Алгебра высказываний и исчисление высказываний

1. АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1.1. Основные понятия алгебры высказываний

Высказывание (*суждение, утверждение*) – повествовательное предложение, которое утверждает или отрицает что-либо о предметах, их свойствах или отношениях между ними.

Алгебра высказываний (*АВ*) является первой из формальных логических теорий. В рамках АВ не выделяются субъект и предикат. Высказывания рассматриваются как величины, которые могут принимать два значения: «истина» и «ложь».

Алфавит формальной системы АВ состоит из трех групп символов:

1. Заглавные латинские буквы A, B, C, … используются для обозначения простых высказываний. Значения этих высказываний, т.е. «истина» и «ложь», обозначаются 1 и 0 (или И и Л, или True и False, или T и F, соответственно). Переменные A, B, … в этом смысле называют *пропозиционными переменными* (лат. *propositio* – предложение-высказывание).

2. Символы логических операций & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\overline{}$ (инверсия), $\to$ (импликация), $\sim$ (эквивалентность) используются для обозначения операций, с помощью которых формируются сложные высказывания.

3. Круглые скобки используются в качестве вспомогательных символов, которые задают приоритет действий.

Простые высказывания – высказывания, которые в своем составе не содержат других высказываний. *Сложные высказывания* – высказывания, которые состоят из нескольких простых. Например, «*Дует ветер»* – простое высказывание, а «*Дует ветер и идет дождь»* – сложное, так как состоит из двух простых: «*Дует ветер»* и *«Идет дождь»*.

С помощью *логических операций* из простых высказываний получают сложные. Значение истинности сложного высказывания полностью определяется значениями истинности исходных простых высказываний (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Таблица истинности основных логических операций АВ

Перемен-ные		Конъ-юнкция (логическое умножение)	Дизъ-юнкция (логическое сложение)	Импликация (логическое следование)		Инверсия (логиче-ское отри-цание)	Эквива-лентность (логическое равенство)
A	B	$A\&B$	$A \vee B$	$A \to B$	$B \to A$	$\overline{A}$	$A \sim B$
1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	1

Таблица 1.2

Перевод высказываний естественного языка на язык АВ

Форма высказывания естественного языка	Соответствующая формула языка алгебры логики
Не A; неверно, что A; A не имеет места	$\overline{A}$
A и B; как A, так и B; не только A, но и B; A вместе с B; A, несмотря на B; A, в то время как B	$A\&B$
A или B; A, или B, или оба; A либо B; A, разве что B	$A \vee B$
Если A, то B; B, если A; A только, если B; A только тогда, когда B; A достаточно для B; A только при условии что B; B необходимо для A; A, значит B; для B достаточно A; A влечет B; для A необходимо B; все A есть B; из A следует B; B тогда, когда A	$A \to B$

Форма высказывания естественного языка	Соответствующая формула языка алгебры логики
A эквивалентно B; A тогда и только тогда, когда B; A, если и только если B; A необходимо и достаточно для B	$A \sim B$
A, но не B; не B, а A	$A \& \overline{B}$
Либо A, либо B; не A, разве что не B; либо не A, либо не B; A или B, но не оба	$(A \& \overline{B}) \vee (\overline{A} \& B)$
Либо A, либо B и C; A, разве что B и C	$(A \& \overline{B} \& \overline{C}) \vee (\overline{A} \& B \& C)$
Либо A и B, либо C и D	$(A \& B \& \overline{C} \& \overline{D}) \vee (\overline{A} \& \overline{B} \& C \& D)$

Пример 1.1. *Определить значение сложного логического высказывания $((A \vee B) \& \bar{C}) \to A$, если известно, что пропозиционные переменные принимают следующие значения $A = B = 1$, $C = 0$.*

Подставим заданные значения пропозиционных переменных ($A = 1$, $B = 1$, $C = 0$) в формулу $((A \vee B) \& \bar{C}) \to A$:

$$\left((1 \vee 1) \& \bar{0}\right) \to 1 = (1 \& 1) \to 1 = 1.$$

Следовательно, при заданных значениях переменных высказывание $((A \vee B) \& \bar{C}) \to A$ будет истинно.

Порядок приоритетности операций: 1) инверсия, 2) конъюнкция и дизъюнкция; 3) импликация и эквивалентность. Для изменения порядка действий, используются скобки.

Символы 0 и 1 можно рассматривать как *логические константы*, а обозначения простых высказываний – латинские буквы A, B, C, … – как имена *логических переменных*.

Определение формулы АВ носит индуктивный характер:

1° Пропозициональная переменная является формулой АВ.

2° Если выражения α и β формулы АВ, то $\overline{\alpha}$, $(\alpha \& \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ также формулы АВ.

3° Никаких других формул АВ, кроме получающихся согласно п. 1° и 2°, нет.

П р и м е р 1.2. *Проверить, является ли формулой АВ следующее выражение:* $(A\&B) \to \left((\overline{C \vee D})\&B\right)$.

Так как A, B, C и D – пропозициональные переменные, следовательно (по п. 1° определения), они являются формулами АВ. Тогда по п. 2° $(A \& B)$, $(C \vee D)$ – формулы АВ. Следовательно, также по п. 2° выражение $(\overline{C \vee D})$ является формула. Отсюда следует, что выражение $\left((\overline{C \vee D})\&B\right)$ п. 2° также является формулой. Тогда и выражение $(A\&B) \to \left((\overline{C \vee D})\&B\right)$ по п. 2° есть формула.

П р и м е р 1.3. *Проверить, является ли формулой следующее выражение* $(CD) \to D$.

Выражение $(CD) \to D$ было бы формулой АВ на основании п. 2°, если бы формулами были выражения (CD) и D. Выражение D – пропозициональная переменная, поэтому на основании п. 1° она является формулой. Рассмотрим выражение (CD). Оно было бы формулой, если бы между формулами C и D стоял бы один из знаков логических связок. Но такого знака нет. Следовательно, выражение (CD) не является формулой, и исходное выражение $(CD) \to D$ также не является формулой.

П р и м е р 1.4. *Переведите на язык алгебры логики следующее высказывание: Если урок будет интересным, никто из мальчиков – Петя, Ваня, Коля – не пойдет в кино*.

Сначала выделим и обозначим простые высказывания:

A = «Урок интересный»; *P = «Петя пойдет в кино»*;

B = «Ваня пойдет в кино»; *K = «Коля пойдет в кино»*.

Тогда

$\overline{P}$ *= «Петя не пойдет в кино»*.

$\overline{B}$ *= «Ваня не пойдет в кино»*.

$\overline{K}$ *= «Коля не пойдет в кино»*.

Отсюда следует, что для выражения «*Никто из мальчиков – Петя, Ваня, Коля – не пойдет в кино*» будет соответствовать следующая формула АВ:

$$(\overline{P}\&\overline{B}\&\overline{K}),$$

и, наконец, для высказывания «*Если урок будет интересным, никто из мальчиков – Петя, Ваня, Коля – не пойдет в кино*» окончательно получаем формулу:

$$A \to (\overline{P}\&\overline{B}\&\overline{K}).$$

Для вычисления значений формул АВ удобно использовать таблицы истинности.

Алгоритм построения таблицы истинности:

1. Определение количества столбцов таблицы

Количество столбцов	=	*Количество пропозиционных переменных*	+	*Количество логических операций формулы*

2. Определение количества строк таблицы

Количество строк	=	2^n, где *n – количество пропозиционных переменных*

3. Заполнение заголовка таблицы. В первые столбцы помещаются пропозиционные переменные, затем промежуточные формулы в соответствии с приоритетом логических операций и скобок.

4. Заполнение строк таблицы. Строки, относящиеся к элементарным высказываниям, заполняются комбинациями значений переменных. Остальные строки вычисляются и заполняются слева направо с использованием имеющихся (или уже вычисленных) значений.

Пример 1.5. *Построить таблицу истинности для формулы* $\alpha = ((A \vee B) \& \bar{C}) \to A$.

Количество логических переменных в данной формуле равно 3, количество операций – 4. Следовательно, количество столбцов таблицы истинности равно 7. Количество строк равно $2^3 = 8$.

Номер комбинации	A	B	C	$A \vee B$	$\bar{C}$	$(A \vee B) \& \bar{C}$	$((A \vee B) \& \bar{C}) \to A$
1	1	1	1	1	0	0	1
2	1	1	0	1	1	1	1
3	1	0	1	1	0	0	1
4	1	0	0	1	1	1	1
5	0	1	1	1	0	0	1
6	0	1	0	1	1	1	0
7	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	0	1	0	1

Формула АВ называется *тождественно истинной* (*тавтологией*), если при всех значениях входящих в нее переменных высказываний она принимает значение истина. Примеры тождественно истинных формул: $X \vee \overline{X}$, $X \to (Y \to X)$.

Формулу АВ называется *выполнимой*, если она принимает значение «истина» при некоторых значениях входящих в нее переменных высказываний. Примеры выполнимых высказываний: X, $X \vee Y$.

Формулу АВ называется *невыполнимой*, или *тождественно ложной* (*противоречием*), если при всех значениях входящих в нее переменных высказываний она принимает значение «ложь». Примером невыполнимой формулы может служить отрицание любой тождественно истинной формулы.

П р и м е р 1.5. *Доказать выполнимость формулы из примера 1.4. Выписать значения переменных, при которых формула принимает: а) истинные значения; б) ложные значения*.

Из построенной таблицы истинности (см. пример 1.4.) видно, что существуют такие комбинации значений входящих переменных, при которых формула принимает значение 1, например при $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$, следовательно, формула $\alpha = ((A \vee B) \& \bar{C}) \to A$ выполнима.

Из таблицы истинности следует, что данная формула истинна при следующих значениях элементарных высказываний:

Номер комбинации	*A*	*B*	*C*
1	1	1	1
2	1	1	0
3	1	0	1
4	1	0	0
5	0	1	1
7	0	0	1
8	0	0	0

а ложна только при одной комбинации:

Номер комбинации	*A*	*B*	*C*
6	0	1	0

Две формулы α и β называются *равносильными* ($\alpha = \beta$), если при любых значениях $X_1, X_2, ..., X_n$, где $X_1, X_2, ..., X_n$ – совокупность всех переменных, входящих в α и β, эти формулы принимают одинаковые значения. Например, $\overline{\overline{X}}$ равносильно X, $X \vee X$ равносильно X. В табл. 1.3 приведены основные равносильности алгебры логики.

Таблица 1.3

Основные равносильности алгебры высказываний

$A = A$	(1.1)	закон тождества
$A \& \overline{A} = 0$	(1.2)	закон непротиворечия
$A \vee \overline{A} = 1$	(1.3)	закон исключенного третьего
$A = \overline{\overline{A}}$	(1.4)	закон двойного отрицания
$A \vee A = A$ $A \& A = A$	(1.5) (1.5*)	законы идемпотентности
$A \vee B = B \vee A$ $A \& B = B \& A$	(1.6) (1.6*)	законы коммутативности
$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$	(1.7) (1.7*)	законы ассоциативности
$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$ $A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$	(1.8) (1.8*)	законы дистрибутивности
$A \vee (A \& B) = A$ $A \& (A \vee B) = A$	(1.9) (1.9*)	законы поглощения
$\overline{A \vee B} = \overline{A} \& \overline{B}$ $\overline{A \& B} = \overline{A} \vee \overline{B}$	(1.10) (1.10*)	законы де Моргана
$\overline{0} = 1$ $\overline{1} = 0$	(1.11) (1.11*)	отрицание лжи отрицание истины
$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$	(1.12) (1.12*)	прибавление 0 прибавление 1
$A \& 0 = 0$ $A \& 1 = A$	(1.13) (1.13*)	умножение на 0 умножение на 1
$A \to B = (\overline{A} \vee B)$ $(A \sim B) = (A \to B) \& (B \to A)$	(1.14) (1.14*)	
$X \vee (\overline{X} \& Y) = X \vee Y$ $X \& (\overline{X} \vee Y) = X \& Y$	(1.15) (1.15*)	
$\overline{X} \vee (X \& Y) = \overline{X} \vee Y$ $\overline{X} \& (X \vee Y) = \overline{X} \& Y$	(1.16) (1.16*)	

П р и м е р 1.6. *Проверить, равносильны ли формулы* $((A\&B)\to(\overline{C\vee D})$ *и* $(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})\&(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{D})$*?*

Используя равносильные преобразования, представленные в табл. 1.3, получим:

$$((A\&B)\to(\overline{C\vee D}) \overset{(1.14)}{\cong} ((\overline{A\&B})\vee(\overline{C\vee D}) \overset{(1.10),(1.10*)}{\cong} \big((\bar{A}\vee\bar{B})\vee(\bar{C}\&\bar{D})\big) =$$

$$= \big(\bar{A}\vee\bar{B}\vee(\bar{C}\&\bar{D})\big) \overset{(1.18*)}{\cong} ((\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})\&(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{D})).$$

Будем говорить, что *операция & двойственная операции* $\vee$ *и наоборот*.

Формулы α и α* называются *двойственными*, если одна получается из другой заменой каждой операции на двойственную.

Закон двойственности. *Если формулы* α *и* β *равносильны, то двойственные им формулы* α* *и* β* *также равносильны.*

П р и м е р 1.7. *Найти формулу двойственную формуле* $(A\vee\bar{B})\&C$.

Согласно определению, для получения двойственной формулы необходимо просто заменить операции на двойственные. В результате получим, что двойственной исходной формуле будет формула $(A\&\bar{B})\vee C$.

Обратите внимание на равносильности (1.5) и (1.5*), (1.6) и (1.6*) … (1.10) и (1.10*), а также (1.15) и (1.15*), (1.16) и (1.16*) (см. табл. 1.3). Они иллюстрируют (доказывают) работу данного закона.

Литерой называется пропозиционная переменная или ее отрицание (например, A и $\bar{B}$).

Литеры X и $\bar{X}$ называются *контрарными*.

Элементарной конъюнкцией (или *конъюнктором*, или *элементарным произведением*) называется конъюнкция литер. Например, формулы $A\&B\&\bar{B}\&\bar{C}$, A, $\bar{B}$ являются элементарными конъюнкциями (последние две формулы настолько элементарные, что каждая из них состоит только из одного логического множителя).

Элементарной дизъюнкцией (или *дизъюнктором*, или *элементарной суммой*) называется дизъюнкция литер. Например, формулы $A \vee B \vee \overline{B} \vee \overline{C}$, A, $\overline{B}$ являются элементарными дизъюнкциями (последние две формулы настолько элементарные, что каждая из них состоит только из одного логического слагаемого).

Дизъюнктивно нормальной формой (*ДНФ*) формулы α называется *равносильная* ей формула $\alpha_{ДНФ}$, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Конъюнктивной нормальной формой (*КНФ*) формулы α называется *равносильная* ей формула $\alpha_{КНФ}$, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

П р и м е р 1.8. Привести к ДНФ и КНФ формулу

$$\alpha = \Big(\big((A \vee B) \to C\big) \& \bar{A}\Big).$$

Сначала приведем формулу α к ДНФ.

$$\alpha = \Big(\big((A \vee B) \to C\big) \& \bar{A}\Big) \overset{(1.14)}{\triangleq} \Big(\big((\overline{A \vee B}) \vee C\big) \& \bar{A}\Big) \overset{(1.10)}{\triangleq}$$

$$= \Big(\big(\underline{(\bar{A} \& \bar{B})} \vee \underline{C}\big) \& \underline{\bar{A}}\Big) \overset{(1.8)}{\triangleq} = \underbrace{\big((\bar{A} \& \bar{B} \& \bar{A}) \vee (C \& \bar{A})\big)}_{\alpha_{ДНФ}} \overset{(1.5)}{\triangleq} \underbrace{\big((\bar{A} \& \bar{B}) \vee (C \& \bar{A})\big)}_{\alpha_{ДНФ}}.$$

Как видно из примера, у формулы может быть не одна ДНФ.

Для нахождения КНФ формулы α удобнее использовать уже полученную ДНФ. В этом случае сначала необходимо будет применить второй дистрибутивный закон (8*):

$$\alpha = \alpha_{ДНФ} = \Big((\bar{A} \& \bar{B}) \vee \big(\underline{C \& \bar{A}}\big)\Big) \overset{(1.8*)}{\triangleq} \big(\bar{A} \vee \big(\underline{C \& \bar{A}}\big)\big) \& \big(\bar{B} \vee \big(\underline{C \& \bar{A}}\big)\big) \overset{(1.8*)}{\triangleq}$$

$$= \underbrace{(\bar{A} \vee C) \& (\bar{A} \vee \bar{A}) \& (\bar{B} \vee C) \& (\bar{B} \vee \bar{A})}_{\alpha_{КНФ}} \overset{(1.5)}{\triangleq} \underbrace{(\bar{A} \vee C) \& \bar{A} \& (\bar{B} \vee C) \& (\bar{B} \vee \bar{A})}_{\alpha_{КНФ}} \overset{(1.9*)}{\triangleq}$$

$$= \underbrace{\bar{A} \& (\bar{B} \vee C) \& (\bar{B} \vee \bar{A})}_{\alpha_{КНФ}} \overset{(1.9*)}{\triangleq} \underbrace{\bar{A} \& (\bar{B} \vee C)}_{\alpha_{КНФ}}.$$

Как видно из примера, у формулы может быть не одна КНФ

Критерий тождественной истинности формулы. *Для того чтобы формула была тождественно истинной, необходимо и достаточно, чтобы каждый логический множитель ее КНФ в качестве логических слагаемых имел, по крайней мере, две контрарные литеры.*

Критерий тождественной ложности формулы. *Для того чтобы формула была тождественно ложной, необходимо и* *достаточно, чтобы каждое логическое слагаемое ее ДНФ в качестве логических множителей имело, по крайней мере, две контрарные литеры.*

Пример 1.9. Проверить будет ли формула $(A \to B) \to (\bar{A} \vee B)$ тождественно истинной.

Для решения этой задачи можно построить таблицу истинности и уже по значениям, которые принимает формула сделать вывод, а можно привести эту формулу к КНФ и проверить выполнение критерия.

Найдем КНФ формулы:

$$(A \to B) \to (\bar{A} \vee B) = \overline{(\bar{A} \vee B)} \vee (\bar{A} \vee B) = \left(\bar{\bar{A}} \& \bar{B}\right) \vee (\bar{A} \vee B)$$
$$= (A \& \bar{B}) \vee (\bar{A} \vee B) = (A \vee \bar{A} \vee B) \& (\bar{B} \vee \bar{A} \vee B).$$

И в первом, и во втором множителе в качестве слагаемых есть контрарные литеры, следовательно, по критерию тожественной истинности формулы, формула $(A \to B) \to (\bar{A} \vee B)$ тождественно истинна.

Для каждой формулы существует бесконечное множество различных, но равносильных ей ДНФ и КНФ. Среди них можно выделить не более одной ДНФ и одной КНФ, которые называются совершенными.

Совершенной ДНФ (*СДНФ*) формулы $\alpha(X_1, X_2, ..., X_n)$, содержащей n различных переменных, называется ДНФ, обладающая следующими свойствами:

1) в ней нет двух одинаковых логических слагаемых;

2) ни одно логическое слагаемое не содержит двух одинаковых логических множителей;

3) никакое логическое слагаемое не содержит контрарных литер;

4) в каждом логическом слагаемом в качестве логических множителей содержится либо переменная X_i, либо ее отрицание, где $i = \overline{1, n}$ (т.е. каждое логическое слагаемое содержит все переменные, входящие в формулу $\alpha(X_1, X_2, \ldots, X_n)$).

Совершенной КНФ (*СКНФ*) формулы $\alpha(X_1, X_2, ..., X_n)$, содержащей n различных переменных, называется КНФ, обладающая следующими свойствами:

1) в ней нет двух одинаковых логических множителей;

2) ни один логический множитель не содержит двух одинаковых логических слагаемых;

3) ни один логический множитель не содержит контрарных литер;

4) каждый логический множитель содержит в качестве логического слагаемого либо переменную X_i, либо ее отрицание, где $i = \overline{1,n}$ (т.е. каждый логический множитель содержит все переменные, входящие в формулу $\alpha(X_1, X_2, \ldots, X_n)$).

Замечание: *У тождественно истинных формул существует только СДНФ, а у тождественно ложных – только СКНФ.*

Найти СКНФ и СДНФ формул можно при помощи равносильных преобразований и таблицы истинности.

Пример 1.10. С помощью равносильных преобразований привести к СДНФ формулу $\alpha = \Big(\big((A \vee B) \to C\big) \& \bar{A}\Big)$.

Сначала необходимо получить ДНФ этой формулы (см. пример 1.8):

$$\alpha_{\text{ДНФ}} = \big((\bar{A} \& \bar{B}) \vee (C \& \bar{A})\big).$$

Полученная форма формулы пока не является совершенной, так как первое слагаемое не содержит переменной C, а последнее – B.

Для введения в недостающих переменных достаточно применить последовательно равносильности (1.13*) и (1.3). Затем необходимо применить первый дистрибутивный закон (1.8):

$$\alpha_{\text{ДНФ}} = \big((\bar{A} \& \bar{B}) \vee (C \& \bar{A})\big) \overset{(1.13*)}{\triangleq} \big((\bar{A} \& \bar{B} \& 1) \vee (C \& \bar{A} \& 1)\big) \overset{(1.3)}{\triangleq}$$

$$= \Big(\big(\underline{\bar{A} \& \bar{B}} \& (\underline{C} \vee \underline{\bar{C}})\big) \vee \big(\underline{C \& \bar{A}} \& (\underline{B} \vee \underline{\bar{B}})\big)\Big) \overset{(1.8)}{\triangleq}$$

$$= \big((\bar{A} \& \bar{B} \& C) \vee (\bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C}) \vee (\bar{A} \& B \& C) \vee (\bar{A} \& \bar{B} \& C)\big).$$

В полученной формуле два одинаковых слагаемых $(\bar{A} \& \bar{B} \& C)$. Применяя равносильное преобразование (1.5), получим СДНФ формулы α:

$$\alpha_{\text{СДНФ}} = \big((\bar{A} \& \bar{B} \& C) \vee (\bar{A} \& \bar{B} \& \bar{C}) \vee (\bar{A} \& B \& C)\big).$$

П р и м е р 1.11. С помощью равносильных преобразований привести к СКНФ формулу из пример 1.10.

Сначала необходимо получить КНФ формулы α (см. пример 1.8):

$$\alpha_{\text{КНФ}} = \bar{A}\&(\bar{B}\vee C).$$

В этой КНФ формулы α в первом множителе в качестве слагаемых нет переменных B и C, а во втором – A. Для введения этих переменных применим последовательно равносильности (1.12) и (1.2), а затем второй дистрибутивный закон (1.8*):

$$\alpha_{\text{КНФ}} = \bar{A}\&(\bar{B}\vee C) \overset{(1.12)}{\triangleq} \big((\bar{A}\vee 0\vee 0)\&(0\vee\bar{B}\vee C)\big) \overset{(1.2)}{\triangleq}$$

$$= \big((\bar{A}\vee(B\&\bar{B})\vee(C\&\bar{C}))\&((A\&\bar{A})\vee\bar{B}\vee C)\big) \overset{(1.8*)}{\triangleq}$$

$$= (\bar{A}\vee B\vee C)\&(\bar{A}\vee B\vee\bar{C})\&(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\&(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})\&(A\vee\bar{B}\vee C)\&(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C).$$

В полученной формуле третий и шестой множители одинаковые. Дублирование множителей уберем с помощью равносильного преобразования (1.5*). В результате получим СКНФ формулы α:

$$\alpha_{\text{СКНФ}} = (\bar{A}\vee B\vee C)\&(\bar{A}\vee B\vee\bar{C})\&(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\&(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})\&(A\vee\bar{B}\vee C).$$

П р и м е р 1.12. С помощью таблицы истинности получить СДНФ и СКНФ формулы из пример 1.10.

Сначала построим таблицу истинности:

A	B	C	$\bar{A}$	$A\vee B$	$(A\vee B)\to C$	$\alpha = (((A\vee B)\to C)\&\bar{A})$
1	1	1	0	1	1	0♦
1	1	0	0	1	0	0♦
1	0	1	0	1	1	0♦
1	0	0	0	1	0	0♦
0	1	1	1	1	1	1*
0	1	0	1	1	0	0♦
0	0	1	1	0	1	1*
0	0	0	1	0	1	1*

Алгоритм получения СДНФ по таблице истинности:

1. Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоят 1. В примере эти строки отмечены звездочками (5-я, 7-я и 8-я).

2. Выписать для каждой отмеченной строки конъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке *равно 1,* то в конъюнкцию включать *саму эту переменную*, если значение *равно 0* – то ее *отрицание*. Тогда в нашем случае получаем:

5-я строка: $\bar{A}\&B\&C$ 8-я строка: $\bar{A}\&\bar{B}\&\bar{C}$.

7-я строка: $\bar{A}\&\bar{B}\&C$

3. Все полученные конъюнкции связать в дизъюнкцию:

$$\alpha_{\text{СДНФ}} = (\bar{A}\&B\&C)\vee(\bar{A}\&\bar{B}\&C)\vee(\bar{A}\&\bar{B}\&\bar{C}).$$

Алгоритм получения СКНФ по таблице истинности:

1. Отметить те строки таблицы истинности, в последнем столбце которых стоят 0. В примере эти строки отмечены ромбиками (1-я, 2-я, 3-я, 4-я и 6-я).

2. Выписать для каждой отмеченной строки дизъюнкцию всех переменных следующим образом: если значение некоторой переменной в данной строке *равно 0,* то в дизъюнкцию включать *саму эту переменную*, если оно *равно 1* – то ее *отрицание*. Тогда в нашем случае получаем:

1-я строка: $\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C}$;
2-я строка: $\bar{A}\vee\bar{B}\vee C$;
3-я строка: $\bar{A}\vee B\vee\bar{C}$;
4-я строка: $\bar{A}\vee B\vee C$;
6-я строка: $A\vee\bar{B}\vee C$.

3. Все полученные дизъюнкции связать в конъюнкцию:

$$\alpha_{\text{СКНФ}} = (\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})\&(\bar{A}\vee\bar{B}\vee C)\&(\bar{A}\vee B\vee\bar{C})\&(\bar{A}\vee B\vee C)\&(A\vee\bar{B}\vee C).$$

Используя аппарат алгебры высказываний можно решать текстовые логические задачи. Причем некоторые задачи для их решения необходимо привести к виду КНФ или СДНФ.

П р и м е р 2.16. Известно, что если Андрей и Володя пойдут в кино, то Сережа в кино не пойдет. Известно также, что если Володя не пойдет в кино, то в кино пойдут Андрей и Сережа. Надо узнать, кто при этих условиях может пойти в кино.

Введем обозначения: A = «Андрей пойдет в кино»; B = «Володя пойдет в кино»; C = «Сережа пойдет в кино».

Запишем условие задачи в символьной форме:

«Если Андрей и Володя пойдут в кино, то Сережа в кино не пойдет» = $((A\&B) \rightarrow \bar{C})$.

«Если Володя не пойдет в кино, то в кино пойдут Андрей и Сережа» = $(\bar{B} \rightarrow (A\&C))$.

Так как оба условия должны быть выполнены, то должна быть истинной их конъюнкция. Составим эту конъюнкцию и приведем ее к виду ДНФ:

$$\big((A\&B) \rightarrow \bar{C}\big)\&\big(\bar{B} \rightarrow (A\&C)\big) = \big((\overline{A\&B})\vee\bar{C}\big)\&\left(\bar{\bar{B}}\vee(A\&C)\right) =$$

$$(\bar{A}\vee\bar{B}\vee\bar{C})\&(A\vee B)\&(B\vee C) = \underbrace{(\bar{A}\&A\&B)}_{=0}\vee\underbrace{(\bar{A}\&A\&C)}_{=0}\vee\underbrace{(\bar{A}\&B\&B)}_{\bar{A}\&B}\vee$$

$$\vee(\bar{A}\&B\&C)\vee\underbrace{(\bar{B}\&A\&B)}_{=0}\vee(A\&\bar{B}\&C)\vee\underbrace{(\bar{B}\&B\&B)}_{=0}\vee\underbrace{(\bar{B}\&B\&C)}_{=0}\vee$$

$$\vee(A\&B\&\bar{C})\vee\underbrace{(\bar{C}\&A\&C)}_{=0}\vee\underbrace{(\bar{C}\&B\&B)}_{B\&\bar{C}}\vee\underbrace{(\bar{C}\&B\&C)}_{=0}=$$

$$=\underbrace{(\bar{A}\&B)\vee(\bar{A}\&B\&C)}_{=(\bar{A}\&B)}\vee(A\&\bar{B}\&C)\vee(B\&\bar{C})=$$

$$=(\bar{A}\&B)\vee(A\&\bar{B}\&C)\vee(B\&\bar{C}).$$

Полученная формула $(\bar{A}\&B)\vee(A\&\bar{B}\&C)\vee(B\&\bar{C})$ должна быть истинной. Но дизъюнкция истинна, если истинным будет хотя бы один из ее членов. Значит, для того, чтобы условия задачи были выполнены, достаточно, чтобы имел место один из трех случаев:

1. $\bar{A}\&B$, т.е. в кино может пойти Володя без Андрея.

2. $B\&\bar{C}$, т.е. в кино может пойти Володя без Сергея.

3. $A\&\bar{B}\&C$, т.е. в кино могут пойти Андрей с Сережей, но без Володи.

Это решения нельзя признать окончательным, так как в первом и во втором случаях ответ получился неполным (в первом – неизвестно пойдет ли в кино Сергей, а во втором – Андрея).

Чтобы получить полный ответ, надо преобразовать полученную ДНФ к СДНФ.

$$(\bar{A}\&B)\vee(A\&\bar{B}\&C)\vee(B\&\bar{C})=$$

$$=(\bar{A}\&B\&(C\vee\bar{C})\vee(A\&\bar{B}\&C)\vee\big((A\vee\bar{A})\&B\&\bar{C}\big)=$$

$$=(\bar{A}\&B\&C)\vee(\bar{A}\&B\&\bar{C})\vee(A\&\bar{B}\&C)\vee(A\&B\&\bar{C})\vee(\bar{A}\&B\&\bar{C})=$$

$$=(\bar{A}\&B\&C)\vee(\bar{A}\&B\&\bar{C})\vee(A\&\bar{B}\&C)\vee(A\&B\&\bar{C}).$$

Теперь действительно получен полный перечень всех случаев, при которых выполняются условия задачи.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:

1.1. *Какие из следующих предложений являются высказываниями:*

а) Москва – столица России;

б) Студент механико-математического факультета университета;

в) Треугольник *ABC* подобен треугольнику *A'B'C'*;

г) Луна есть спутник Марса;

д) 2+2 – 5;

е) Кислород – газ;

ж) Каша – вкусное блюдо;

з) Математика – интересный предмет;

и) Картины Пикассо слишком абстрактны;

к) Железо тяжелее свинца;

л) «Да здравствуют музы!»;

м) Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны;

н) Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний;

о) Сегодня плохая погода;

п) В романе А.С. Пушкина «Евгений Онегин» 136 245 букв;

р) Река Ангара впадает в озеро Байкал.

1.2. *Укажите, какие из высказываний предыдущей задачи истинные, а какие ложные.*

1.3. *Сформулируйте отрицания следующих высказываний; укажите значения истинности данных высказываний и их отрицаний:*

а) Волга впадает в Каспийское море;

б) Число 28 не делится на число 7;

в) $6 > 3$;

г) $4 \leq 5$;

д) Все простые числа нечетны;

е) $\sqrt{2}$ – рациональное число;

ж) $5 + 3 = 8$;

з) Африка – остров;

и) Все слова можно разделить на слоги;

к) Некоторые грибы не съедобны.

1.4. *Установите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга, а какие – нет (объясните почему):*

а) «$4 < 5$», «$5 > 4$»;

б) «$6 < 9$», «$6 \geq 9$»;

в) «Треугольник ABC прямоугольный», «Треугольник ABC тупоугольный»;

г) «Натуральное число n четно», «Натурально число n нечетно»;

д) «Функция f нечетна», «Функция f четна»;

е) «Все простые числа нечетны», «Все простые числа четны»;

ж) «Все простые числа нечетны», «Существует простое четное число»;

з) «Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле», «На Земле существует вид животных, неизвестный человеку»;

и) «Существуют иррациональные числа», «Все числа – рациональные»;

к) «Если n делится на 3, то n делится на 9», «Если n не делится на 3, то n не делится на 9»;

л) «$2 < 0$», «$2 > 0$».

1.5. *Определите значения истинности следующих высказываний:*

а) «Санкт-Петербург расположен на Неве» и «$2 + 3 = 5$»;

б) «7 – простое число» и «9 – простое число»;

в) «7 – простое число» или «9 – простое число»;

г) «Число 2 четное» или «Число простое»;

д) «$2 \leq 3$», «$2 \geq 3$», «$2 \cdot 2 \leq 4$», «$2 \cdot 2 \geq 4$»;

е) $2 \cdot 2 = 4$ или белые медведи живут в Африке;

ж) $2 \cdot 2 = 4$, и «$2 \cdot 2 \leq 5$, и $2 \cdot 2 \geq 4$;

з) 2 – рациональное число или –5 – иррациональное число;

и) Фобос и Луна – спутники Марса;

к) У равнобедренного треугольника либо два, либо три угла равны между собой;

л) $3 \cdot 3 = 9$ и $4 + 7 = 11$.

1.6. *Переведите на язык алгебры логики следующие высказывания:*

1. Если светит солнце, то для того, чтобы не было дождя, достаточно, чтобы дул ветер.
2. Неверно, что если дует ветер, то солнце светит только тогда, когда нет дождя.
3. Чтобы погода была солнечной, достаточно, чтобы не было ни ветра, ни дождя.
4. Если ветра нет, то для дождя необходима пасмурная погода.
5. Если погода пасмурная и дует ветер, то дождя нет. Но дождь идет. Значит, нет ветра.
6. Неверно, что если погода пасмурная и дует ветер, то дождя нет. Но дождь идет. Значит, нет ветра.
7. Если для солнечной погоды необходимо отсутствие дождя, то для того, чтобы пошел дождь, достаточно, чтобы погода была пасмурной и безветренной.
8. Дождь идет только тогда, когда погода пасмурная и безветренная. Но дождя нет. Значит, погода либо солнечная, либо пасмурная и ветреная.
9. Погода не только солнечная, но и безветренная. Значит, дождя не будет, если не поднимется ветер.
10. Пойдет дождь, разве что поднимется ветер. Значит, погода будет либо солнечной, либо пасмурной и ветреной.
11. Погода будет не только пасмурной, но и дождливой, несмотря на ветер. Значит, солнечной погоды не будет, разве что прекратится дождь.
12. Если пойдет дождь, Ваня, Петя и Коля останутся дома.
13. Хотя бы один из мальчиков (Ваня, Петя, Коля) – ошибается.
14. В кино пойдет либо Коля, либо Петя.
15. Если урок будет интересным, никто из мальчиков – Петя и Ваня – не пойдем в лес.
16. Учитель рассказал смешную историю, но никто из учеников – Петя и Ваня – не засмеялся.

1.7. *Определите значения истинности высказываний A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K если высказывания а) – д) истинны, а высказывания е) – л) ложны:*

а) $A \,\&\, (2 \cdot 2 = 4)$;
б) $B \vee (2 \cdot 2 = 5)$;
в) $C \vee (2 \cdot 2 = 4)$;
г) $\overline{D} \,\&\, (2 \cdot 2 = 5)$;
д) $\overline{E} \vee (2 \cdot 2 = 5)$;
е) $F \,\&\, (2 \cdot 2 = 4)$;
ж) $G \vee (2 \cdot 2 = 5)$;
з) $H \,\&\, (2 \cdot 2 = 5)$;
и) $\overline{I} \,\&\, (2 \cdot 2 = 4)$;
к) $\overline{J} \vee (2 \cdot 2 = 5)$;
л) $K \,\&\, (2 \cdot 2 = 4)$.

1.8. *Пусть через A обозначено высказывание «9 делится на 3», а через B – высказывание «8 делится на 3». Определите значение истинности следующих высказываний:*

а) $A \to B$;
б) $B \to A$;
в) $\overline{A} \to B$;
г) $\overline{B} \to A$;
д) $\overline{A} \to \overline{B}$;
е) $A \to \overline{B}$;
ж) $B \to \overline{A}$;
з) $A \sim B$;
и) $\overline{A} \sim \overline{B}$;
к) $\overline{A} \sim B$;
л) $A \sim \overline{B}$;
м) $\overline{B} \to \overline{A}$.

1.9. *Пусть через A обозначено высказывание «Этот треугольник равнобедренный», а через B – высказывание «Этот треугольник равносторонний». Прочитайте следующие высказывания:*

а) $\overline{A} \,\&\, \overline{B}$;
б) $\overline{(A \vee B)}$;
в) $\overline{A} \to \overline{B}$;
г) $(A \vee B) \sim A$;
д) $\overline{(A \vee B)} \sim A$;
е) $B \to (\overline{A} \vee B)$;
ж) $(\overline{A} \vee \overline{B}) \to \overline{(A \,\&\, B)}$;
з) $\overline{(A \,\&\, B)} \to \overline{A}$;
и) $\overline{(A \,\&\, B)} \vee \mathrm{B}$;
к) $\overline{A} \,\&\, \overline{(A \vee B)}$;
л) $(A \,\&\, \overline{B}) \to \overline{\overline{A}}$.

1.10. *Из трех данных высказываний A, B, C постройте такое составное высказывание, которое:*

а) истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;

б) ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны;

в) истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания ложны;

г) ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания истинны;

д) истинно тогда и только тогда, когда истинны высказывания A и B;

е) истинно тогда и только тогда, когда ложны высказывания А и В;

ж) ложно тогда и только тогда, когда истинны высказывания A и B;

з) ложно тогда и только тогда, когда ложны высказывания А и В;

и) истинно тогда и только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны;

к) ложно тогда и только тогда, когда все данные высказывания либо истинны, либо ложны;

л) ложно тогда и только тогда, когда ложно лишь высказывание C.

1.11. *Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений предыдущих высказываний:*

а) $(A \to B) = 1,\ (A \sim B) = 0,\ (B \to A) = ?$;

б) $(A \to B) = 1,\ ((\overline{A} \,\&\, B) \to (\overline{A} \vee B)) = ?$;

в) $(A \sim B) = 0,\ (\overline{B} \to A) = ?$;

г) $(A \,\&\, B) = 0,\ (A \to B) = 1,\ (\overline{B} \to A) = ?$;

д) $(A \sim B) = 0,\ (A \to B) = 1,\ ((\overline{A} \to B) \sim A) = ?$;

е) $(A \vee B) = 1, (A \to B) = 1, (\overline{B} \to A) = ?$;

ж) $(A \,\&\, B) = 0, (A \sim B) = 0, (A \to B) = 1, A = ?$;

з) $(A \,\&\, B) = 0, (A \sim B) = 0, (A \to B) = 1, B = ?$;

и) $(A \,\&\, B) = 0,\ (A \vee B) = 1,\ (A \to B) = 1,\ (B \to A) = ?$.

1.12. *Существуют ли три таких высказывания A, B, C, чтобы одновременно выполнялись для них следующие условия:*

а) $(A \,\&\, B) = 0,\ (A \,\&\, C) = 0,\ (A \,\&\, B \,\&\, \overline{C}) = 0$;

б) $(B \to A) = 1,\ (A \vee C) = 0,\ (A \sim (B \,\&\, \overline{C}) = 0$;

в) $(A \vee B) = 0,\ (\overline{B} \,\&\, C) = 1,\ ((A \vee \overline{C}) \sim (B \,\&\, \overline{C}) = 0$;

г) $(A \,\&\, \overline{B}) = 1,\ (B \vee C) = 1,\ (\overline{(B \to A)} \vee C) = 0$;

д) $(\overline{A}\,\&\,B)=0,\ (A\vee C)=0,\ ((A\vee B)\,\&\,\overline{C})=1,$

е) $(A\vee B)=0,\ (B\vee C)=1,\ ((C\to A)\vee(C\to B))=1;$

ж) $(A\to B)=0,\ (A\to C)=0,\ ((C\to A)\to(C\to B))=1.$

1.13. *Для каких из следующих высказываний их логическое значение не зависит от логического значения высказывания A:*

а) $(A\,\&\,0)$; б) $(A\to 1)$; в) $(A\to A)$; г) $(A\vee\overline{A})$; д) $(A\vee 0)$; е) $(0\to A)$; ж) $(A\to\overline{A})$; з) $(A\,\&\,1)$; и) $(A\sim A)$; к) $(\overline{A}\to A)$; л) $(A\vee 1)$; м) $(A\sim\overline{A})$.

1.14. *Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите, какие из формул являются выполнимыми, какие – тождественно истинными (тавтологиями), какие – тождественно ложными (противоречиями):*

а) $[(\overline{C}\to B)\to A]\to[B\,\&\,(C\to A)]$;

б) $[((A\,\&\,B)\to C)\to((A\vee B)\to(\overline{A\,\&\,B}))]\to(A\,\&\,B)$;

в) $[A\to(\overline{B}\to(A\vee C))]\to[(B\to(A\vee C))\to(A\,\&\,C)]$;

г) $[\overline{A}\to(B\,\&\,(A\to C))]\to[((\overline{A}\vee B)\to C)\,\&\,B]$;

д) $[(B\to C)\to A]\to[((\overline{C}\vee B)\to\overline{A})\to(B\,\&\,C)]$;

е) $[A\to(\overline{C}\to(A\vee B))]\to[(A\vee B)\to(B\,\&\,C)]$;

ж) $[((C\,\&\,\overline{B})\to A)\to C]\to[((\overline{A}\vee C)\to C)\,\&\,B]$.

1.15. *Следующие формулы с помощью равносильных преобразований приведите к такой форме, в которой из всех логических операций использовались бы только отрицание ($\overline{\ }$); конъюнкция (&) и дизъюнкция ($\vee$):*

а) $\big((A\to B)\,\&\,(B\to A)\big)\to(A\vee B)$;

б) $\big((A\to B)\,\&\,(B\to\overline{A})\big)\to(C\to A)$;

в) $\big((A\to B)\,\&\,(\overline{A}\to\overline{B})\big)\to\big((A\vee B)\,\&\,(\overline{A}\vee\overline{B})\big)$;

г) $\big((A\sim\overline{B})\to C)\big)\to(A\sim\overline{C})$;

д) $\big((A\to(B\sim C)\big)\sim\big((A\to B)\sim C\big)$;

е) $(A\to B)\to\big((A\to B)\to\overline{A})\big)$;

ж) $A\to\overline{(B\sim C)}$.

1.16. *Следующие формулы с помощью равносильных преобразований приведите к такой форме, в которой отрицание было отнесено только к пропозиционным переменным (не стояло над скобкой, содержащей составную формулу):*

а) $\overline{\left(A \,\&\, (\overline{B} \vee \overline{C})\right)} \vee C$;

б) $\overline{\left((A \,\&\, B) \vee \overline{C}\right)} \vee \overline{(A \,\&\, C)}$;

в) $\overline{\left(\overline{\left(\overline{(A \,\&\, B)} \to B\right)} \to (\overline{A} \,\&\, C)\right)}$;

г) $\overline{\left(\overline{\left(A \vee (\overline{B} \,\&\, C) \vee \overline{C}\right)} \vee (B \,\&\, C)\right)}$.

д) $\overline{(A \to B)} \to \overline{\left((A \to B) \to \overline{A}\right)}$;

е) $\overline{(A \to B) \to \left((A \to B) \to \overline{A}\right)}$;

ж) $(\overline{\overline{((A \to B) \,\&\, (\overline{B \to A}))} \to (A \vee B)})$;

1.17. *Применяя равносильные преобразования, приведите следующие формулы к возможно более простой форме:*

а) $\overline{(\overline{A} \vee B)} \to \left((A \vee B) \to A\right)$;

б) $\overline{(\overline{A} \vee \overline{B})} \vee \left((A \to B) \,\&\, A\right)$;

в) $(A \to B) \,\&\, (B \to A) \,\&\, (A \vee B)$;

г) $(A \to B) \,\&\, (B \to \overline{A}) \,\&\, (C \vee A)$;

д) $(A \,\&\, C) \vee (A \,\&\, \overline{C}) \vee (B \,\&\, C) \vee (\overline{A} \vee B \vee C)$;

е) $(A \vee B) \to \left((A \to \overline{B}) \to \overline{A}\right)$;

ж) $\left(\overline{(A \sim \overline{B}) \vee C}\right) \,\&\, B$.

1.18. *С помощью равносильных преобразований докажите, что следующие формулы являются тождественно истинными (тавтологиями):*

а) $A \to (B \to A)$;

б) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

в) $(A \to B) \to \left((A \to (B \to C)) \to (A \to C)\right)$;

г) $(A \,\&\, B) \to A$;

д) $(A \to B) \to \left((A \to C) \to \left(A \to (B \,\&\, C)\right)\right)$;

е) $A \to (A \vee B)$;

ж) $A \to (B \to (A \vee B))$;

з) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$;

и) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$;

к) $A \to \overline{\overline{A}}$.

1.19. *С помощью равносильных преобразований установите, какие из следующих равносильностей действительно выполняются:*

а) $A \to (B \vee C) = (A \to B) \vee (A \to C)$;

б) $A \to (B \,\&\, C) = (A \to B) \,\&\, (A \to C)$;

в) $A \to (B \sim C) = (A \to B) \sim (A \to C)$;

г) $A \,\&\, (B \sim C) = (A \,\&\, B) \sim (A \,\&\, C)$;

д) $A \vee (B \sim C) = (A \vee B) \sim (A \vee C)$;

е) $A \,\&\, (B \to C) = (A \,\&\, B) \to (A \,\&\, C)$;

ж) $A \vee (B \to C) = (A \vee B) \to (A \vee C)$;

з) $(A \to B) \,\&\, C = (A \,\&\, B) \to (A \,\&\, C)$;

и) $(A \to B) \vee C = (A \vee B) \to (A \vee C)$;

к) $A \to (A \sim B) = (A \to B)$;

л) $A \to (A \,\&\, B) = (A \to B)$;

м) $A \to (A \vee B) = (A \to B)$.

1.20. *С помощью равносильных преобразований приведите формулы к ДНФ:*

а) $(A \sim B) \,\&\, (\overline{C \to D})$;

б) $((A \to B) \to (C \to \overline{A})) \to (B \to \overline{C})$;

в) $((A \to (B \to C)) \to ((A \to \overline{C}) \to (A \to \overline{B}))$;

г) $((A \to B) \vee \overline{C}) \to (A \vee (A \sim \overline{C}))$;

д) $(A \to B) \to C$;

е) $A \to (B \to C)$;

ж) $(\overline{A} \,\&\, \overline{B}) \vee (A \sim C)$;

з) $(A \sim B) \to (A \,\&\, C)$;

и) $(A \sim B) \to ((\overline{A} \to C) \to \overline{B})$;

к) $\left(A \vee (\overline{B \to C})\right) \& (A \vee C)$;

л) $(\overline{A \vee C}) \& (A \to B)$.

1.21. *С помощью равносильных преобразований приведите формулы задачи* ***1.20*** *к КНФ.*

1.22. *Приведите формулы задачи* ***1.20*** *к СДНФ:*

а) *с помощью равносильных преобразований;*

б) *с помощью таблицы истинности.*

1.23. *Приведите формулы задачи* ***1.20*** *к СКНФ:*

а) *с помощью равносильных преобразований;*

б) *с помощью таблицы истинности.*

1.24. *С помощью СДНФ, найдите аналитическую запись логической формулы, принимающую значение* 1 *на следующих наборах значений переменных, и только на них:*

а) $F(0, 0) = F(1, 1) = 1$;

б) $F(1, 0) = 1$;

в) $F(0, 1, 0) = F(1, 0, 1) = F(1, 1, 1) = 1$;

г) $F(0, 1, 1) = F(1, 1, 0) = 1$;

д) $F(0, 1, 1, 0) = F(1, 1, 0, 1) = 1$.

1.25. *С помощью СКНФ, найдите аналитическую запись логической формулы, принимающую значение* 0 *на следующих наборах значений переменных, и только на них:*

а) $F(0, 1) = F(1, 0) = 0$;

б) $F(1, 1) = 0$;

в) $F(0, 1, 1) = F(1, 1, 0) = F(1, 1, 1) = 0$;

г) $F(0, 0, 1) = F(1, 0, 0) = 0$;

д) $F(0, 1, 0, 0) = F(1, 0, 0, 1) = 0$.

1.26. *С помощью равносильных преобразований получите разные формы формул, найденных в задачах* **1.24** *и* **1.25**.

1.27. *Решите следующие логические задачи*

1.27.1. Относительно погоды в воскресный день были высказаны следующие соображения:

1) Дождь или пасмурная погода бывают только при повышенной влажности.

2) Если пойдет дождь, то погода будет пасмурной.

3) Ясную погоду без дождя можно ожидать, если воздух будет сухой.

4) Если не будет дождя, то достаточным условием повышенной влажности будет пасмурная погода.

5) Повышенная влажность бывает тогда, когда погода ясная. Значит, дождя не будет.

Сведите эти высказывания к двум простейшим утверждениям.

1.27.2. На соревнованиях по легкой атлетике Андрей, Боря, Сережа и Володя заняли первые четыре места. Но когда девочки стали вспоминать, как эти места распределились между победителями, то мнения разошлись:

Даша: Андрей был первым, а Володя – вторым.

Галя: Андрей был вторым, а Борис – третьим.

Лена: Боря был четвертым, а Сережа – вторым.

Ася, которая была судьей на этих соревнованиях и хорошо помнила, как распределились места, сказала, что каждая из девочек сделал одно правильное и одно неправильное заявление. Кто из мальчиков какое место занял?

1.27.3. В одной стране жили рыцари, которые всегда говорили только правду, и лжецы, которые всегда лгали. Однажды в страну проник шпион по имени Мердок, который, как и всякий шпион, иногда говорил правду, иногда лгал, в зависимости от того, что ему выгодно. Шпион поселился с двумя жителями страны – рыцарем и лжецом. Всех троих арестовали в один день и привели на допрос. Никто не знал, кто из них – кто. Они сделали следующие заявления:

А сказал: Я – Мердок.

В сказал: **А** говорит правду.

С сказал: Я не Мердок.

Кто же из них шпион – **А**, **В** или **С**?

1.27.4. На вопрос, какая погода будет завтра, синоптик ответил:

1. Если будет мороз, то снег выпадет только при пасмурной погоде.

2. Если не будет мороза, но пойдет снег, то погода будет пасмурной.

3. Не будет ни снега, ни дождя, если небо будет ясным.

4. Неверно, что если не будет мороза, то для выпадения снега или дождя достаточно наличия пасмурного неба.

Какую погоду предсказал синоптик?

1.27.5. Сотрудники конструкторского бюро обсуждали вопрос о предстоящей командировке в Москву. Были высказаны следующие суждения:

1. Если поедут Иванов и Петров, то надо послать и Сидорова.

2. Сидоров поедет только при условии, что поедет Иванов. Значит, Петрова посылать нельзя.

3. Надо послать или Иванова, или Петрова.

Директор сказал, что можно выполнить только одно из этих предложений. Кого хотели послать в командировку сотрудники, и кого решил послать директор?

1.27.6. На Олимпиаде по математике была предложена необычная задача.

На столе стояла корзина с яблоками и было известно, что каждое из этих яблок либо большое, либо маленькое; либо сладкое, либо кислое; либо желтое, либо зеленое. На столе лежала инструкция, в которой говорилось, что из корзины можно взять те и только те яблоки, которые удовлетворяют следующим условиям:

1. Сладкое яблоко следует взять только при условии, что оно большое и желтое.

2. Если яблоко большое, то сладкий вкус должен быть достаточным признаком желтого цвета.

3. Если яблоко зеленое, то, для того чтобы оно было кислым, необходимо, чтобы оно было маленьким.

Задача состояла в том, чтобы свести требования инструкции к двум простейшим условиям. Кроме того, нужно было узнать, какие яблоки разрешено взять из корзины.

1.27.7. Три девочки – Роза, Маргарита и Анюта представили на конкурс цветоводов корзины выращенных ими роз, маргариток и анютиных глазок. Девочка, вырастившая маргаритки, обратила внимание Розы на то, что ни у одной из девочек имя не совпадает с названием любимых цветов.

Какие цветы вырастила каждая из девочек?

1.27.8. Виновник ночного дорожно-транспортного происшествия скрылся с места аварии.

Первый из опрошенных свидетелей сказал работникам ГАИ, что это были “Жигули”, первая цифра номера машины – единица.

Второй свидетель сказал, что машина была марки “Москвич”, а номер начинался с семёрки.

Третий свидетель заявил, что машина была иностранная, номер начинался не с единицы.

При дальнейшем расследовании выяснилось, что каждый из свидетелей правильно указал либо только марку машины, либо только первую цифру номера.

Какой марки была машина и с какой цифры начинался номер?

1.27.9. Пятеро одноклассников: Ирена, Тимур, Камилла, Эльдар и Залим стали победителями олимпиад школьников по физике, математике, информатике, литературе и географии.

Известно, что:

- победитель олимпиады по информатике учит Ирену и Тимура работе на компьютере;
- Камилла и Эльдар тоже заинтересовались информатикой;
- Тимур всегда побаивался физики;
- Камилла, Тимур и победитель олимпиады по литературе занимаются плаванием;
- Тимур и Камилла поздравили победителя олимпиады по математике;
- Ирена сожалеет о том, что у нее остается мало времени на литературу.

Победителем какой олимпиады стал каждый из этих ребят?

1.27.10. Ирена любит мороженое с фруктами. В кафе был выбор из таких вариантов:

- пломбир с орехами;
- пломбир с бананами;
- пломбир с черникой;
- шоколадное с черникой;
- шоколадное с клубникой.

В четырёх вариантах Ирене не нравились или тип мороженого, или наполнитель, а в одном варианте ей не нравились ни мороженое, ни наполнитель. Она попросила приготовить из имеющихся продуктов порцию по своему вкусу.

Какое же мороженое и с какими фруктами любит Ирена?

1.27.11. На очередном этапе автогонок “Формула 1” первые четыре места заняли Шумахер, Алези, Хилл и Кулхардт. Опоздавший к месту награждения телерепортёр успел заснять пилотов, занявших второе и третье места, которые поливали друг друга шампанским. В это время Шумахер с четвёртым гонщиком пожимали друг другу руки. Далее в кадр попал мокрый Хилл, поздравляющий пилота, занявшего второе место. Напоследок оператор снял сцену, в которой Шумахер и Кулхардт пытались втащить на пьедестал почёта пилота, занявшего четвёртое место.

Просматривая отснятый материал, режиссёр спортивного выпуска быстро разобрался, кто из пилотов какое место занял. Он знал, что, в соответствии с церемонией награждения победителей гонок, пилоты, занявшие первые три места, поливают друг друга шампанским из огромных бутылок знаменитой фирмы – спонсора соревнований.

Какое же место занял каждый пилот?

1.27.12. В некотором царстве-государстве повадился Змей Горыныч разбойничать. Послал царь четырёх богатырей погубить Змея, а награду за то обещал великую. Вернулись богатыри с победой и спрашивает их царь: “Так кто же из вас главный победитель, кому достанется царёва дочь и полцарства?”

Засмущались добры молодцы и ответы дали туманные:

Сказал Илья Муромец: “Это все Алеша Попович, царь-батюшка”.

Алеша Попович возразил: “То был Микула Селянинович”.

Микула Селянинович: “Не прав Алеша, не я это”.

Добрыня Никитич: “И не я, батюшка”.

Подвернулась тут баба Яга и говорит царю: “А прав то лишь один из богатырей, видела я всю битву своими глазами”.

Кто же из богатырей победил Змея Горыныча?

1.27.13. При составлении расписания на пятницу были высказаны пожелания, чтобы информатика была первым или вторым уроком, физика – первым или третьим, история – вторым или третьим. Можно ли удовлетворить одновременно все высказанные пожелания?

1.27.14. Обсуждая конструкцию нового трёхмоторного самолёта, трое конструкторов поочередно высказали следующие предположения:

1) при отказе второго двигателя надо приземляться, а при отказе третьего можно продолжать полёт;

2) при отказе первого двигателя лететь можно, или при отказе третьего двигателя лететь нельзя;

3) при отказе третьего двигателя лететь можно, но при отказе хотя бы одного из остальных надо садиться.

Лётные испытания подтвердили правоту каждого из конструкторов. Определите, при отказе какого из двигателей нельзя продолжать полёт.

1.27.15. В соревнованиях по плаванию участвовали Андрей, Виктор, Саша и Дима. Их друзья высказали предположения о возможных победителях:

1) первым будет Саша, Виктор будет вторым;

2) вторым будет Саша, Дима будет третьим;

3) Андрей будет вторым, Дима будет четвёртым.

По окончании соревнований оказалось, что в каждом из предположений только одно из высказываний истинно, другое ложно.

Какое место на соревнованиях занял каждый из юношей, если все они заняли разные места.

1.27.16. Для длительной международной экспедиции на околоземной космической станции надо из восьми претендентов отобрать шесть специалистов: по аэронавтике, космонавигации, биомеханике, энергетике, медицине и астрофизике. Условия полёта не позволяют совмещать работы по разным специальностям, хотя некоторые претенденты владеют двумя специальностями. Обязанности аэронавта могут выполнять Геррети и Нам; космонавигатора – Кларк и Фриш; биомеханика – Фриш и Нам; энергетика – Депардье и Леонов; врача – Депардье и Хорхес; астрофизика – Волков и Леонов.

По особенностям психологической совместимости врачи рекомендуют совместные полеты Фриша и Кларка, а также Леонова с Хорхесом и Депардье. Напротив, нежелательно, чтобы Депардье оказался в одной экспедиции с Намом, а Волков – с Кларком.

Кого следует включить в состав экспедиции?

2. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Исчисление высказываний адекватно алгебре высказываний, но здесь не будет рассматриваться закон исключенного третьего. В рамках исчисления высказываний будет ставиться задачи обосновать тот или иной закон, показав, что его использование не приведет к противоречию.

Символы исчисления высказываний (далее – ИВ) состоят из знаков трех категорий:

1. Большими латинскими буквами $A, B, \ldots, X, Y, Z$ будут обозначаться *переменные высказывания*.

2. Символами &, $\vee$, $\to$, $\overline{\ }$ будут обозначаться *логические связки* (конъюнкция (или логическое умножение), дизъюнкция (или логическое сложение), импликация (или логическое следование) и инверсия (или логическое отрицание), соответственно).

3. Пара символов ( ) – *скобки* – вспомогательные символы, которые будут использоваться для указания приоритетности операций.

Никаких других символов, кроме указанных, исчисление высказываний не имеет.

Формулы будем обозначать буквами греческого алфавита $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Определение формулы ИВ представляет собой следующую рекурсию:

1° Переменное высказывание есть формула ИВ.

2° Если α и β – формулы ИВ, то слова $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ и $\overline{\beta}$ – также формулы ИВ.

3° Никаких других формул в ИВ, кроме получающихся согласно п. 1° и 2°, нет.

Переменные высказывания называются также *элементарными формулами ИВ*.

Пример 2.1. *Доказать, что слово* $((A\&B)) \to (C \vee D))$ *есть формула ИВ*.

Рассуждения нужно вести в следующем порядке. Так как A и B – формулы ИВ, то $(A\&B)$ является формулой ИВ. Так как C и D – формулы ИВ, то $(C \vee D)$ – также формула ИВ. Имея формулы $(A\&B)$ и $(C \vee D)$, можно получить выражение $((A \& B) \to (C \vee D))$, которое будет формулой ИВ □

Определение *части формулы* представляет собой следующую рекурсию:

1. Частью каждой элементарной формулы является только она сама.

2. Если определены все части формул α и β, то частями формулы $(\alpha \& \beta)$ будут все части формул α и β и сама формула. Аналогично определяются части формул $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ и $\overline{\alpha}$.

Пример 2.2. *Выписать все части формулы примера 2.1*.

Согласно определению, частями формулы $((A\&B)) \to (C \vee D))$ являются следующие формулы: A, B, C, D, $(A\&B)$, $(C \vee D)$, $((A \& B) \to (C \vee D))$.

В ИВ выделяют формулы, которые называются *выводимыми в исчислении высказываний*.

Для получения выводимых формул в исчислении высказываний определяются исходные выводимые формулы и правила, позволяющие получать новые выводимые формулы из имеющихся. Исходные выводимые формулы называются *аксиомами*, а правила – *правилами вывода*. Образование выводимой формулы из исходных выводимых формул, или аксиом, путем применения правил вывода называется *выводом данной формулы из аксиом*.

Аксиомы исчисления высказываний

I

1. $A \to (B \to A)$.
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.

II

1. $(A \& B) \to A$.
2. $(A \& B) \to B$.
3. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \& C)))$.

III

1. $A \to (A \vee B)$.
2. $B \to (A \vee B)$.
3. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$.

IV

1. $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$.
2. $A \to \overline{\overline{A}}$.
3. $\overline{\overline{A}} \to A$.

Операция подстановки формулы β в формулу α при заданной букве A обозначается через $S_A^\beta(\alpha)$ и определяется следующим образом:

$$S_A^\beta(\alpha) = \begin{cases} \beta, \text{ если } \alpha = A; \\ B, \text{ если } \alpha = B \neq A, \end{cases}$$

где A и B – переменные высказывания.

Операция подстановки обладает следующими свойствами.

1. $S_A^\beta(\alpha_1 \& \alpha_2)$ есть формула $S_A^\beta(\alpha_1) \& S_A^\beta(\alpha_2)$;
2. $S_A^\beta(\alpha_1 \vee \alpha_2)$ есть формула $S_A^\beta(\alpha_1) \vee S_A^\beta(\alpha_2)$;
3. $S_A^\beta(\alpha_1 \to \alpha_2)$ есть формула $S_A^\beta(\alpha_1) \to S_A^\beta(\alpha_2)$;
4. $S_A^\beta(\overline{\alpha_1})$ есть формула $\overline{S_A^\beta(\alpha_1)}$.

Пример 2.3. *Найти формулу ИВ, являющуюся результатом подстановки в аксиому II.2 (далее – A.II.2) вместо переменного высказывания B формулы* $\beta = (C \to D)$.

В нашем случае $\alpha = \text{A.II.2} = (A\&B) \to B$. Тогда:

$$S_B^\beta(\alpha) = S_B^{(C\to D)}((A\&B) \to B) = \left(S_B^{(C\to D)}(A\&B)\right) \to \left(S_B^{(C\to D)}(B)\right) =$$
$$= \left(S_B^{(C\to D)}(A)\&S_B^{(C\to D)}(B)\right) \to \left(S_B^{(C\to D)}(B)\right) =$$
$$= (A\&(C \to D)) \to (C \to D).$$

Таким образом, результатом данной подстановки будет формула $(A\&(C \to D)) \to (C \to D)$.

Для обозначения выводимая в исчислении формулы используется символ $\vdash$, т.е. запись $\vdash \alpha$ говорит о том, что формула α выводима в ИВ.

Основные правила вывода

1. **Правило подстановки**. *Если* α *– выводимая формула в ИВ, то* $S_A^\beta(\alpha)$ *– также выводимая формула в ИВ, каковы бы ни были переменное высказывание* A *и формула* β:

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash S_A^\beta(\alpha)}.$$

Формула $(A \,\&\, (C \to D)) \to (C \to D)$, которая получена в примере 2.3, как результат подстановки в аксиому II.2 (т.е. в выводимую в ИВ формулу) вместо переменного высказывания B формулы $(C \to D)$, по данному правилу является выводимой в ИВ.

2. **Правило заключения (modus ponens)**. *Если* α *и* $\alpha \to \beta$ *– выводимые формулы в ИВ, то* β *– также выводимая формула ИВ:*

$$\frac{\vdash \alpha, \vdash \alpha \to \beta}{\vdash \beta}.$$

Пример 2.4. *Доказать, что формула* $\big((A \to B) \to (A \to A)\big)$ *выводима в ИВ*.

Рассмотрим А.I.2:

$$\vdash \big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big).$$

В ней вместо переменного высказывания A подставим элементарную формулу C:

$$\boldsymbol{S}_C^A\Big(\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)\Big) =$$
$$= \big(A \to (B \to A)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to A)\big).$$

По правилу подстановки полученная формула будет выводимой, т.е.:

$$\vdash \big(A \to (B \to A)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to A)\big).$$

Посылка полученной импликации есть А.I.1, т.е.:

$$\vdash \big(A \to (B \to A)\big).$$

Тогда по правилу заключения получаем:

$$\frac{\vdash \big(A \to (B \to A)\big), \vdash \big(A \to (B \to A)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to A)\big)}{\vdash (A \to B) \to (A \to A)},$$

тем самым доказав выводимость формулы $(A \to B) \to (A \to A)$.

Выводом в исчислении называется конечная последовательность формул $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такая, что для каждого i ($1 \le i \le k$) α_i

есть либо аксиома, либо формула, полученная (выведенная) непосредственно из предыдущих (выведенных) формул с помощью правил исчисления.

Пример 2.5. *Какая последовательность формул является выводом формулы* $((A \to B) \to (A \to A))$ *(из примера 2.4)*?

Конечная последовательность формул:

$$(A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A)), (A \to (B \to A))$$
$$\text{и } (A \to B) \to (A \to A)$$

является выводом в ИВ, так как первые две формулы – это аксиомы после применения к ним правила подстановки, а последняя формула получается из предыдущих по правилу заключения.

Составные правила вывода

$$\frac{\vdash (\alpha \to \beta),\quad \vdash (\beta \to \gamma)}{\vdash (\alpha \to \gamma)}$$ *Правило силлогизма*

$$\frac{\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma))}{\vdash (\beta \to (\alpha \to \gamma))}$$ *Правило перестановки посылок*

$$\frac{\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma))}{\vdash ((\alpha \,\&\, \beta) \to \gamma)}$$ *Правило соединения посылок*

$$\frac{\vdash ((\alpha \,\&\, \beta) \to \gamma)}{\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma))}$$ *Правило разъединения посылок*

$$\frac{\vdash \alpha,\ \vdash \beta}{\vdash (\alpha \,\&\, \beta)}$$ *Правило введения конъюнкции*

$$\frac{\vdash (\alpha \,\&\, \beta)}{\vdash \alpha,\ \vdash \beta}$$ *Правило удаления конъюнкции*

Введем следующие обозначения: символом $\Re$ будем обозначать формулу, которая выводима в ИВ (т.е. $\vdash \Re$), а буквой $\Im$ – формулу, отрицание которой выводимо в ИВ (т.е. $\vdash \overline{\Im}$).

Теорема 2.1. $\vdash B \to \Re$.

Теорема 2.2. $\vdash A \to A$.

Выводимость формулы из совокупности формул (гипотез)

Пусть формула β может быть выведена из совокупности формул $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Для обозначения такого факта будем использовать запись:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta,$$

или сокращенно:

$$\Gamma \vdash \beta.$$

Формулы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ называются *исходными* (*или гипотезами*). Причем эти формулы не обязательно сами должны быть выводимыми в ИВ.

Выводом формулы β *из совокупности формул-гипотез* $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ называется такая конечная последовательность формул $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, каждая из которых является либо выводимой в ИВ формулой, либо формулой из Γ, либо получена из двух предыдущих формул по правилу заключения. Таким образом, получаем:

1) если $\alpha_i \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash \alpha_i$;

2) если $\vdash \beta$, то $\Gamma \vdash \beta$;

3) если $\Gamma \vdash \alpha$ и $\Gamma \vdash (\alpha \to \beta)$, то $\Gamma \vdash \beta$.

Пример 2.7. *Выписать из данной конечной последовательности формул*

$$\{A, B, C, D, (A \to C), (B \to A), (A \to (A \vee B))\}$$

формулы, которые выводимы из следующей совокупности формул-гипотез:

$$\Gamma = \{A, B, (A \to C)\}.$$

Для удобства пронумеруем формулы первого списка:

$$\{\overbrace{A}^{(1)}, \overbrace{B}^{(2)}, \overbrace{C}^{(3)}, \overbrace{D}^{(4)}, \overbrace{(A \to C)}^{(5)}, \overbrace{(B \to A)}^{(6)}, \overbrace{(A \to (A \vee B))}^{(7)}\}. \qquad (*)$$

Тогда для 1-й, 2-й и 5-й формул списка (*) по определению имеем:

$$\Gamma \vdash A; \Gamma \vdash B; \Gamma \vdash (A \to C),$$

(так как они входят в Γ).

В силу того, что $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash (A \to C)$, а формула C получается из формул A и $A \to C$ по правилу заключения, 3-я формула списка (*) также будет выводима из Г:

$$\Gamma \vdash C.$$

Далее рассмотрим аксиому А.I.1:

$$A \to (B \to A).$$

Она, как выводимая в ИВ формула, по определению выводима из Г:

$$\Gamma \vdash A \to (B \to A).$$

Тогда, рассматривая полученные нами ранее формулы A и $A \to (B \to A)$, по правилу заключения получаем, что 6-я формула списка (*) выводима из Г:

$$\Gamma \vdash (B \to A).$$

В рассматриваемом списке формул присутствует формула, которая представляет собой аксиому А.III.1, которая как выводимая в ИВ формула, является также выводимой и из Г. Таким образом для 7-й формулы списка (*) имеем:

$$\Gamma \vdash (A \to (A \vee B)).$$

В итоге получаем, что из совокупности формул Г выводимы следующие формулы:

$$\{A, B, C, (A \to C), (B \to A), (A \to (A \vee B))\}.$$

Теорема 2.3 (**теорема дедукции**). *Если* $\alpha_1, ..., \alpha_n \vdash \beta$, *то* $\vdash \alpha_1 \to (\alpha_2 \to (...(\alpha_n \to \beta)...))$.

Эта теорема позволяет устанавливать выводимость формул гораздо более простым способом, чем непосредственный вывод этих формул из аксиом.

Пример 2.8. *Вывести формулу*

$$\vdash (\alpha \to \beta) \to \big((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\big).$$

Данную формулу выведем с помощью теоремы дедукции. Для этого рассмотрим совокупность формул-гипотез

$$\Gamma = \{(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma), \alpha\}.$$

Сначала докажем, что из этих формул можно вывести формулу γ:

$$(\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma), \alpha \vdash \gamma.$$

По определению имеем:

$$\Gamma \vdash \alpha; \Gamma \vdash (\alpha \to \beta); \Gamma \vdash (\beta \to \gamma).$$

Из формул α и $(\alpha \to \beta)$ с помощью правила заключения можно вывести формулу β, следовательно

$$\Gamma \mid\!- \beta.$$

Рассматривая совместно данное соотношение и $\Gamma \mid\!- (\beta \to \gamma)$, получаем:

$$\Gamma \mid\!- \gamma, \text{ или } (\alpha \to \beta), (\beta \to \gamma), \alpha \mid\!- \gamma.$$

Тогда по теореме дедукции окончательно получаем:

$$\vdash (\alpha \to \beta) \to \big((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)\big).$$

Будем говорить, что формулы α и β *эквивалентны*, если имеет место следующее

$$\vdash (\alpha \sim \beta),$$

где выражение $(\alpha \sim \beta)$ является сокращенной формой записи формулы $(\alpha \to \beta) \& (\beta \to \alpha)$.

Основные свойства соотношения эквивалентности:

1. Если α эквивалентно β, то и β эквивалентно α (симметричность).

2. Если α эквивалентно β и β эквивалентно γ, то α эквивалентно γ.

Теореме 2.4 (эквивалентности). *Если в формуле α заменить какую-нибудь ее часть β_1 эквивалентной формулой β_2, то вновь полученная формула $\alpha(\beta_2)$ будет эквивалентна прежней, именно:*

$$\vdash (\beta_1 \sim \beta_2) \to [\alpha(\beta_1) \sim \alpha(\beta_2)].$$

Теорема эквивалентности позволяет получать новые выводимые в ИВ формулы.

Например, из аксиом A.IV.2 и A.IV.3 следует, что формулы A и $\overline{\overline{A}}$ эквиваленты, т.е. $\vdash (A \sim \overline{\overline{A}})$. Тогда на основании теоремы эквивалентности можно утверждать, что выводимыми будут также и следующие формулы:

$$\vdash (A \to (B \to A)) \sim (\overline{\overline{A}} \to (B \to \overline{\overline{A}}))$$

$$\vdash (A \& B) \sim (\overline{\overline{A}} \& B) \text{ и т.п.}$$

Метод резолюций в ИВ

Пусть $D_1 = D'_1 \vee A$ и $D_2 = D'_2 \vee \overline{A}$ дизъюнкты (элементарные дизъюнкции).

Дизъюнкт $D'_1 \vee D'_2$ называется *резольвентой дизъюнктов* D_1 *и* D_2 *по литере* A и обозначается $\mathrm{res}_A(D_1, D_2)$.

Резольвентой дизъюнктов D_1 *и* D_2 называется их резольвента по некоторой литере и обозначается через $\mathrm{res}(D_1, D_2)$.

Резольвента контрарных литер равна 0, т.е. $\mathrm{res}(A, \overline{A}) = 0$. Если дизъюнкты D_1 и D_2 не содержат контрарных литер, то резольвент у них не существует.

Пусть $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ множество дизъюнктов. Последовательность формул $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ называется *резолютивным выводом из множества* S, если для каждой формулы φ_i ($i = 1, \ldots, n$) выполняется одно из следующих условий:

1) $\varphi_i \in S$;
2) существуют $j, k < i$ такие, что $\varphi_i = \mathrm{res}(\varphi_j, \varphi_k)$.

Теорема 2.5 (о полноте метода резолюций). *Множество дизъюнктов S противоречиво в том и только в том случае, когда существует резолютивный вывод из S, заканчивающийся* 0.

Метод резолюции используется для проверки выводимости формулы φ из данного множества формул $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$.

Доказательство соотношения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ равносильно доказательству того, что множество формул $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \overline{\varphi}\}$ противоречиво (или $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \overline{\varphi} \vdash$), что в свою очередь равносильно условию $D_1, D_2, ..., D_m \vdash$, где D_i ($i = 1, \ldots, m$) – дизъюнкты, полученные с помощью приведения формул $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, \overline{\varphi}\}$ к виду КНФ.

Таким образом, задача проверки соотношения $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ сводится к проверке противоречивости множества дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$, что равносильно существованию резолютивного вывода из S, заканчивающегося 0.

Пример 2.9. *Проверить методом резолюций выводимость формулы* $\big(A \to (B \to F)\big)$ *из набора формул* $\big(A \to (B \to C)\big)$, $\big((C \& D) \to E\big)$, $\big(\bar{F} \to (D \& \bar{E})\big)$, *т.е.*

$$\big(A \to (B \to C)\big), \big((C \& D) \to E\big), \big(\bar{F} \to (D \& \bar{E})\big) \vdash \big(A \to (B \to F)\big).$$

Согласно методу резолюций, для доказательства выводимости данной формулы из данного набора формул необходимо проверить на противоречивость множество формул:

$$S = \left\{\big(A \to (B \to C)\big), \big((C \& D) \to E\big), \big(\bar{F} \to (D \& \bar{E})\big), \overline{\big(A \to (B \to F)\big)}\right\},$$

Приведем все формулы из S к виду КНФ:

$\big(A \to (B \to C)\big) = \bar{A} \vee \bar{B} \vee C$;

$(C \& D) \to E = \overline{(C \& D)} \vee E = \bar{C} \vee \bar{D} \vee E$;

$\bar{F} \to (D \& \bar{E}) = F \vee (D \& \bar{E}) = (F \vee D) \& (F \vee \bar{E})$.

$\overline{\big(A \to (B \to F)\big)} = \overline{\bar{A} \vee \bar{B} \vee F} = A \& B \& \bar{F}$.

Отсюда получаем множество дизъюнктов, которое следует проверить на противоречивость

$$S' = \{(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C), (\bar{C} \vee \bar{D} \vee E), (F \vee D), (F \vee \bar{E}), A, B, \bar{F}\}$$

Построим резолютивный вывод из S':

1) $\mathrm{res}_A\big((\bar{A} \vee \bar{B} \vee C), A\big) = (\bar{B} \vee C)$;

2) $\mathrm{res}_B\big((\bar{B} \vee C), B\big) = C$;

3) $\mathrm{res}_D\big((\bar{C} \vee \bar{D} \vee E), (F \vee D)\big) = (\bar{C} \vee E \vee F)$;

4) $\mathrm{res}_E\big((\bar{C} \vee E \vee F), (F \vee \bar{E})\big) = (\bar{C} \vee F)$;

5) $\mathrm{res}_C\big((\bar{C} \vee F), C\big) = F$;

9) $\mathrm{res}_F(F, \bar{F}) = 0$.

Таким образом, по теореме о полноте метода резолюции множество S противоречиво и, значит имеет место следующее соотношение:

$$\big(A \to (B \to C)\big), \big((C \& D) \to E\big), \big(\bar{F} \to (D \& \bar{E})\big) \vdash \big(A \to (B \to F)\big).$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:

2.1. Доказать, что приведенные ниже выражения есть формулы исчисления высказываний. Выписать все части этих формул.

а) $(A \& B) \to ((C \& B) \vee B)$;

б) $(A \& B \& C) \to (\overline{C \vee D})$;

в) $((A \& B) \to C) \& (\overline{A \vee B})$.

2.2. Являются ли выводами в ИВ следующие последовательности формул:

а) $A \to (A \vee B)$;

б) $A \to (A \vee B)$, $(A \to (A \vee B)) \to (A \to (A \to (A \vee B)))$, $A \to (A \to (A \vee B)$;

в) $A \to (B \to A)$, $(A \to (A \vee B)) \to B$, B?

2.3. Построить выводы следующих формул в ИВ:

а) $(A \vee A) \to A$;

б) $A \to \overline{\overline{A}}$;

в) $\overline{A} \to \overline{A \& B}$;

г) $((A \vee B) \& B) \to (A \vee B)$;

д) $(C \vee B) \to (C \vee B \vee D)$.

2.4. Найти такое минимальное множество Г, из формул которого была бы выводима следующая последовательность формул:

а) $(A \to (B \to C)), A, (B \to C), B, C$;

б) $((A \to \overline{\overline{B}}) \to (\overline{B} \to \overline{A})), (A \to \overline{\overline{B}}), (\overline{B} \to \overline{A}), \overline{B}, \overline{A}$?

2.5. Доказать, что имеют место следующие соотношения:

а) $A, (A \to B) \vdash B$;

б) $B \vdash (A \to B)$;

в) $B \vdash (C \to (A \to B))$;

г) $(A \to B), (A \to (B \to C)), A \vdash C$;

д) $(A \to B), (B \to C) \vdash (A \to C)$;

е) $(A \to (B \to C)) \vdash (B \to (A \to C))$;

ж) $(\overline{B} \to A), (\overline{B} \to \overline{A}) \vdash B$.

2.6. Построить выводы следующих формул:

а) $A \to ((A \to B) \to B)$;

б) $A \to (B \to B)$;

в) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$;

г) $(A \to B) \to ((C \to A) \to (C \to B))$;

д) $((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B)$;

е) $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$;

ж) $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$;

з) $(B \to C) \to (B \to (A \to C))$;

и) $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$.

2.7. Доказать, что для ИВ справедливы следующие соотношения:

а) $\Gamma, \alpha, \beta \vdash (\alpha \,\&\, \beta)$ (введение &);

б) $\Gamma, \alpha \vdash (\alpha \vee \beta)$ (введение $\vee$);

в) $\Gamma, \beta \vdash (\alpha \vee \beta)$ (введение $\vee$);

г) $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \beta; \quad \Gamma, \alpha \vdash \overline{\beta}}{\Gamma \vdash \overline{\alpha}}$ (введение отрицания);

д) $\Gamma, (\alpha \,\&\, \beta) \vdash \alpha$ (удаление &);

е) $\Gamma, (\alpha \,\&\, \beta) \vdash \beta$ (удаление &);

ж) $\dfrac{\Gamma, \alpha \vdash \gamma; \quad \Gamma, \beta \vdash \gamma}{\Gamma, (\alpha \vee \beta) \vdash \gamma}$ (удаление $\vee$);

з) $\Gamma, \overline{\overline{\alpha}} \vdash \alpha$ (удаление отрицания).

2.8. Доказать, что в ИВ имеют место следующие соотношения:

а) $\vdash \alpha \sim \alpha$;

б) $\alpha \sim \beta \vdash \beta \sim \alpha$;

в) $\alpha \sim \beta \vdash ((\alpha \,\&\, \gamma) \sim (\beta \,\&\, \gamma))$;

г) $\alpha \sim \beta \vdash ((\alpha \vee \gamma) \sim (\beta \vee \gamma))$;

д) $\alpha \sim \beta \vdash ((\alpha \to \gamma) \sim (\beta \to \gamma))$.

2.9. Доказать, что следующие формулы выводимы в ИВ:

а) $((\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma) \sim (\alpha \,\&\, (\beta \,\&\, \gamma))$;

б) $((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \sim (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$;

в) $(\alpha \,\&\, \beta) \sim (\beta \,\&\, \alpha)$;

г) $(\alpha \vee \beta) \sim (\beta \vee \alpha)$;

д) $(\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma)) \sim ((\alpha \,\&\, \beta) \vee (\alpha \,\&\, \gamma))$;

е) $(\alpha \vee (\beta \,\&\, \gamma)) \sim ((\alpha \vee \beta) \,\&\, (\alpha \vee \gamma))$;

ж) $(\alpha \,\&\, \alpha) \sim \alpha$;

з) $(\alpha \vee \alpha) \sim \alpha$;

и) $(\alpha \vee (\alpha \,\&\, \beta) \sim \alpha$;

к) $(\alpha \,\&\, (\alpha \vee \beta) \sim \alpha$;

л) $\overline{(\alpha \,\&\, \overline{\alpha})}$;

м) $\alpha \vee \overline{\alpha}$;

н) $(\alpha \,\&\, \beta) \sim \overline{(\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})}$;

о) $(\alpha \vee \beta) \sim \overline{(\overline{\alpha} \,\&\, \overline{\beta})}$;

п) $(\alpha \to \beta) \sim (\overline{\alpha} \vee \beta)$;

р) $\overline{(\alpha \,\&\, \beta)} \sim (\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})$;

с) $\overline{(\alpha \vee \beta)} \sim (\overline{\alpha} \,\&\, \overline{\beta})$.

2.10. Проверить на противоречивость множество дизъюнктов

а) $\{A \vee \overline{B} \vee \overline{C} \vee \overline{D}, B, \overline{A} \vee B \vee \overline{C}, C, \overline{B} \vee D\}$;

б) $\{\overline{A} \vee B, \overline{C} \vee D, \overline{B} \vee E, \overline{D} \vee F, \overline{E} \vee \overline{F}, \overline{A} \vee C, A\}$;

в) $\{\overline{C} \vee \overline{D} \vee E, \overline{E} \vee F, C, D, \overline{A}, \overline{F}\}$.

2.11. Методом резолюций проверить следующие соотношения:

а) $(\overline{A} \vee C), (C \to B), (B \to A) \vdash (A \to (B \to C))$;

б) $((A \vee C) \to B), (C \to (A \vee B)), ((B \,\&\, C) \to (A \vee \overline{B})) \vdash (B \to C)$;

в) $(A \to (B \,\&\, C)), (B \to D), (C \to E), (\overline{A} \to F) \vdash ((D \,\&\, E) \vee F)$;

г) $(A \to B), (C \to D), (B \to E), (D \to F), (A \to C), A \vdash (E \,\&\, F)$;

д) $\overline{C}, (A \vee B) \vdash ((B \to C) \to A)$.