые методы позволяют получить решение системы за конечное число арифметических операций, и если все операции выполняются точно (без ошибок округления), то решение заданной системы также получается точным. К прямым методам решения систем линейных уравнений относятся методы Гаусса, Крамера, квадратных корней, Холецкого и др.

2.1.1. Метод Гаусса

Метод Гаусса является наиболее простым и популярным прямым методом. Он состоит из двух этапов.

Первый этап (прямой ход или метод исключений). Последовательно исключая неизвестные, система (1) приводится к треугольному виду

$$x + B^{+}x = \varphi, \tag{3}$$

где $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – неизвестный вектор, $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ – известный вектор, B^{+} – верхняя треугольная матрица.

Второй этап (обратный ход). Определение неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Перейдем к подробному изложению метода.

Прежде всего, необходимо убедиться, что матрица коэффициентов при неизвестных $A=\{a_{ij}\}_{i,\,j=\overline{1,n}}$ невырожденная (т.е. ее определитель отличен от нуля). Также нужно выбрать вычислительную схему последовательного исключения неизвестных. Здесь будет рассмотрена так называемая *схема единственного деления*.

Подвергнем систему (2) следующему преобразованию. Предположим, что $a_{11} \neq 0$ (выполнение этого условия всегда можно добиться перестановкой строк матрицы). Разделим первую строку (2) на a_{11}:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{*} & \ldots & a_{1n}^{*} & b_1^{*} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{array}\right], \quad a_{1j}^{*} = a_{1j}/a_{11},\ b_1^{*} = b_1/a_{11} \tag{4}$$

Используя первую строку матрицы (4), исключим (обнулим) элементы a_{i1}, $i=\overline{2,n}$, т.е. элементы, стоящие в первом столбце под единицей. Для этого из i-й строки вычтем первую, умноженную на соответствующий элемент a_{i1}:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{*} & \ldots & a_{1n}^{*} & b_1^{*} \\ 0 & a_{22}^{\circ} & \ldots & a_{2n}^{\circ} & b_2^{\circ} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{\circ} & \ldots & a_{nn}^{\circ} & b_n^{\circ} \end{array}\right], \quad \begin{array}{l} a_{ij}^{\circ} = a_{ij} - a_{i1}\cdot a_{1j}^{*}, \\ b_i^{\circ} = b_i - a_{i1}\cdot b_1^{*},\ i=\overline{2,n}. \end{array} \tag{5}$$

Далее из матрицы (5) выделим подматрицу, которая не будет содержать первой строки и первого столбца матрицы (5):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{22}^{\circ} & a_{23}^{\circ} & \ldots & a_{2n}^{\circ} & b_2^{\circ} \\ a_{32}^{\circ} & a_{33}^{\circ} & \ldots & a_{3n}^{\circ} & b_3^{\circ} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2}^{\circ} & a_{n3}^{\circ} & \ldots & a_{nn}^{\circ} & b_n^{\circ} \end{array}\right]. \tag{6}$$

С матрицей (6) проделаем те же действия, что и с матрицей (2).

Повторяя этот процесс, вместо матрицы (2) получим равносильную ей верхнюю треугольную матрицу:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^* & a_{13}^* & \dots & a_{1n}^* & b_1^* \\ 0 & 1 & a_{23}^* & \dots & a_{2n}^* & b_2^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^* \end{array}\right]. \tag{7}$$

Тем самым, систему линейных равнений (1) преобразуем к виду:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^* x_2 + a_{13}^* x_3 + \dots + a_{1n}^* x_n = b_1^*, \\ \qquad x_2 + a_{23}^* x_3 + \dots + a_{2n}^* x_n = b_2^*, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad x_{n-1} + a_{n-1n}^* x_n = b_{n-1}^*, \\ \qquad\qquad\qquad x_n = b_n^*. \end{cases} \tag{8}$$

На этом прямой ход метода заканчивается.

Обратный ход Гаусса состоит в определении всех неизвестных x_i из системы (6), начиная с последнего. Из (8) следует:

$$\begin{cases} x_n = b_n^*, \\ x_{n-1} = b_{n-1}^* - a_{n-1n}^* b_n^*, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 = b_1^* - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}^* x_j. \end{cases} \tag{9}$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса с точностью до 0,0001:

$$\begin{cases} 0{,}14x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}11; \\ 1{,}07x_1 - 0{,}83x_2 + 0{,}56x_3 = 0{,}48; \\ 0{,}64x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}38x_3 = -0{,}83. \end{cases}$$

Решение:

Прямой ход

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}14 & 0{,}24 & -0{,}84 & 1{,}11 \\ 1{,}07 & -0{,}83 & 0{,}56 & 0{,}48 \\ 0{,}64 & 0{,}43 & -0{,}38 & -0{,}83 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}7143 & -6{,}0000 & 7{,}9286 \\ 1{,}0700 & -0{,}8300 & 0{,}5600 & 0{,}4800 \\ 0{,}6400 & 0{,}4300 & -0{,}3800 & -0{,}8300 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}7143 & -6{,}0000 & 7{,}9286 \\ 0 & -2{,}6643 & 6{,}9800 & -8{,}0036 \\ 0 & -0{,}6671 & 3{,}4600 & -5{,}9043 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}7143 & -6{,}0000 & 7{,}9286 \\ 0 & 1 & -2{,}6198 & 3{,}0040 \\ 0 & -0{,}6671 & 3{,}4600 & -5{,}9043 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}7143 & -6{,}0000 & 7{,}9286 \\ 0 & 1 & -2{,}6198 & 3{,}0040 \\ 0 & 0 & 1{,}7122 & -3{,}9002 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}7143 & -6{,}0000 & 7{,}9286 \\ 0 & 1 & -2{,}6198 & 3{,}0040 \\ 0 & 0 & 1 & -2{,}2779 \end{array}\right]$$

или $\begin{cases} x_1 + 1{,}7143 x_2 - 6{,}0000 x_3 = 7{,}9286; \\ x_2 - 2{,}6198 x_3 = 3{,}0040; \\ x_3 = -2{,}2779. \end{cases}$

Обратный ход

$$\begin{cases} x_3 = -2{,}2779; \\ x_2 = 3{,}0040 - (-2{,}6198) * (-2{,}2779) = -2{,}9637; \\ x_1 = 7{,}9286 - 1{,}7143 * (-2{,}9637) - (-6{,}0000) * (-2{,}2779) = -0{,}6582. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -0{,}6582, \quad x_2 = -2{,}9637, \quad x_3 = -2{,}2779$.

2.1.2. Метод главных элементов

Этот метод является одной из модификаций метода Гаусса. Пусть дана линейная система (1). Тогда расширенная матрица этой системы будет выглядеть следующим образом:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1f} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2f} & \ldots & a_{2q} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pf} & \ldots & \boxed{a_{pq}} & \ldots & a_{pn} & b_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nf} & \ldots & a_{nq} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Выберем ненулевой, как правило, наибольший по модулю элемент матрицы *M* (в нашем случае пусть это будет элемент a_{pq}), который назовем *главным элементом*. Строку, содержащую главный элемент, назовем *главной строкой*. Вычислим множители

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}, \text{ для всех } i \neq p. \tag{11}$$

Далее произведем следующую операцию: к каждой неглавной строке прибавим главную, умноженную на соответствующий множитель m_i (где i – номер строки). В результате мы получим новую матрицу, у которой q-й столбец состоит из нулей. Отбрасывая этот столбец и главную p-ю строку, получим новую матрицу $M^{(1)}$ с меньшим на единицу числом строк и столбцов.

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q-1} & a_{1q+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q-1} & a_{2q+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p-11} & a_{p-12} & \dots & a_{p-1q-1} & a_{p-1q+1} & \dots & a_{p-1n} & b_{p-1} \\ a_{p+11} & a_{p+12} & \dots & a_{p+1q-1} & a_{p+1q+1} & \dots & a_{p+1n} & b_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nq-1} & a_{nq+1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}. \qquad (12)$$

Над матрицей $M^{(1)}$ повторим те же операции, после чего получим матрицу $M^{(2)}$ и т.д. Таким образом будет построена последовательность матриц

$$M, M^{(1)}, M^{(2)}, \dots, M^{(n-1)},$$

последняя из которых есть двухчленная матрица-строка; ее также определим главной.

Для определения неизвестных x_i объединяем в систему все главные строки, начиная с последней, входящей в матрицу $M^{(n-1)}$.

После надлежащего изменения нумерации неизвестных, получается система с верхней треугольной матрицей, из которой легко шаг за шагом, используя обратный ход метода Гаусса, можно найти неизвестные.

Пример. Решить систему линейных уравнений, используя метод главных элементов с точностью до 0,0001:

$$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 3{,}17x_3 = 2{,}18; \\ 1{,}12x_1 + 0{,}83x_2 - 2{,}16x_3 = -1{,}15; \\ 0{,}18x_1 + 1{,}27x_2 + 0{,}76x_3 = 3{,}23. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad x_1 \quad & \quad x_2 \quad & \quad x_3 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2{,}7400 & -1{,}1800 & \boxed{3{,}1700} & 2{,}1800 \\ 1{,}1200 & 0{,}8300 & -2{,}1600 & -1{,}1500 \\ 0{,}1800 & 1{,}2700 & 0{,}7600 & 3{,}2300 \end{array}\right]. \end{array}$$

В качестве главного возьмем наибольший по модулю элемент: $a_{13} = 3{,}1700$. Теперь вычислим множители m_2 и m_3. Из (11) имеем

$$m_2 = -\frac{a_{23}}{a_{13}} = \frac{2{,}16}{3{,}17} = 0{,}6814,$$

$$m_3 = -\frac{a_{33}}{a_{13}} = -\frac{0{,}76}{3{,}17} = -0{,}2397.$$

Исходная матрица после арифметических действий, описанных в алгоритме, примет вид:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2,7400 & -1,1800 & \boxed{3,1700} & 2,1800 \\ 2,9870 & 0,0260 & 0 & 0,3354 \\ -0,4769 & 1,5529 & 0 & 2,7074 \end{array}\right]. \end{array} \leftarrow \text{первая главная строка}$$

Исключим из рассмотрения первую строка и первый столбец.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{2,9870} & 0,0260 & 0,3354 \\ -0,4769 & 1,5529 & 2,7074 \end{array}\right]. \end{array}$$

Здесь главным элементом выбираем a_{11}=2,987. Следовательно, m_2=0,1597 и

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{2,9870} & 0,0260 & 0,3354 \\ 0 & 1,5570 & 2,7609 \end{array}\right]. \end{array} \leftarrow \text{вторая главная строка}$$

Наконец получаем матрицу строку:

$$\begin{array}{c} x_2 \\ \left[\begin{array}{c|c} 1,5570 & 2,7609 \end{array}\right] \end{array} \leftarrow \text{третья главная строка}$$

Теперь, начиная с последней, соберем вместе все главные строки

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_3 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3,1700 & 2,7400 & -1,1800 & 2,1800 \\ 0 & 2,9870 & 0,0260 & 0,3354 \\ 0 & 0 & 1,5570 & 2,7609 \end{array}\right]. \end{array}$$

Следовательно: $x_2 = \dfrac{2,7609}{1,557} = 1,7732$, $x_1 = \dfrac{0,3354 - 0,026 \cdot 1,7732}{2,987} = 0,0969$,

$x_3 = \dfrac{2,18 + 1,18 \cdot 1,7732 - 2,74 \cdot 0,969}{3,17} = 1,264$.

Ответ: $x_1 = 0,0969,\ x_2 = 1,7732,\ x_3 = 1,264$.

2.1.3. Метод квадратных корней

Этот метод применятся тогда, когда матрица A является симметрической, т.е. $A^T = [a_{ji}] = A$. Такую матрицу можно представить в виде произведения двух транспонированных между собой треугольных матриц:

$$A = T'T, \tag{13}$$

где

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \text{ и } T'=\begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$\begin{cases} t_{11}=\sqrt{a_{11}},\, t_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{t_{11}}, & (j>1), \\ t_{ii}=\sqrt{a_{ii}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, & (1<i\le n), \\ t_{ij}=\dfrac{a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}t_{kj}}{t_{ii}}, & (i<j), \\ t_{ij}=0, & (i>j). \end{cases} \tag{14}$$

При наличии соотношения (13) система уравнений (1) эквивалентно двум системам:

$$T'y=b \text{ и } Tx=y.$$

Отсюда находим:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{b_1}{t_{11}}, \\ y_i=\dfrac{b_i-\sum\limits_{k=1}^{i-1} t_{ki}y_k}{t_{ii}} \quad (i>1), \end{cases} \tag{15}$$

и

$$\begin{cases} x_n=\dfrac{y_n}{t_{nn}}, \\ x_i=\dfrac{y_i-\sum\limits_{k=i+1}^{n} t_{ik}x_k}{t_{ii}} \quad (i<n). \end{cases} \tag{16}$$

При практическом применении метода квадратных корней прямым ходом при помощи формул (13) и (14) последовательно вычисляются коэффициенты t_{ij} и y_i, а затем обратным ходом с помощью формулы (15) находятся неизвестные x_i $(i=n, n\text{-}1, \ldots, 1)$.

Пример: Решить систему линейных уравнений методом квадратных корней с точностью до 0,001

$$\begin{cases} 4{,}25x_1-1{,}48x_2+0{,}73x_3=1{,}44; \\ -1{,}48x_1+1{,}73x_2-1{,}85x_3=2{,}73; \\ 0{,}73x_1-1{,}85x_2+1{,}93x_3=-0{,}64. \end{cases}$$

Решение:

Дана следующая матрица:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4{,}25 & -1{,}48 & 0{,}73 & 1{,}44 \\ -1{,}48 & 1{,}73 & -1{,}85 & 2{,}73 \\ 0{,}73 & -1{,}85 & 1{,}93 & -0{,}64 \end{array}\right].$$

Найдем сначала элементы матрицы *T*. Для этого воспользуемся формулами системы (14).

$$t_{11}=2{,}0616;\quad t_{12}=\frac{-1{,}48}{2{,}0616}=-0{,}7179;\ t_{13}=\frac{0{,}73}{2{,}0616}=0{,}3541;$$

$$t_{21}=0;\ t_{22}=\sqrt{1{,}73-(-0{,}7179)^2}=1{,}1021;\ t_{23}=\frac{-1{,}85+0{,}7179*0{,}3541}{1{,}1021}=-1{,}4480;$$

$$t_{31}=0;\ t_{32}=0;\ t_{33}=\sqrt{1{,}93-0{,}3541^2-(-1{,}448)^2}=0{,}5403i\,.$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{1{,}44}{2{,}0616}=0{,}6985\,, \\ y_2=\dfrac{2{,}73+0{,}7179\ *0{,}6985}{1{,}1021}=2{,}9321\,, \\ y_3=\dfrac{-0{,}64-0{,}3541\ *0{,}6985\ +1{,}4480\ *2{,}9321}{0{,}5403\ i}=6{,}2149\ i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=\dfrac{6{,}2149i}{0{,}5403i}=-11{,}5017; \\ x_2=\dfrac{2{,}9321-(-1{,}4480)*(-11{,}5017)}{1{,}1021}=-12{,}4508; \\ x_1=\dfrac{0{,}6985-(-0{,}7179)*(-12{,}4508)-0{,}3541*(-11{,}5017)}{2{,}0616}=-2{,}0214. \end{cases}$$

Ответ: x_1=–2,0214; x_2=–12,4508; x_3=–11,5017.

2.1.4. Схема Халецкого

Для удобства рассуждений, систему линейных уравнений (1) запишем в матричном виде следующим образом

$$Ax=b, \tag{17}$$

где $A=[a_{ij}]$ - квадратная матрица порядка *n* и $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{bmatrix}$ - векторы-столбцы.

Представим матрицу *A* в виде произведения нижней треугольной матрицы $B=[b_{ij}]$ и верхней треугольной матрицы $C=[c_{ij}]$ с единичной диагональю, т.е.

$$A=BC, \tag{18}$$

где

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & ... & 0 \\ b_{21} & b_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & ... & c_{1n} \\ 0 & 1 & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда ненулевые элементы b_{ij} и c_{ij} определяются по формулам

$$\begin{cases} b_{i1}=a_{i1}, \\ b_{ij}=a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{j-1} b_{ik}c_{kj} \quad (i \ge j > 1), \end{cases} \qquad (19)$$

$$\begin{cases} c_{1j}=\dfrac{a_{1j}}{b_{11}}, \\ c_{ij}=\dfrac{1}{b_{ii}}\left(a_{ij}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}c_{kj}\right) \quad (1 < i < j). \end{cases} \qquad (20)$$

Отсюда искомый вектор x может быть вычислен из систем уравнений $By=b$, $Cx=y$. Так как матрицы B и C – треугольные, то системы легко решаются, а именно:

$$\begin{cases} y_1=\dfrac{a_{1,n+1}}{b_{11}}, \\ y_i=\dfrac{1}{b_{ii}}\left(a_{i,n+1}-\sum\limits_{k=1}^{i-1} b_{ik}y_k\right) \quad (i > 1) \end{cases} \qquad (21)$$

$$\begin{cases} x_n=y_n, \\ x_i=y_i-\sum\limits_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k \quad (i < n). \end{cases} \qquad (22)$$

Из формул (21) видно, что числа y_i выгодно вычислять вместе с коэффициентами c_{ij}.

Пример: Решить систему линейных уравнений по схеме Халецкого с точностью до 0,001.

$$\begin{cases} 0{,}14x_1+0{,}24x_2-0{,}84x_3=1{,}11; \\ 1{,}07x_1-0{,}83x_2+0{,}56x_3=0{,}48; \\ 0{,}64x_1+0{,}43x_2-0{,}38x_3=-0{,}83. \end{cases}$$

Решение:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}14 & 0{,}24 & -0{,}84 & 1{,}11 \\ 1{,}07 & -0{,}83 & 0{,}56 & 0{,}48 \\ 0{,}64 & 0{,}43 & -0{,}38 & -0{,}83 \end{array}\right]$$

Сначала разложим матрицу коэффициентов на две матрицы B и C, ненулевые элементы которых находятся по формулам (18)-(19) (последовательность выполнения вычислений указана стрелками).

$$
\begin{array}{ll}
b_{11} = 0{,}1400, & c_{11} = 1{,}0000, \\
b_{21} = 1{,}0700, & c_{12} = 1{,}7143, \\
b_{22} = -2{,}6643, & c_{13} = -6{,}0000, \\
b_{31} = 0{,}6400, & c_{22} = 1{,}0000, \\
b_{32} = -0{,}6671, & c_{23} = -2{,}6198, \\
b_{33} = 1{,}7122; & c_{33} = 1{,}0000.
\end{array}
$$

Отсюда следует:

$$y_1 = \frac{1{,}1100}{0{,}1400} = 7{,}9286;$$

$$y_2 = \frac{0{,}48 - 1{,}0700 * 7{,}9286}{-2{,}6643} = 3{,}0040;$$

$$y_3 = \frac{-0{,}83 - 0{,}6400 * 7{,}9286 - (-0{,}6671) * 3{,}0040}{1{,}7122} = -2{,}2779$$

и

$$x_3 = -2{,}2779,$$
$$x_2 = 3{,}0040 - (-2{,}6198) * (-2{,}2779) = -2{,}9637,$$
$$x_1 = 7{,}9286 - 1{,}7143 * (-2{,}9637) - (-6{,}000) * (-2{,}2779) = -0{,}6582.$$

Ответ: $x_1 = -0{,}6582, \quad x_2 = -2{,}9637, \quad x_3 = -2{,}2779$.

3. ЗАДАНИЯ

Решить методами Гаусса, главных элементов, квадратных корней и Халецкого (согласно варианту) следующие системы

№1. $\begin{cases} 3{,}21x_1 - 4{,}25x_2 + 2{,}13x_3 = 5{,}06; \\ 7{,}09x_1 + 1{,}17x_2 - 2{,}23x_3 = 4{,}75; \\ 0{,}43x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}62x_3 = -1{,}05. \end{cases}$

№2. $\begin{cases} 0{,}42x_1 - 1{,}13x_2 + 7{,}05x_3 = 6{,}15; \\ 1{,}14x_1 - 2{,}15x_2 + 5{,}11x_3 = -4{,}16; \\ -0{,}71x_1 + 0{,}81x_2 - 0{,}02x_3 = -0{,}17. \end{cases}$

№3. $\begin{cases} 2{,}5x_1 - 3{,}12x_2 - 4{,}03x_3 = -7{,}5; \\ 0{,}61x_1 + 0{,}71x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}44; \\ -1{,}03x_1 - 2{,}05x_2 + 0{,}877x_3 = -1{,}16. \end{cases}$

№4. $\begin{cases} 7{,}09x_1 + 1{,}17x_2 - 2{,}23x_3 = -4{,}75; \\ 0{,}43x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}62x_3 = -1{,}05; \\ 3{,}21x_1 - 4{,}25x_2 + 2{,}13x_3 = 5{,}06. \end{cases}$

№5. $\begin{cases} 1{,}14x_1 - 2{,}15x_2 - 5{,}11x_3 = -4{,}16; \\ -0{,}71x_1 + 0{,}81x_2 - 0{,}02x_3 = -0{,}17; \\ 0{,}42x_1 - 1{,}13x_2 + 7{,}05x_3 = 6{,}15. \end{cases}$

№6. $\begin{cases} 0{,}61x_1 + 0{,}71x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}44; \\ -1{,}03x_1 - 2{,}05x_2 + 0{,}87x_3 = -1{,}16; \\ 2{,}5x_1 - 3{,}12x_2 - 5{,}03x_3 = -7{,}5. \end{cases}$

№7. $\begin{cases} 3{,}11x_1 - 1{,}66x_2 - 0{,}60x_3 = -0{,}92; \\ -1{,}65x_1 + 3{,}51x_2 - 0{,}78x_3 = 2{,}57; \\ 0{,}60x_1 + 0{,}78x_2 - 1{,}87x_3 = 1{,}65. \end{cases}$

№8. $\begin{cases} 0{,}10x_1 + 12x_2 - 0{,}13x_3 = 0{,}10; \\ 0{,}12x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}26; \\ -0{,}13x_1 + 0{,}15x_2 0{,}63x_3 = 0{,}38. \end{cases}$

№9. $\begin{cases} 0,71x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 = 0,29; \\ 0,10x_1 + 0,34x_2 - 0,04x_3 = 0,32; \\ 0,12x_1 - 0,04x_2 + 0,10x_3 = -0,10. \end{cases}$

№10. $\begin{cases} 0,34x_1 - 0,04x_2 + 0,10x_3 = 0,33; \\ -0,44x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 = -0,05; \\ 0,10x_1 + 0,12x_2 + 0,71x_3 = 0,28; \end{cases}$

№11. $\begin{cases} 0,12x_1 - 0,43x_2 + 0,14x_3 = -0,17; \\ -0,07x_1 + 0,34x_2 + 0,72x_3 = 0,62; \\ 1,18x_1 - 0,08x_2 - 0,25x_3 = 1,12. \end{cases}$

№12. $\begin{cases} 1,17x_1 + 0,53x_2 - 0,84x_3 = 1,15; \\ 0,64x_1 - 0,72x_2 - 0,43x_3 = 0,15; \\ 0,32x_1 + 0,43x_2 - 0,93x_3 = -0,48; \end{cases}$

№13. $\begin{cases} 0,66x_1 - 1,44x_2 - 0,18x_3 = 1,83; \\ 0,48x_1 - 0,24x_2 + 0,37x_3 = -0,84; \\ 0,86x_1 + 0,43x_2 + 0,64x_3 = 0,64. \end{cases}$

№14. $\begin{cases} 0,82x_1 + 0,43x_2 - 0,57x_3 = 0,48; \\ -0,35x_1 + 1,12x_2 - 0,48x_3 = 0,52; \\ 0,48x_1 + 0,23x_2 + 0,37x_3 = 1,44. \end{cases}$

№15. $\begin{cases} 1,6x_1 + 0,12x_2 + 0,57x_3 = 0,18; \\ 0,38x_1 + 0,25x_2 - 54x_3 = 0,63; \\ 0,28x_1 + 0,46x_2 - 1,12x_3 = 0,88. \end{cases}$

№16. $\begin{cases} 1,16x_1 + 1,3x_2 - 1,14x_3 = 0,43; \\ 0,83x_1 - 0,48x_2 - 2,44x_3 = -0,15; \\ 2x_1 - 0,16x_2 + 1,3x_3 = 1,5. \end{cases}$

№17. $\begin{cases} 0,10x_1 - 0,04x_2 - 0,13x_3 = -0,15; \\ -0,04x_1 + 0,34x_2 + 0,05x_3 = 0,31; \\ -0,13x_1 + 0,05x_2 + 0,63x_3 = 0,37. \end{cases}$

№18. $\begin{cases} 0,63x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34; \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32; \\ 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,71x_3 = 0,42. \end{cases}$

№19. $\begin{cases} 1,20x_1 - 0,20x_2 + 0,30x_3 = -0,60; \\ -0,20x_1 + 1,60x_2 - 0,10x_3 = 0,30; \\ -0,30x_1 + 0,10x_2 - 1,5x_3 = 0,40. \end{cases}$

№20. $\begin{cases} 0,30x_1 + 1,20x_2 - 0,20x_3 = -0,60; \\ -0,10x_1 - 0,20x_2 + 1,60x_3 = 0,30; \\ -1,50x_1 - 0,30x_2 + 0,10x_3 = 40. \end{cases}$

№21. $\begin{cases} 0,20x_1 + 0,44x_2 + 0,81x_3 = 0,74; \\ 0,58x_1 - 0,29x_2 + 0,05x_3 = 0,02; \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32. \end{cases}$

№22. $\begin{cases} 6,36x_1 + 11,75x_2 + 10x_3 = -41,70; \\ 7,42x_1 + 19,03x_2 + 11,75x_3 = -49,49; \\ 5,77x_1 + 7,42x_2 + 6,36x_3 = -27,67. \end{cases}$

№23. $\begin{cases} 0,40x_1 + 0,11x_2 + 0,18x_3 = 0,47; \\ 0,28x_1 - 0,59x_2 + 0,03x_3 = 0,01; \\ 0,02x_1 + 0,24x_2 + 0,10x_3 = 0,22. \end{cases}$

№24. $\begin{cases} 0,18x_1 + 0,25x_2 - 0,44x_3 = 1,15; \\ 0,42x_1 - 0,35x_2 + 1,12x_3 = 0,86; \\ 1,14x_1 + 0,12x_2 - 0,83x_3 = 0,68. \end{cases}$

№25. $\begin{cases} 1,2x_1 + 0,18x_2 - 0,42x_3 = 1,5; \\ 0,44x_1 + 0,36x_2 + 0,12x_3 = 1,16; \\ 0,36x_1 - 0,42x_2 - 0,22x_3 = 0,15. \end{cases}$

№26. $\begin{cases} 0,64x_1 - 0,43x_2 + 0,57x_3 = 0,43; \\ 0,56x_1 + 0,12x_2 - 0,27x_3 = 0,88; \\ 0,63x_1 - 0,83x_2 + 0,43x_3 = -0,12. \end{cases}$

№27. $\begin{cases} 1,60x_1 + 2,18x_2 - 0,72x_3 = 1,15; \\ 0,43x_1 - 0,16x_2 + 0,53x_3 = 0,83; \\ 0,34x_1 + 0,57x_2 - 0,83x_3 = -0,42. \end{cases}$

№28. $\begin{cases} 0,8x_1 - 0,13x_2 + 0,63x_3 = 1,15; \\ 0,42x_1 + 0,57x_2 + 0,32x_3 = 0,84; \\ 0,54x_1 + 0,62x_2 - 0,32x_3 = 0,25. \end{cases}$

№29. $\begin{cases} 1,06x_1 - 0,28x_2 + 0,84x_3 = 0,57; \\ 0,43x_1 + 0,62x_2 - 0,35x_3 = 0,66; \\ 0,37x_1 - 0,75x_2 - 0,64x_3 = -0,38. \end{cases}$

№30. $\begin{cases} 0,75x_1 - 0,84x_2 + 1,11x_3 = 0,68; \\ 1,12x_1 - 0,14x_2 + 0,45x_3 = 0,83; \\ 0,32x_1 + 0,23x_2 - 0,48x_3 = 0,14. \end{cases}$

№31. $\begin{cases} 3{,}14x_1 - 2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27; \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13; \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14; \end{cases}$

№32. $\begin{cases} 2{,}45x_1 + 1{,}75x_2 - 3{,}24x_3 = 1{,}23; \\ 1{,}75x_1 - 1{,}16x_2 + 2{,}18x_3 = 3{,}43; \\ -3{,}24x_1 + 2{,}18x_2 - 1{,}85x_3 = -0{,}16. \end{cases}$

№33. $\begin{cases} 1{,}65x_1 - 2{,}27x_2 + 0{,}18x_3 = 2{,}25; \\ -2{,}27x_1 + 1{,}73x_2 - 0{,}46x_3 = 0{,}93; \\ 0{,}18x_1 - 0{,}46x_2 + 2{,}16x_3 = 1{,}33. \end{cases}$

№34. $\begin{cases} 3{,}23x_1 + 1{,}62x_2 + 0{,}65x_3 = 1{,}28; \\ 1{,}62x_1 - 2{,}33x_2 - 1{,}43x_3 = 0{,}87; \\ 0{,}65x_1 - 1{,}43x_2 + 2{,}18x_3 = -2{,}87. \end{cases}$

№35. $\begin{cases} 0{,}93x_1 + 1{,}42x_2 - 2{,}55x_3 = 2{,}48; \\ 1{,}42x_1 - 2{,}87x_2 + 2{,}36x_3 = -0{,}75; \\ -2{,}55x_1 + 2{,}36x_2 - 1{,}44x_3 = 1{,}83. \end{cases}$

№36. $\begin{cases} 1{,}42x_1 - 2{,}15x_2 + 1{,}07x_3 = 2{,}48; \\ 2{,}15x_1 + 0{,}76x_2 - 2{,}18x_3 = 1{,}15; \\ 1{,}07x_1 - 2{,}18x_2 + 1{,}23x_3 = 0{,}88. \end{cases}$

№37. $\begin{cases} 2{,}23x_1 - 0{,}71x_2 + 0{,}63x_3 = 1{,}28; \\ -0{,}71x_1 + 1{,}45x_2 - 1{,}34x_3 = 0{,}64; \\ 0{,}63x_1 - 1{,}34x_2 + 0{,}77x_3 = 0{,}87. \end{cases}$

№38. $\begin{cases} 1{,}63x_1 + 1{,}27x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}51; \\ 1{,}27x_1 + 0{,}65x_2 + 1{,}27x_3 = -0{,}63; \\ -0{,}84x_1 + 1{,}27x_2 - 1{,}21x_3 = 2{,}15. \end{cases}$

№39. $\begin{cases} 0{,}78x_1 + 1{,}08x_2 - 1{,}35x_3 = 0{,}57; \\ 1{,}08x_1 - 1{,}28x_2 + 0{,}37x_3 = 1{,}27; \\ -1{,}35x_1 + 0{,}37x_2 + 2{,}86x_3 = 0{,}47. \end{cases}$

№40. $\begin{cases} 0{,}83x_1 + 2{,}18x_2 - 1{,}73x_3 = 0{,}28; \\ 2{,}18x_1 - 1{,}41x_2 + 1{,}03x_3 = -1{,}18; \\ -1{,}73x_1 + 1{,}03x_2 + 2{,}27x_3 = 0{,}72. \end{cases}$

№41. $\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 1{,}23x_3 = 0{,}16; \\ -1{,}18x_1 + 1{,}71x_2 - 0{,}52x_3 = 1{,}81; \\ 1{,}23x_1 - 0{,}52x_2 + 0{,}62x_3 = -1{,}25. \end{cases}$

№42. $\begin{cases} 1{,}35x_1 - 0{,}72x_2 + 1{,}38x_3 = 0{,}88; \\ -0{,}72x_1 + 1{,}45x_2 - 2{,}18x_3 = 1{,}72; \\ 1{,}38x_1 - 2{,}18x_2 + 0{,}93x_3 = -0{,}72. \end{cases}$

№43. $\begin{cases} 1{,}48x_1 + 0{,}75x_2 - 1{,}23x_3 = 0{,}83; \\ 0{,}75x_1 - 0{,}96x_2 + 1{,}64x_3 = -1{,}12; \\ -1{,}23x_1 + 1{,}64x_2 - 0{,}55x_3 = 0{,}47. \end{cases}$

№44. $\begin{cases} 2{,}16x_1 - 3{,}18x_2 + 1{,}26x_3 = 1{,}83; \\ -3{,}18x_1 + 0{,}63x_2 - 2{,}73x_3 = 0{,}54; \\ 1{,}26x_1 - 2{,}73x_2 + 3{,}15x_3 = 1{,}72. \end{cases}$

№45. $\begin{cases} 0{,}63x_1 - 1{,}72x_2 + 3{,}37x_3 = -0{,}75; \\ -1{,}72x_1 - 2{,}27x_2 + 1{,}62x_3 = 1{,}27; \\ 3{,}27x_1 + 1{,}62x_2 - 0{,}43x_3 = 2{,}74. \end{cases}$

№46. $\begin{cases} 1{,}36x_1 + 0{,}92x_2 - 1{,}87x_3 = 2{,}15; \\ 0{,}92x_1 - 2{,}24x_2 + 0{,}77x_3 = -2{,}06; \\ -1{,}87x_1 + 0{,}77x_2 - 1{,}16x_3 = 0{,}17. \end{cases}$

№47. $\begin{cases} 2{,}32x_1 + 1{,}17x_2 - 0{,}28x_3 = 1{,}43; \\ 1{,}17x_1 - 1{,}43x_2 + 0{,}88x_3 = -0{,}47; \\ -0{,}28x_1 + 0{,}88x_2 - 1{,}45x_3 = 1{,}09. \end{cases}$

№48. $\begin{cases} 0{,}75x_1 - 1{,}24x_2 + 1{,}56x_3 = 0{,}49; \\ -1{,}24x_1 + 0{,}18x_2 - 1{,}72x_3 = -0{,}57; \\ 1{,}56x_1 - 1{,}72x_2 + 0{,}79x_3 = 1{,}03. \end{cases}$

№49. $\begin{cases} 1{,}18x_1 + 2{,}32x_2 - 0{,}67x_3 = 1{,}83; \\ 2{,}32x_1 + 1{,}87x_2 + 1{,}35x_3 = -0{,}73; \\ -0{,}67x_1 + 1{,}35x_2 - 0{,}88x_3 = 0{,}68. \end{cases}$

№50. $\begin{cases} 0{,}78x_1 + 1{,}13x_2 + 1{,}87x_3 = 0{,}83; \\ 1{,}13x_1 - 0{,}68x_2 + 2{,}16x_3 = -0{,}27; \\ 1{,}87x_1 + 2{,}16x_2 - 2{,}63x_3 = 1{,}37. \end{cases}$

№51. $\begin{cases} 1{,}17x_1 - 0{,}65x_2 + 1{,}54x_3 = -1{,}43; \\ -0{,}65x_1 + 1{,}16x_2 - 1{,}73x_3 = 0{,}68; \\ 1{,}54x_1 - 1{,}73x_2 + 2{,}15x_3 = 1{,}87. \end{cases}$

№52. $\begin{cases} 0{,}87x_1 + 1{,}35x_2 - 0{,}44x_3 = 1{,}51; \\ 1{,}35x_1 - 1{,}22x_2 + 2{,}32x_3 = 0{,}71; \\ -0{,}44x_1 + 2{,}32x_2 - 3{,}73x_3 = 0{,}53. \end{cases}$

№53. $\begin{cases} 1{,}17x_1 + 2{,}23x_2 - 0{,}77x_3 = 1{,}11; \\ 2{,}23x_1 - 0{,}81x_2 + 1{,}72x_3 = 1{,}88; \\ -0{,}77x_1 + 1{,}72x_2 - 0{,}65x_3 = 0{,}57. \end{cases}$

№54. $\begin{cases} 2{,}16x_1 + 1{,}45x_2 - 0{,}89x_3 = 0{,}61; \\ 1{,}45x_1 - 2{,}44x_2 + 1{,}18x_3 = 1{,}05; \\ -0{,}89x_1 + 1{,}18x_2 - 2{,}07x_3 = -0{,}83. \end{cases}$

№55. $\begin{cases} 0{,}64x_1 + 1{,}05x_2 - 2{,}93x_3 = 1{,}18; \\ 1{,}05x_1 - 1{,}41x_2 + 0{,}16x_3 = -0{,}27; \\ -2{,}93x_1 + 0{,}16x_2 - 1{,}51x_3 = 0{,}72. \end{cases}$

№56. $\begin{cases} 1{,}54x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}36x_3 = 2{,}45; \\ -0{,}75x_1 + 0{,}87x_2 - 0{,}79x_3 = 1{,}07; \\ 1{,}36x_1 - 0{,}79x_2 + 0{,}64x_3 = 0{,}54. \end{cases}$

№57. $\begin{cases} 2{,}44x_1 - 1{,}16x_2 + 0{,}83x_3 = 0{,}65; \\ -1{,}16x_1 - 3{,}45x_2 + 0{,}57x_3 = 1{,}88; \\ 0{,}53x_1 + 0{,}57x_2 - 1{,}71x_3 = 0{,}74. \end{cases}$

№58. $\begin{cases} 2{,}56x_1 + 0{,}67x_2 - 1{,}78x_3 = 1{,}14; \\ 0{,}67x_1 - 2{,}67x_2 + 0{,}35x_3 = 0{,}66; \\ -1{,}78x_1 + 1{,}35x_2 - 0{,}55x_3 = 1{,}72. \end{cases}$

№59. $\begin{cases} 0{,}53x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}83x_3 = 0{,}68; \\ -0{,}75x_1 + 0{,}68x_2 - 1{,}19x_3 = 0{,}95; \\ 1{,}83x_1 - 1{,}19x_2 + 2{,}15x_3 = 1{,}27. \end{cases}$

№60. $\begin{cases} 1{,}65x_1 - 1{,}76x_2 + 0{,}77x_3 = 2{,}15; \\ -1{,}76x_1 + 1{,}04x_2 - 2{,}61x_3 = 0{,}82; \\ 0{,}77x_1 - 2{,}61x_2 - 3{,}18x_3 = -0{,}73. \end{cases}$