4. РЕКУРСИВНЫЕ ФУНКЦИИ

4.1. Примитивно рекурсивные функции

Исходными функциями называются следующие функции, имеющие областью определения и областью значений множество $N \cup \{0\}$:

1) *нуль-функция* $o(x) = 0$ при любых x;
2) *функция следования* (или *сдвига*) $s(x) = x + 1$ при любых x;
3) *функции тождества* (или *проектирующие функции*, или *функции введения фиктивных переменных*) $I_m^n(x_1,\ldots,x_n) = x_m \quad (m < n)$.

Все эти функции очевидно вычислимы.

Оператор суперпозиции *S* (или **подстановка**) функций. С помощью этого оператора из некоторых функций g, h_1, h_2, …, h_m создается новая функция f. *Оператором суперпозиции* S_m^n назовем подстановку в функцию от m переменных – m функций от n одних и тех же переменных, что, очевидно, даст функцию от n переменных. Так, для функций $g(x_1, \ldots, x_m)$, $h_1(x_1, \ldots, x_n)$, …, $h_m(x_1, \ldots, x_n)$ имеем следующий результат:

$$S_m^n(g, h_1, \ldots, h_m) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

В этом случае говорят, что функция f получена суперпозицией функций $(g, h_1, \ldots, h_m)$.

Функция f является частичной функцией от n переменных. Ее значение определено тогда и только тогда, когда определены все функции $(g, h_1, \ldots, h_m)$. Если функции $(g, h_1, \ldots, h_m)$ вычислимы, то и функция f вычислима.

Оператор примитивной рекурсии. Оператор примитивной рекурсии R_n определяет $(n+1)$-местную функцию f через n-местную функцию g и $(n+2)$-местную функцию h следующим образом:

$$f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n); \tag{4.1}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n, y+1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)). \tag{4.2}$$

Эта пара равенств называется *схемой примитивной рекурсии*, а x_1, …, x_n – *параметрами рекурсии*.

Из (4.1) и (4.2) получаем последовательно вычисляемое значение функции f:

$$f(x_1,\dots,x_n,0)=g(x_1,\dots,x_n);$$

$$f(x_1,\dots,x_n,1)=h(x_1,\dots,x_n,0,\underline{f(x_1,\dots,x_n,0)});$$

$$\dots$$

$$f(x_1,\dots,x_n,m+1)=h(x_1,\dots,x_n,m,\underline{f(x_1,\dots,x_n,m)}).$$

Если все значения в правых частях равенств существуют, то получим значение функции $f(x_1, \dots, x_n, m+1)$. Если какое-то значение не определено, то $f(x_1, \dots, x_n, m+1)$ не существует. Поэтому в общем случае получается частичная функция.

В случае $n = 0$ функция g из (4.1) имеет 0 переменных и поэтому отождествляется с некоторым числом k. Тогда имеем простейшую схему рекурсии

$$f(0)=k; \quad f(y+1)=h(y,f(y)).$$

Факт получения $f(x_1, \dots, x_n, y)$ по приведенной схеме рекурсии обозначают $f(x_1, \dots, x_n, y) = R_n(g, h)$.

Как и в случае оператора суперпозиции, вычислимость исходных функций g и h влечет вычислимость построенных из них функций f.

Функция f называется *примитивно рекурсивной*, если она может быть получена из исходных функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и рекурсии, т.е. если существует такая конечная последовательность функций $f_1, \dots, f_n$, что $f_n = f$ и для всякого $i = 1,\dots,n$ функция f_i – либо исходная, либо может быть получена из некоторых предшествующих ей в этой последовательности функций с помощью суперпозиции или рекурсии.

Операции суперпозиции и рекурсии, будучи примененными ко всюду определенным функциям, дают в результате снова всюду определенные функции. Поэтому все примитивно рекурсивные функции всюду определены.

Пример 4.1. *Доказать примитивную рекурсивность функции $f(x) = x$.*

Функция тождества $I_m^n(x_1,\dots,x_n) = x_m$ $(m < n)$ является примитивно рекурсивной. Рассмотрим случай когда $n = 1$ и $m = 1$. Имеем $I_1^1(x_1) = x_1$. Заменим обозначение I_1^1 на f, а переменную x_1 обозначим через x. Итак, функция $f(x) = x$ – это функция проектирования при $n = 1$ и $m = 1$. Поэтому она примитивно рекурсивна.

Пример 4.2. *Доказать примитивную рекурсивность функции $f(x) = x + 1$.*

Функция $f(x) = x + 1$ получается с помощью применения оператора суперпозиции к функции из примера 4.1 $g(x) = x$ и функции следования $s(x) = x + 1$:

$$f(x) = x + 1 = s(g(x)).$$

Так все функции, которые использовались при получении функции $f(x) = x + 1$ примитивно рекурсивны, то и сама эта функция примитивно рекурсивна.

Пример 4.3. *Доказать, что постоянная унарная функция $f(x) = a$ примитивно рекурсивна.*

Рассмотрим функции исходные функции $s(x) = x + 1$ и $o(x) = 0$. Они являются примитивно рекурсивными по определению. Очевидно, что

$$s(o(x)) = 1,\ s(s(o(x))) = 2,\ s(s(s(o(x)))) = 3 \text{ и т.д.}$$

Следовательно,

$$f(x) = \underbrace{s(s(\ldots s}_{a \text{ раз}}(o(x))\ldots)) = a \text{ примитивно рекурсивна.}$$

Пример 4.4. Найти функции h и g и определить аналитическую запись функции, заданной следующей схемой рекурсии:

$$\begin{cases} f(x,0) = x, \\ f(x,y+1) = f(x,y) + 1. \end{cases}$$

При таком задании сразу видна функция $g(x) = x$. Функцию $h(x,y,z)$ необходимо определить. По определению примитивной рекурсии

$$f(x,y+1) = h\big(x,y,f(x,y)\big) = |z = f(x,y)| = h(x,y,z).$$

С другой стороны, по определению

$$f(x,y+1) = f(x,y) + 1.$$

Тогда получаем

$$h(x,y,z) = z + 1$$

Найдем числовые значения полученной функции для некоторых аргументов:

$f(0, 0) = 0, f(1, 0) = 1, f(2, 0) = 2, f(3, 0) = 3,$

$f(0, 1) = h(0, 0, f(0, 0)) = h(0, 0, 0) = f(0, 0) + 1 = 0 + 1 = 1,$

$f(0, 2) = h(0, 1, f(0, 1)) = h(0, 1, 1) = f(0, 1) + 1 = 1 + 1 = 2,$

$f(0, 3) = h(0, 2, f(0, 2)) = h(0, 2, 2) = f(0, 2) + 1 = 2 + 1 = 3,$
$f(1, 1) = h(1, 0, f(1, 0)) = h(1, 0, 1) = f(1, 0) + 1 = 1 + 1 = 2,$
$f(2, 1) = h(2, 0, f(2, 0)) = h(2, 0, 2) = f(2, 0) + 1 = 2 + 1 = 3,$
$f(3, 1) = h(3, 0, f(3, 0)) = h(3, 0, 3) = f(3, 0) + 1 = 3 + 1 = 4,$
$f(1, 2) = h(1, 1, f(1, 1)) = h(1, 1, 2) = f(1, 1) + 1 = 2 + 1 = 3,$
$f(2, 2) = h(2, 1, f(2, 1)) = h(2, 1, 3) = f(2, 1) + 1 = 3 + 1 = 4,$
$f(3, 2) = h(3, 1, f(3, 1)) = h(3, 1, 4) = 5$ и т.д.

Поместим эти значения в таблицу.

Y	***X***		
	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4
3	3	4	5

Определим аналитическую запись функции $f(x, y)$. Имеем

$$f(x, y + 1) = f(x, y) + 1,$$

следовательно,

$$f(x, y + v) = f(x, y) + v.$$

Положим $y = 0$, тогда

$$f(x, v) = f(x, 0) + v = x + v,$$

т.е. поскольку имя аргумента может быть любым, важно лишь его место в функции

$$f(x, y) = x + y.$$

Особенно отчетливо это видно из способа вычисления функции $f(y, x)$, а именно:

$$\left.\begin{array}{r} f(x,0) = x, \\ f(x,1) = f(x,0) + 1 = x + 1, \\ f(x,2) = f(x,1) + 1 = (x+1) + 1 = x + 2, \\ f(x,3) = f(x,2) + 1 = (x+2) + 1 = x + 3, \\ \dots \end{array}\right\} \quad x + y.$$

Пример 4.5. Найти функции h и g. Определить аналитическую запись функции:

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0, \\ f(x, y + 1) = f(x, y) + x. \end{cases}$$

Вычисляем функцию h так же, как и в предыдущем примере:

$$f(x, y + 1) = h\big(x, y, f(x, y)\big) = |z = f(x, y)| = h(x, y, z).$$

Так как $f(x, y + 1) = f(x, y) + x$,

$$f(x, y + 1) = h(x, y, z) = z + x.$$

$f(0, 0) = 0, f(1, 0) = 0, f(2, 0) = 0, f(3, 0) = 0,$
$f(0, 1) = h(0, 0, f(0, 0)) = h(0, 0, 0) = 0 + 0 = 0,$
$f(0, 2) = h(0, 1, f(0, 1)) = h(0, 1, 0) = 0 + 0 = 0,$
$f(0, 3) = h(0, 2, f(0, 2)) = h(0, 2, 0) = 0 + 0 = 0,$
$f(1, 1) = h(1, 0, f(1, 0)) = h(1, 0, 0) = 1 + 0 = 1,$
$f(2, 1) = h(2, 0, f(2, 0)) = h(2, 0, 0) = 2 + 0 = 2,$
$f(3, 1) = h(3, 0, f(3, 0)) = h(3, 0, 0) = 3 + 0 = 3,$
$f(1, 2) = h(1, 1, f(1, 1)) = h(1, 1, 1) = 1 + 1 = 2,$
$f(2, 2) = h(2, 1, f(2, 1)) = h(2, 1, 2) = 2 + 2 = 4,$
$f(3, 2) = h(3, 1, f(3, 1)) = h(3, 1, 3) = 6$ и т.д.

Поместим эти значения в таблицу.

Y	***X***		
	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	4
3	0	3	6

Значения функции f при других значениях аргументов x и y могут быть вычислены аналогично. Определим аналитический вид $f(x, y)$. В этом случае

$$f(x, y + 1) = f(x, y) + 1 \cdot x,$$

тогда

$$f(x, y + v) = f(x, y) + v \cdot x,$$

Пусть $y = 0$, тогда получим

$$f(x, v) = f(x, 0) + v \cdot x = 0 + v \cdot x,$$

т.е.

$$f(x, y) = x \cdot y,$$

Таким образом, аналитическая структура вычисления имеет вид

$$\left.\begin{array}{c} f(x, 0) = 0, \\ f(x, 1) = f(x, 0) + x = 0 + x = x \cdot 1, \\ f(x, 2) = f(x, 1) + x = x \cdot 1 + x = x \cdot 2, \\ f(x, 3) = f(x, 2) + x = x \cdot 2 + x = x \cdot 3, \\ \dots \end{array}\right\} \quad x \cdot y.$$

4.2. Частично рекурсивные функции. Тезис Чёрча

Оператор минимизации (или **μ-оператор**)

Пусть g – функция от $n+1$ переменной. *Функция f от n переменных получена из функции g с помощью оператора минимизации*, если равенство $f(x_1, \ldots, x_n) = y$ тогда и только тогда, когда $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, а значения $g(x_1, \ldots, x_n, 0)$, $g(x_1, \ldots, x_n, 1)$, …, $g(x_1, \ldots, x_n, y-1)$ определены и не равны нулю.

То же самое можно выразить записью

$$f(x_1,\ldots,x_n) = y \Leftrightarrow \begin{cases} g(x_1,\ldots,x_n,0) \neq 0, \\ \ldots \\ g(x_1,\ldots,x_n,y-1) \neq 0, \\ g(x_1,\ldots,x_n,y) = 0, \end{cases}$$

причем значения $g(x_1, \ldots, x_n, 0)$, …, $g(x_1, \ldots, x_n, y)$ должны существовать.

Если функция f получается из функции g с помощью оператора минимизации, то записываем

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \mu_y(g(x_1,\ldots,x_n,y) = 0),$$

или просто $f = \mu(g)$.

Данная функция является частичной. Если какое-либо значение функции g в точках $(x_1, \ldots, x_n, 0)$, $(x_1, \ldots, x_n, 1)$, …, $(x_1, \ldots, x_n, y-1)$ не будет определено, то значение функции в точке $(x_1, \ldots, x_n, y)$ не будет найдено.

Пример 4.6. Найти функцию f, полученную из нуль-функции $o(x)$ применением оператора минимизации.

Если функция f получена из функции g с помощью оператора минимизации, то число ее переменных меньше числа переменных функции g на единицу. В данном случае g – это функция $o(x)$ от одной переменной. Поэтому функция f имеет 0 переменных.

Для нахождения значения функции f нужно проверить условия $o(0) = 0$, $o(1) = 0$, … $o(y) = 0$, и выбрать в этих равенствах наименьшее y. Так как $o(x) = 0$ для всех переменных x, то наименьшее число y равно 0. По определению оператора минимизации полученное $y = 0$ и есть значение функции f.

Функция f называется *частично рекурсивной функцией*, если она может быть получена из исходных функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Очевидно, что всякая примитивно рекурсивная функция является частично рекурсивной функцией.

Оператор минимизации может вырабатывать не всюду определенные функции, а примитивно рекурсивные функции определены всюду. Поэтому существуют частично рекурсивные функции, которые не являются примитивно рекурсивными функциями.

Понятие частично рекурсивной функции является строгим математическим понятием.

Всюду определенная рекурсивная функция называется *общерекурсивной*.

Пример 4.7. Доказать общерекурсивность функции

$$S(x,y) = x + y.$$

Данную функцию можно задать следующей схемой рекурсии:

$$\begin{cases} S(x,0) = x, \\ S(x,y+1) = S(x,y) + 1. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} S(x,0) = x = I_1^1(x), \\ S(x,y+1) = S(x,y) + 1 = s(S(x,y)). \end{cases}$$

т.е. $S(x,y)$ получается по схеме рекурсии из функции тождества $I_1^1(x)$ и функции следования $s(x)$, которые общерекурсивны и, следовательно, функция $S(x,y)$ также общерекурсивна.

Пример 4.8. Доказать общерекурсивность функции

$$P(x,y) = x \cdot y.$$

Функцию можно задать следующей схемой примитивной рекурсии:

$$\begin{cases} P(x,y) = 0 \cdot x = 0 = o(x), \\ P(x,y+1) = x \cdot (y+1) = x \cdot y + x = x + P(x,y) = S(x,P(x,y). \end{cases}$$

т.е. $P(x,y)$ получается по схеме рекурсии из функции $o(x)$ и $S(x,y) = x + y$, которые общерекурсивны и, следовательно, функция $P(x,y)$ также общерекурсивна.

Теорема. *Всякая частично рекурсивная функция f является вычислимой функцией.*

Тезис Чёрча. *Каждая вычислимая функция частично рекурсивна.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:

4.1. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

а) $f(x) = x + 4$;
б) $f(x) = 3$;
в) $f(x) = x + y$;
г) $f(x) = x \cdot y$;
д) $f(x, y) = x^y$ (здесь $0^0 = 1$);
е) $f(x) = x!$ (здесь $0! = 1$).

4.2. Какие функции получаются из g и h с помощью следующих схем примитивной рекурсии:

а) $g(x) = x,\ h(x, y, z) = z^x$;
б) $g(x) = x,\ h(x, y, z) = x^z$?

4.3. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

а) $\mathrm{sg}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

б) $\overline{\mathrm{sg}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > 0, \\ 1, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

в) $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x - 1, & \text{если } x > 0; \end{cases}$

г) $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le y, \\ x - y, & \text{если } x > y; \end{cases}$

д) $|x - y|$;
е) $\max(x, y)$;
ж) $\min(x, y)$.

4.4. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

а) $\left[\frac{x}{y}\right]$ – частное от деления x на y $\left(\text{здесь } \left[\frac{x}{0}\right] = x\right)$;
б) $\mathrm{rest}(x, y)$ – остаток от деления x на y (здесь $\mathrm{rest}(x, 0) = x$);
в) $\tau(x)$ – число делителей числа x, где $\tau(0) = 0$;
г) $\sigma(x)$ – сумма делителей числа x, где $\sigma(0) = 0$;
д) $\mathrm{lh}(x)$ – число простых делителей числа x, где $\mathrm{lh}(0) = 0$;
е) $\pi(x)$ – число простых чисел, не превосходящих x;

ж) $k(x, y)$ – наименьшее общее кратное чисел x и y, где $k(x, 0) = k(0, y) = 0$;

з) $d(x, y)$ – наибольший общий делитель чисел x и y, где $d(x, 0) = d(0, y) = 0$;

и) $p(x)$ – x-е простое число ($p(0) = 2, p(1) = 3$, $p(2) = 5, \ldots$);

к) $\mathrm{long}(x)$ – номер наибольшего простого делителя числа x.

4.5. Доказать, что с помощью оператора минимизации можно получить следующие функции:

а) $f_{-}(x, y) = x - y$;

б) $f_{/}(x, y) = x/y$;

в) $f_{\sqrt{}}(x, y) = \sqrt[x]{y}$;

г) $f_{\log}(x, y) = \log_x y$.