МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

Факультет информатики и вычислительной техники

Кафедра математического и аппаратного обеспечения информационных систем

Дисциплина «Методы вычислений»

Методические указания
по выполнения лабораторных работ по дисциплине

Лабораторная работа № 10
«Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений»

Чебоксары
2019

1. ЦЕЛЬ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ

Ознакомление с общими принципами интерполяции функций, а также с методами интерполяции функций при помощи интерполяционных полиномов Лагранжа и Ньютона.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Задача Коши

Требуется найти функцию Y=Y(x), удовлетворяющую уравнению

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y) \qquad (1)$$

и принимающую при $x = x_0$ заданное значение Y_0:

$$Y(x_0) = Y_0 \qquad (2)$$

При этом будем для определенности считать, что решение нужно получить для значений $x > x_0$.

2.1. Одношаговые методы решения задачи Коши

Простейшим численным методом решения задачи Коши для ОДУ является **метод Эйлера**. Он основан на разложении искомой функции Y(x) в ряд Тейлора в окрестностях узлов $x = x_i$ $(i = 0,1,\ldots)$, в котором отбрасываются все члены, содержащие производные второго и более высоких порядков. Разностная схема этого метода имеет следующий вид:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0,1,\ldots \qquad (3)$$

Полагая i=0, с помощью соотношения (8) находим значение сеточной функции y_1 при $x = x_1$:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Требуемое здесь значение y_0 задано начальным условием (4), т.е. $y_0 = Y(x_0) = Y_0$. Аналогично могут быть найдены значения сеточной функции в других узлах:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Построенный алгоритм называется **методом Эйлера**. Он имеет первый порядок точности.

Существуют также и модификации метода Эйлера. Например, метод **Эйлера с пересчетом**:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0,1,\ldots \qquad (4)$$

Этот метод имеет второй порядок точности.

Известны и другие явные одношаговые методы. Наиболее распространенным из них является **метод Рунге-Кутта**:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad i = 0,1,\ldots,$$

$$k_0 = hf(x_i, y_i), \quad k_1 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right), \tag{5}$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \quad k_3 = hf(x_i + h, y_i + k_2).$$

Пример

Решить задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = 2(x^2 + Y); \\ Y(0) = 1 \end{cases}$$

на отрезке [0; 1] с шагом h=0,1.

Решение

Представленная задача может быть решена методами, известными из курса высшей математики. Для контроля численного решения данной задачи, приведем точное ее решение. Оно имеет вид:

$$y = 1{,}5e^{2x} - x^2 - x - 0{,}5.$$

Проведем теперь решение данной задачи численно с помощью рассмотренных выше методов.

Согласно заданной задаче функция $f(x,Y) = 2(x^2 + Y)$. Тогда получим следующие схемы:

1) по методу Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}1 \cdot 2 \cdot (x_i^2 + y_i), \quad i = 0,1,\ldots;$$

2) по методу Эйлера с пересчетом

$$y_{i+1} = y_i + \frac{0{,}1}{2}[\,f(x_i\,; y_i) + f(\underline{x_{i+1}}; \underline{\underline{y_i + 0{,}1 \cdot f(x_i\,; y_i)}})] =$$

$$= y_i + \frac{0{,}1}{2}[2 \cdot (x_i^2 + y_i) + 2 \cdot (\underline{x_{i+1}^2} + \underline{\underline{y_i + 0{,}1 \cdot 2 \cdot (x_i^2 + y_i)}})], \quad i = 0,1,\ldots;$$

3) по методу Рунге-Кутта

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3), \quad i = 0{,}1, \ldots,$$

$$k_0 = 2 \cdot 0{,}1 \cdot (x_i^2 + y_i),$$

$$k_1 = 0{,}1 \cdot f\left(\underline{x_i + \frac{0{,}1}{2}}; \underline{\underline{y_i + \frac{k_0}{2}}}\right) = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \left[\underline{\left(x_i + \frac{0{,}1}{2}\right)^2} + \underline{\underline{y_i + \frac{k_0}{2}}}\right],$$

$$k_2 = 0{,}1 \cdot f\left(\underline{x_i + \frac{0{,}1}{2}}; \underline{\underline{y_i + \frac{k_1}{2}}}\right) = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \left[\underline{\left(x_i + \frac{0{,}1}{2}\right)^2} + \underline{\underline{y_i + \frac{k_1}{2}}}\right],$$

$$k_3 = 0{,}1 \cdot f(\underline{x_i + 0{,}1}; \underline{\underline{y_i + k_2}}) = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \left[\underline{(x_i + 0{,}1)^2} + \underline{\underline{y_i + k_2}}\right]$$

Результаты вычислений приведены в таблице:

x x_i	**Метод Эйлера**	**Метод Эйлера с пересч.**	**Метод Рунге-Кутта**	**Точно**
0	1,0000	1	1,0000	1,0000
0,1	1,2000	1,2210	1,2221	1,2221
0,2	1,4420	1,4948	1,4977	1,4977
0,3	1,7384	1,8375	1,8432	1,8432
0,4	2,1041	2,2685	2,2783	2,2783
0,5	2,5569	2,8118	2,8274	2,8274
0,6	3,1183	3,4964	3,5201	3,5202
0,7	3,8139	4,3578	4,3927	4,3928
0,8	4,6747	5,4393	5,4894	5,4895
0,9	5,7377	6,7938	6,8643	6,8645
1	7,0472	8,4856	8,5834	8,5836

Как видно из таблицы, самым точным является решение

2.2. Многошаговые методы

При их помощи для вычисления значений y_{i+1} используются результаты не одного, а k предыдущих шагов, т.е. значения $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \ldots, y_{i-k+1}$. В этом случае получится k-шаговый метод.

Широко распространенным семейством многошаговых методов являются **методы Адамса.**

Пусть найдены значения $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$ в четырех последовательных узлах (k=4). При этом имеются также вычисленные ранее значения правой части $f_{i-3}, f_{i-2}, f_{i-1}, f_i$. В качестве интерполяционного $P_3(x)$ можно взять многочлен Ньютона. В случае постоянного шага h конечные разности для правой части в узле x_i имеют вид:

$$\Delta f_i = f_i - f_{i-1},$$

$$\Delta^2 f_i = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2},$$

$$\Delta^3 f_i = f_i - 3f_{i-1} + 3f_{i-2} - f_{i-3}.$$

Тогда **разностная схема четвертого порядка метода Адамса** записывается в виде:

$$y_{i+1} = y_i + hf_i + \frac{h^2}{2}\Delta f_i + \frac{5h^3}{12}\Delta^2 f_i + \frac{3h^4}{8}\Delta^3 f_i. \qquad (6)$$

Рассмотрим еще одно семейство многошаговых методов, которые используют неявные схемы, – **метод прогноза** и **коррекции** (они называются также методами **предиктор-корректор**). Суть этих методов состоит в следующем. На каждом шаге вводятся два этапа, использующих многошаговые методы: 1) с помощью явного метода (**предиктора**) по известным значениям функции в предыдущих узлах находится начальное приближение $y_{i+1} = y_{i+1}^{(0)}$ в новом узле; 2) используя неявный метод (**корректор**), в результате итераций находятся приближения $y_{i+1}^{(1)}, y_{i+1}^{(2)}, \ldots$

Один из вариантов метода прогноза и коррекции может быть получен на основе метода Адамса четвертого порядка. Приведем окончательный вид разностных соотношений:

на этапе предиктора

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}); \qquad (7)$$

на этапе корректора

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}). \qquad (8)$$

Явная схема (19) используется на каждом шаге один раз, а с помощью неявной схемы (20) строится итерационный процесс вычисления y_{i+1}, поскольку это значение входит в правую часть выражения $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$.

Расчет по этому методу может быть начат только со значения y_4. Необходимые при этом y_1, y_2, y_3 находятся по методу Рунге-Кутта, y_0 задается начальным условием.

3. ЗАДАНИЕ

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x)$ с начальным условием $y(a) = c$ на отрезке [a, b], с шагом h (для одношаговых методов еще и с шагом $2h$). Сравнить полученные результаты.

Вариант	$f(x)$	a	b	c	h
1	$xy^3 - x^2$	4	5	0.7	0.1
2	$\sqrt{4x^2+1} - 3y^2$	2.6	4.6	1.8	0.2
3	$\cos(1.5x - y^2) - 1.3$	-1	1	0.2	0.2
4	$x^2 + xy + y^2$	2	3	1.2	0.1
5	$e^{-(y^2+1)} + 2x$	0	0.5	0.3	0.05
6	$\cos(1.5x - y^2) + 1.4$	1	2	0.9	0.1
7	$4.1x - y^2 + 0.6$	0.6	2.6	3.4	0.2

Вариант	*f*(*x*)	*a*	*b*	*c*	*h*
8	$\frac{1}{1+x^3y}+2y$	1.5	2	2.1	0.05
9	$x+\cos\frac{y}{\sqrt{11}}$	2.1	3.1	2.5	0.1
10	$\frac{2xy}{x+4}-0.4$	3	5	1.7	0.2
11	$2.5x+\cos(y+0.6)$	1	3	1.5	0.2
12	$x+2.5y^2+2$	1	2	0.9	0.1
13	$2-\sin(x+y)^2$	2	3	2.3	0.1
14	$\frac{2}{x+2}+x+1$	0.1	0.5	1.25	0.05
15	$x+\cos\frac{y}{2}$	-2	-1	3	0.1
16	$\sqrt{x^2+0.5y^2}+1$	0	2	2.9	0.2
17	$\sin(x+y)+1.5$	1.5	2.5	0.5	0.1
18	$x+\cos\frac{y}{3}$	1.6	2.6	4.6	0.1
19	$x+\cos\frac{y}{e}$	1.4	2.4	2.5	0.1
20	$x+\sin\frac{y}{3}$	1.6	2.6	4.6	0.1
21	$x+\sin\frac{y}{\sqrt{10}}$	0.6	1.6	0.8	0.1
22	$x+\sin\frac{y}{\pi}$	1.7	2.7	5.3	0.1
23	$x+\cos\frac{y}{\pi}$	1.7	2.7	5.3	0.1
24	$x+\cos\frac{y}{\sqrt{1.5}}$	0.3	1.3	0.9	0.1
25	$x+\sin\frac{y}{3}$	1.2	2.2	1.4	0.1
26	$x+y^2$	0	1	0.5	0.1
27	$0.1x^2+2xy$	0	1	0.8	0.1
28	$0.2x^2+y^2$	0	0.5	0.8	0.05
29	$2x+0.1y^2$	0	1	0.2	0.1
30	$2x+xy$	0	0.5	0.5	0.05