

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Методы вычислений»

Методические указания
по выполнению лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 1
«Элементарная теория погрешностей»

Чебоксары
2019

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Изучение теории погрешностей. Получение навыков в вычислении абсолютных и относительных погрешностей основных алгебраических операций.

2. КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

2.1. Определение погрешности

Под **ошибкой** или **погрешностью** приближенного числа a обычно понимается разность между соответствующим точным числом a и данным приближением. Однако во многих случаях знак этой ошибки неизвестен, поэтому целесообразней использовать абсолютную погрешность приближенного числа.

Если a – точное значение некоторой величины, а a^* – известное приближение к нему, то **абсолютной погрешностью** приближения a^* называют обычно некоторую величину $\Delta(a^*)$, про которую известно, что она удовлетворяет неравенству:

$$|a^* - a| \leq \Delta(a^*).$$

Относительной погрешностью называют некоторую величину $\delta(a^*)$, про которую известно, что она удовлетворяет неравенству:

$$\left| \frac{a^* - a}{a^*} \right| \leq \delta(a^*).$$

2.2. Погрешности арифметических операций

Пусть $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ непрерывно дифференцируемая функция, x_i^* – приближенное значение ее аргументов, для которых $|x_i^* - x_i| \leq \Delta(x_i^*)$ – известные абсолютные погрешности, $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Тогда оценка

$$|y - y^*| \leq \Delta(y^*) = \sum_{i=1}^n A_i \Delta(x_i^*), \text{ где } A_i = \sup \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|$$

или

$$|y - y^*| \approx \sum_{i=1}^n A_i^* \Delta(x_i^*), \text{ где } A_i^* = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \right|.$$

**Абсолютная и относительная погрешности
основных алгебраических операций**

$y = f(x_1, x_2)$	$\Delta(y^*)$	$\delta(y^*)$
$x_1 + x_2$	$\Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*)$	$\frac{\delta(x_1^*) \cdot x_1^* + \delta(x_2^*) \cdot x_2^*}{x_1^* + x_2^*}$
$x_1 - x_2$	$\Delta(x_1^*) + \Delta(x_2^*)$	$\frac{\delta(x_1^*) \cdot x_1^* + \delta(x_2^*) \cdot x_2^*}{x_1^* - x_2^*}$
$x_1 \cdot x_2$	$ x_2^* \Delta(x_1^*) + x_1^* \Delta(x_2^*)$	$\delta(x_1^*) + \delta(x_2^*)$
$\frac{x_1}{x_2}$	$ x_2^* \Delta(x_1^*) + x_1^* \Delta(x_2^*)$	$\delta(x_1^*) + \delta(x_2^*)$

Пример

Вычислить и определить погрешности результатов

1) $X = \frac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}$, где $m=28,3(\pm 0,02)$, $n=7,45(\pm 0,01)$, $k=0,678(\pm 0,003)$;

2) $N = \frac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, где $n=3,0567(\pm 0,0001)$, $m=5,72(\pm 0,02)$.

Решение

1) Находим $m^2=800,9$; $n^3=413,5$; $\sqrt{k} = 0,8234$;

$$X = \frac{800,9 \cdot 413,5}{0,8234} = 402200 = 4,02 \cdot 10^5.$$

Далее, имеем $\delta_m = 0,02/28,3 = 0,00071$; $\delta_n = 0,01/7,45 = 0,00134$; $\delta_k = 0,003/0,678 = 0,00443$, откуда

$$\delta_X = 2\delta_m + 3\delta_n + 0,5\delta_k = 0,0077 = 0,77\%;$$

$$\Delta_X = 4,02 \cdot 10^5 \cdot 0,0077 = 3,1 \cdot 10^3.$$

Ответ: $X=4,02 \cdot 10^5(\pm 3,1 \cdot 10^3)$; $\delta_X = 0,77\%$

2) Имеем $n-1=2,0567(\pm 0,0001)$; $m+n=3,057(\pm 0,0004)+5,72(\pm 0,02)=8,777(\pm 0,0204)$;
 $m-n=5,72(\pm 0,02)-3,057(\pm 0,0004)=2,663(\pm 0,0204)$;

$$N = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{2,663^2} = \frac{2,0567 \cdot 8,777}{7,092} = 2,545 \approx 2,55;$$

$$\delta_N = \frac{0,0001}{2,0567} + \frac{0,0204}{8,777} + 2 \cdot \frac{0,0204}{2,663} = 0,000049 + 0,00233 + 2 \cdot 0,00766 = 0,0177 = 1,77\%$$

$$\Delta_N = 2,55 \cdot 0,0177 = 0,046.$$

Ответ: $N \approx 2,55(\pm 0,046)$; $\delta_N = 1,77\%$.

3. ЗАДАНИЯ

Вычислить и определить погрешности результата.

№ 1.

1) $X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$

	<i>Вариант 1</i>	<i>Вариант 2</i>	<i>Вариант 3</i>
<i>a</i>	3,85(±0,01)	4,16(±0,005)	7,27(±0,01)
<i>b</i>	2,0435(±0,0004)	12,163(±0,002)	5,205(±0,002)
<i>c</i>	962,6(±0,1)	55,18(±0,01)	87,32(±0,03)

2) $X = \left[\frac{(a+b)c}{m-n} \right]^2$

	<i>Вариант 1</i>	<i>Вариант 2</i>	<i>Вариант 3</i>
<i>a</i>	4,3(±0,05)	5,2(±0,04)	2,13(±0,01)
<i>b</i>	17,21(±0,02)	15,32(±0,01)	22,16(±0,03)
<i>c</i>	8,2(±±0,05)	7,5(±0,05)	6,3(±0,04)
<i>m</i>	12,417(±0,003)	21,823(±0,002)	16,825(±0,004)
<i>n</i>	8,37(±0,005)	7,56(±0,003)	8,18(±0,002)

№ 2.

1) $X = \frac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$

	<i>Вариант 4</i>	<i>Вариант 5</i>	<i>Вариант 6</i>
<i>a</i>	3,85(±0,01)	4,16(±0,005)	7,27(±0,01)
<i>b</i>	2,0435(±0,0004)	12,163(±0,002)	5,205(±0,002)
<i>c</i>	962,6(±0,1)	55,18(±0,01)	87,32(±0,03)

2) $X = \frac{m^3(a+b)}{c-d}$

	<i>Вариант 4</i>	<i>Вариант 5</i>	<i>Вариант 6</i>
<i>a</i>	13,5(±0,02)	18,5(±0,03)	11,8(±0,02)
<i>b</i>	3,7(±0,02)	5,6(±0,02)	7,4(±0,03)
<i>m</i>	4,22(±0,004)	3,42(±0,003)	5,82(±0,005)
<i>c</i>	34,5(±0,02)	26,3(±0,01)	26,7(±0,03)
<i>d</i>	23,725(±0,005)	14,782(±0,006)	11,234(±0,004)

№ 3.

1) $X = \frac{\sqrt{ab}}{c}$

	<i>Вариант 7</i>	<i>Вариант 8</i>	<i>Вариант 9</i>
<i>a</i>	3,845(±0,004)	4,632(±0,03)	7,312(±0,004)
<i>b</i>	16,2(±0,05)	23,3(±0,04)	18,4(±0,03)
<i>c</i>	10,8(±0,1)	11,3(±0,06)	20,2(±0,08)

$$2) X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2}$$

	<i>Вариант 7</i>	<i>Вариант 8</i>	<i>Вариант 9</i>
<i>a</i>	2,754(±0,001)	3,236(±0,002)	4,523(±0,003)
<i>b</i>	11,7(±0,04)	15,8(±0,03)	10,8(±0,02)
<i>m</i>	0,56(±0,005)	0,64(±0,004)	0,85(±0,003)
<i>c</i>	10,536(±0,002)	12,415(±0,003)	9,318(±0,002)
<i>d</i>	6,32(±0,008)	7,18(±0,006)	4,17(±0,004)

№ 4.

$$1) X = \frac{a^2b}{c}$$

	<i>Вариант 10</i>	<i>Вариант 11</i>	<i>Вариант 12</i>
<i>a</i>	3,456(±0,002)	1,245(±0,001)	0,327(±0,005)
<i>b</i>	0,642(±0,0005)	0,121(±0,0002)	3,147(±0,0001)
<i>c</i>	7,12(±0,004)	2,34(±0,003)	1,78(±0,001)

$$2) X = \frac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$$

	<i>Вариант 10</i>	<i>Вариант 11</i>	<i>Вариант 12</i>
<i>a</i>	23,16(±0,02)	17,41(±0,01)	32,37(±0,03)
<i>b</i>	8,23(±0,005)	1,27(±0,002)	2,35(±0,001)
<i>c</i>	145,5(±0,08)	342,3(±0,04)	128,7(±0,02)
<i>d</i>	28,6(±0,1)	11,7(±0,1)	27,3(±0,04)
<i>m</i>	0,28(±0,006)	0,71(±0,003)	0,93(±0,001)

№ 5.

$$1) X = \frac{ab^3}{c}$$

	<i>Вариант 13</i>	<i>Вариант 14</i>	<i>Вариант 15</i>
<i>a</i>	0,643(±0,0005)	0,142(±0,0003)	0,258(±0,0002)
<i>b</i>	2,17(±0,002)	1,71(±0,002)	3,54(±0,001)
<i>c</i>	5,843(±0,001)	3,727(±0,001)	7,221(±0,003)

$$2) X = \frac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$$

	<i>Вариант 13</i>	<i>Вариант 14</i>	<i>Вариант 15</i>
<i>a</i>	27,16(±0,006)	15,71(±0,005)	12,31(±0,004)
<i>b</i>	5,03(±0,01)	3,28(±0,02)	1,73(±0,03)
<i>c</i>	3,6(±0,02)	7,2(±0,01)	3,7(±0,02)
<i>m</i>	12,375(±0,004)	13,752(±0,001)	17,428(±0,003)
<i>n</i>	86,2(±0,05)	33,7(±0,03)	41,7(±0,01)

$$1) X = \frac{ab}{c^2}$$

	Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
<i>a</i>	0,3575(±0,0002)	0,1756(±0,0001)	0,2731(±0,0003)
<i>b</i>	2,63(±0,01)	3,71(±0,03)	5,12(±0,02)
<i>c</i>	0,854(±0,0005)	0,285(±0,0002)	0,374(±0,0001)

$$2) X = \frac{(a+b)}{\sqrt{(c-d)m}}$$

	Вариант 16	Вариант 17	Вариант 18
<i>a</i>	16,342(±0,001)	12,751(±0,001)	31,456(±0,002)
<i>b</i>	2,5(±0,03)	3,7(±0,02)	7,3(±0,01)
<i>c</i>	38,17(±0,002)	23,76(±0,003)	33,28(±0,003)
<i>d</i>	9,14(±0,005)	8,12(±0,004)	6,71(±0,001)
<i>m</i>	3,6(±0,04)	1,7(±0,01)	5,8(±0,02)

$$1) X = \frac{a^2b}{c^3}$$

	Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21
<i>a</i>	1,6531(±0,0003)	2,348(±0,002)	3,804(±0,003)
<i>b</i>	3,78(±0,02)	4,37(±0,004)	4,05(±0,003)
<i>c</i>	0,158(±0,0005)	0,235(±0,0003)	0,318(±0,0002)

$$2) X = \frac{\sqrt{a-bm}}{c+d}$$

	Вариант 19	Вариант 20	Вариант 21
<i>a</i>	9,542±(0,001)	8,357(±0,003)	4,218(±0,001)
<i>b</i>	3,128(±0,002)	2,48(±0,004)	1,57(±0,006)
<i>m</i>	2,8(±0,03)	3,17(±0,01)	2,32(±0,02)
<i>c</i>	0,172(±0,001)	1,315(±0,0004)	2,418(±0,004)
<i>d</i>	5,4(±0,02)	2,4(±0,02)	1,8(±0,01)

$$1) X = \sqrt{\frac{ab}{c}}$$

	Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
<i>a</i>	0,7568(±0,0002)	0,8345(±0,0004)	0,6384(±0,0002)
<i>b</i>	21,7(±0,02)	13,8(±0,03)	32,7(±0,04)
<i>c</i>	2,65(±0,01)	1,84(±0,006)	4,88(±0,03)

$$2) X = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$$

	Вариант 22	Вариант 23	Вариант 24
<i>a</i>	10,82(±0,03)	9,37(±0,004)	11,45(±0,01)
<i>b</i>	2,786(±0,0006)	3,108(±0,0003)	4,431(±0,02)
<i>m</i>	0,28(±0,006)	0,46(±0,002)	0,75(±0,003)
<i>n</i>	14,7(±0,06)	15,2(±0,04)	16,7(±0,05)

№ 9.

$$1) X = \frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$$

	Вариант 25	Вариант 26	Вариант 27
<i>a</i>	0,7568(±0,0002)	0,8345(±0,0004)	0,6384(±0,0002)
<i>b</i>	21,7(±0,02)	13,8(±0,03)	32,7(±0,04)
<i>c</i>	2,65(±0,01)	1,84(±0,006)	4,88(±0,03)

$$2) X = \left[\frac{(a+b)c}{m-n} \right]^2$$

	Вариант 25	Вариант 26	Вариант 27
<i>a</i>	16,342(±0,001)	12,751(±0,001)	31,456(±0,002)
<i>b</i>	2,5(±0,03)	3,7(±0,02)	7,3(±0,01)
<i>c</i>	38,17(±0,002)	23,76(±0,003)	33,28(±0,003)
<i>m</i>	9,14(±0,005)	8,12(±0,004)	6,71(±0,001)
<i>n</i>	3,6(±0,04)	1,7(±0,01)	5,8(±0,02)

№ 10.

$$1) X = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{c}$$

	Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30
<i>a</i>	228,6(±0,06)	315,6(±0,05)	186,7(0,04)
<i>b</i>	86,4(±0,02)	72,5(±0,03)	66,6(±0,02)
<i>c</i>	68,7(±0,05)	53,8(±0,04)	72,3(±0,03)

$$2) X = \frac{m^3(a+b)}{c-d}$$

	Вариант 28	Вариант 29	Вариант 30
<i>a</i>	4,3(±0,05)	5,2(±0,04)	2,13(±0,01)
<i>b</i>	17,21(±0,02)	15,32(±0,01)	22,16(±0,03)
<i>m</i>	8,2(±±0,05)	7,5(±0,05)	6,3(±0,04)
<i>c</i>	12,417(±0,003)	21,823(±0,002)	16,825(±0,004)
<i>d</i>	8,37(±0,005)	7,56(±0,003)	8,18(±0,002)