Лекция (26 мая 2020 года)

НЕЧЕТКАЯ ЛОГИКА

Задание:

1. **Прослушать видеозапись лекции Мусатова Даниила Владимировича, кандидат физико-математических наук, на тему «Неклассические логики. Нечеткая логика»**

   https://mipt.lectoriy.ru/lecture/Maths-MathemLogic-L16-Musatov-141217.02

2. **Изучить текстовый материал, изложенный ниже.**
3. **Составить письменный конспект.**

Человек способен принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Построение моделей приближенных рассуждений человека и использование их в компьютерных системах представляет сегодня одну из важнейших проблем науки.

Значительный вклад в этом направлении в середине XX в. сделал профессор Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде (Lotfi A. Zadeh). Его работа «Fuzzy Sets», опубликованная в № 8 журнала «Information and Control» за 1965 г., заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека и явилась начальным толчком к развитию новой математической теории.

А. Заде предложил расширить классическое понятие **множества**, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале [0; 1], а не только значения 0 либо 1. Такие множества были названы им **нечеткими** (*fuzzy*). Он также определил также ряд операций над нечеткими множествами и предложил обобщение известных методов логического вывода modus ponens и modus tollens.

Введя затем понятие **лингвистической переменной** и допустив, что в качестве ее значений (термов) выступают нечеткие множества, Л.Заде создал аппарат для описания процессов интеллектуальной деятельности, включая нечеткость и неопределенность выражений.

Дальнейшие работы профессора Л.Заде и его последователей заложили прочный фундамент новой теории и создали предпосылки для внедрения методов нечеткого управления в инженерную практику.

Использование этого подхода позволяет построить «нечёткие» аналоги основных математических понятий и создать формальный аппарат для моделирования человеческого способа решения задач.

Лингвистическая переменная (ЛП) – это *переменная, значение которой определяется набором вербальных (словесных) характеристик некоторого свойства.*

Например, лингвистическую переменную РОСТ определяется набором переменных {Карликовый, Низкий, Средний, Высокий, Очень высокий}.

Значения лингвистических переменных определяются через так называемые **нечеткие множества**, которые в свою очередь определены на некоторой базовом наборе значений или базовой числовой шкале, имеющей размерность. Каждое значение лингвистической переменной определяется как нечеткое множество (например, нечеткое множество «низкий рост»).

Нечеткое множество определяется через некоторую базовую шкалу B и функцию принадлежности нечеткого множества $\mu(x)$, $x \in B$, принимающую значение на интервале [0; 1]. Таким образом, нечеткое множество B – совокупность пар вида $(x, \mu(x))$, где $x \in B$.

Часто встречается и такая запись:

$$B = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu(x_i)},$$

где x_i – i-е значение базовой шкалы.

Функция принадлежности определяет субъективную «степень уверенности» эксперта в том, что данное конкретное значение базовой шкалы соответствует определяемому нечеткому множеству. Эту функцию не стоит путать с вероятностью, носящей объективный характер и подчиняющуюся другим математическим зависимостям.

Например, для двух экспертов определение нечеткого множества «высокая» для лингвистической переменной ЦЕНА АВТОМОБИЛЯ в условных единицах может существенно отличаться в зависимости от их социального и финансового положения.

На рис. 1 показан пример задания нечеткого множества «Молодой» Например, 15-летние относится к термину молодой с рангом около 0,9. Диапазону возраста от 16 до 30 лет можно смело присвоить ранг 1, т.е. человек в этом возрасте действительно молодой. После 30 лет человек вроде уже не молодой, но еще и не старый, здесь принадлежность (ранг) термина молодой возрасту будет принимать значения в интервале от 0 до 1. И чем больше возраст человека, тем меньше становится его принадлежность к соответствующему терму, т.е. ранг будет стремиться к 0.

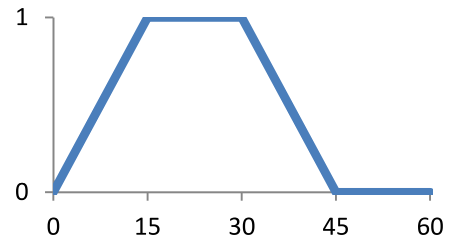


Рис. 1. Вариант нечеткого множества «Молодой»

Для нашего примера

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{1}{15}x, & \text{если } 0 \le x \le 15; \\ 1, & \text{если } 15 < x \le 30 \\ -\frac{1}{15}x + 3, & \text{если } 30 < x \le 45; \\ 0, & \text{если } x > 45. \end{cases}$$

Предположим, что мы хотим интерпретировать значения лингвистических переменных ВОЗРАСТ, МОЛОДОЙ ВОЗРАСТ, ПРЕКЛОННЫЙ ВОЗРАСТ или ПЕРЕХОДНЫЙ ВОЗРАСТ. Определим ВОЗРАСТ как лингвистическую переменную (рис. 2). Тогда «молодой», «преклонный», «переходный» будут значениями этой лингвистической переменной.

Рис. 2. Лингвистическая переменная ВОЗРАСТ и нечеткие множества, определяющие ее значения

Таким образом, базовым набором значений лингвистической переменно ВОЗРАСТ можно считать следующий:

B = {Младенческий, Детский, Юный, Молодой, Зрелый, Преклонный, Старческий}.

Для лингвистической переменной ВОЗРАСТ базовая шкала – это числовая шкала от 0 до 120, обозначающая количество прожитых лет, а фкнция принадлежности определяет, насколько мы уверены в том, что данное количество лет можно отнести к данной категории возраста. На рис. 3 показано, как одни и те же значения базовой шкалы могут участвовать в определении различных нечетких множеств.

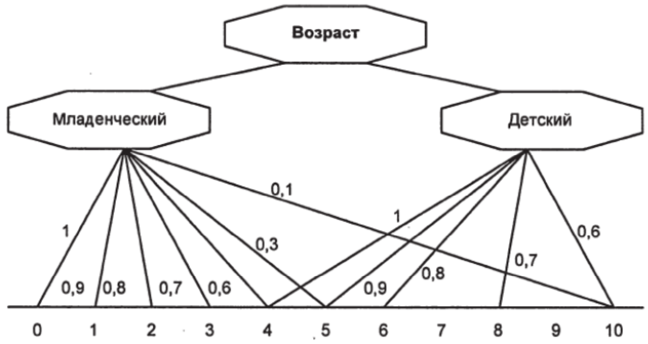


Рис. 3. Формирование нечетких множеств

Например, определить значение нечеткого множества «Младенческий» можно так:

$$\text{«младенческий»} = \left\{ \frac{0,5}{1} + \frac{1}{0,9} + \frac{2}{0,8} + \frac{3}{0,7} + \frac{4}{0,6} + \frac{5}{0,3} + \frac{10}{0,1} \right\}$$

На рис. 4 проиллюстрирована оценка нечеткого множества «Младенческий возраст». Согласно этому рисунку, ребенка до полугода с высокой степенью уверенности можно отнести к младенцам ($\mu = 1$). Дети до 4 лет причисляются к младенцам тоже, но с меньшей степенью уверенности ($0,5 < \mu < 0,9$).

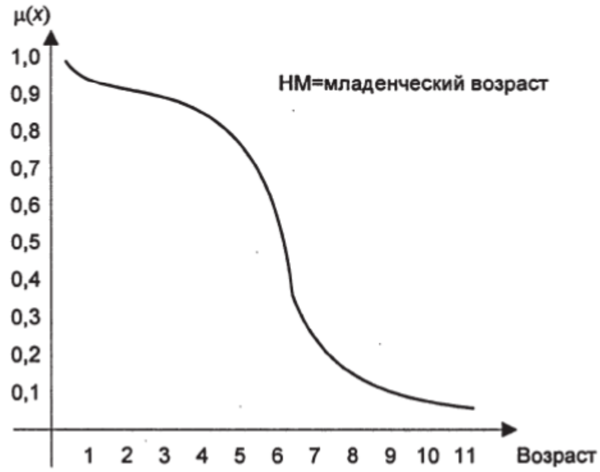


Рис. 4. График функции принадлежности нечеткому множеству «младенческий возраст»

Вид функции принадлежности может быть абсолютно произвольным. В настоящее время сформировалось понятие о так называемых стандартных кусочно-линейных функциях принадлежности (рис. 5).

Рис. 5. Стандартные кусочно-линейные функции принадлежности

Стандартные кусочно-линейные функции принадлежности легко применимы к решению большинства задач. Существуют и нелинейные функции принадлежности, например, показательные и гауссовы.

Основной трудностью, мешающей интенсивному примнению теории нечетких множеств при решении практических задач, является то, что функция принадлежности должна быть построена вне самой теории и, следовательно, ее адекватность не может быть проверена непосредственно средствами теории. В настоящее время в каждом известном методе построения функций принадлежности формулируются свои требования и обоснования к выбору именно такого построения.

Традиционно выделяются две **группы методов построения функций принадлежности нечетких множеств**: прямые и косвенные методы.

Прямые методы определяются тем, что эксперт непосредственно задает правила определения значений функций принадлежности μ_A, характеризующей понятие A. Эти значения согласуются с его предпочтениями на множестве объектов U следующим образом:

$\forall u_1, u_2 \in U$: $\mu_A(u_1) < \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, когда u_2 предпочтительнее u_1, т.е. в большей степени характеризуется понятием A;

$\forall u_1, u_2 \in U$: $\mu_A(u_1) = \mu_A(u_2)$ тогда и только тогда, когда u_1 и u_2 безразличны относительно понятия A.

Примеры прямых методов: непосредственное описание функции принадлежности в виде таблицы, формулы, примера.

В **косвенных методах** значения функций принадлежности выбираются таким образом, чтобы удовлетворить заранее сформулированным условиям. Экспертная информация является только исходной информацией для дальнейшей обработки. Дополнительные условия могут налагаться как на вид получаемой информации, так и на процедуру обработки. Примерами дополнительных условий могут служить следующие: функция принадлежности должна отражать близость к заранее выделенному эталону, объекты множества U являются точками в некотором параметрическом пространстве; результатом процедуры обработки должна быть функция принадлежности, удовлетворяющая условиям интервальной шкалы; при попарном сравнении объектов, если один объект оценивается в α раз сильнее, чем другой, то второй объект оценивается только в $1/\alpha$ раз сильнее, чем первый.

Как правило, прямые методы используются для описания понятий, которые характеризуются измеримыми свойствами, как-то высота, вес, объем, рост, время. В этом случае удобно непосредственное задание значений степеней принадлежности. К прямым методам можно отнести те методы, которые основаны на вероятностной трактовке функции принадлежности, т.е. вероятность того, что объект $u = U$ будет отнесен к множеству, которое характеризует понятие A.

Функции принадлежности могут отражать мнение как некоторой группы экспертов, так и одного уникального эксперта. Комбинируя возможные два метода построения функций принадлежности (прямой и косвенный) с одним или несколькими экспертами, можно получить четыре типа экспертизы. Для этих четырех типов экспертиз разработаны специальные методы.

Для операций с нечеткими знаниями, выраженными с помощью лингвистических переменных, существует много различных способов. Эти способы являются в основном эвристиками.

Пусть заданы два нечетких множества *A* (рис. 6) и В (рис. 7).

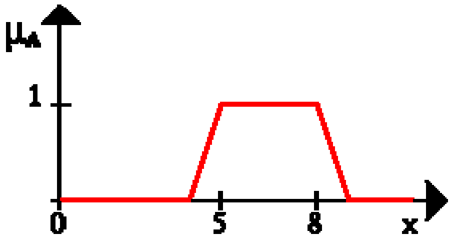


Рис. 6. График фукнции принадлености нечеткого множества *A*

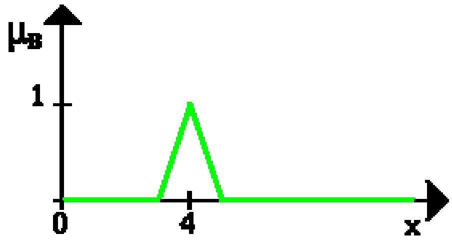


Рис. 7. График фукнции принадлености нечеткого множества *B*

На рис. 8 синяя линия показывает пересечение (конъюнкцию) нечетких множеств *A* и *B* ($A \cap B$). Функция принадлежности нового нечеткого множества определяется так:

$$\mu_{A \cap B} = \min(\mu_{A,}\ \mu_{B}).$$

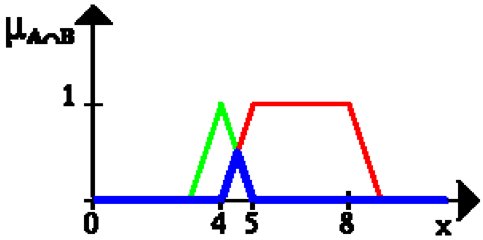


Рис. 8. Пересечение нечетких множеств *A* и *B*

На рис. 9 синяя линия показывает объединение (дизъюнкцию) нечетких множеств *A* и *B* ($A \cup B$). Функция принадлежности нового нечеткого множества определяется так:

$$\mu_{A \cup B} = \max(\mu_{A,}\ \mu_{B}).$$

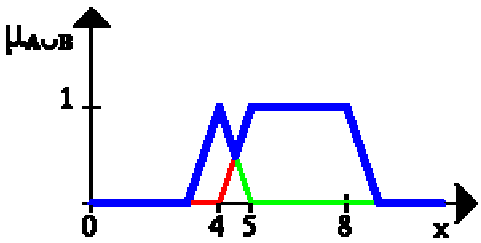


Рис. 9. Пересечение нечетких множеств *A* и *B*

На рис. 10 синяя линия показывает дополнение (инверсию) нечеткого множеств *A*. Функция принадлежности нового нечеткого множества определяется так:

$$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A .$$

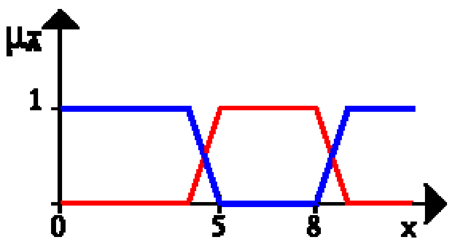


Рис. 10. Дополнение нечеткого множества *A*

Перечисленные операции являются основными. Используя комбинацию этих операций можно выразить и другие. Например, импликацию множеств A и B (т.е. $A \to B$) можно представить как комбинацию операций объединения и дополнения: $\overline{A} \cup B$. Разность множеств A и B можно задать: $A - B = \overline{A} \cup B$.

Усиление или ослабление лингвистических понятий достигается введением специальных квантификаторов. Например, если понятие «старческий возраст» определяется как

$$\text{«Старческий возраст»} = \left\{\frac{60}{0{,}6} + \frac{70}{0{,}8} + \frac{80}{0{,}9} + \frac{90}{1}\right\},$$

То понятие «очень старческий возраст» распознается как

$$con(A) = A^2 = \sum_i \frac{x_i}{\mu_i^2}.$$

Т.е. «очень старческий возраст» определится так:

$$\text{«Очень старческий возраст»} = \left\{\frac{60}{0{,}36} + \frac{70}{0{,}64} + \frac{80}{0{,}81} + \frac{90}{1}\right\}.$$

В теории нечетких множеств такая операция называется **концентрацией**. В результате применения этой операции к множеству A уменьшаются степени принадлежности элементов x этому множеству (рис. 11, красная линия). В естественном языке применение этой операции к тому или иному значению лингвистической переменной А соответствует использованию усиливающего терма «очень» (например, «очень высокий», «очень старый» и т.д.).

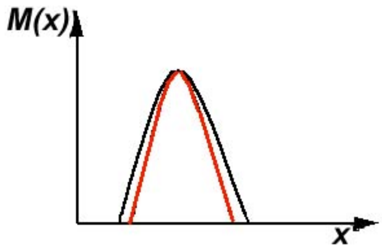


Рис. 11. Концентрация нечеткого множества

Имеет место и операция, которая называется **растяжением (или размытием)**, действие которой противоположно действию операции концентрации и соответствует неопределенному терму «довольно», выполняющему функцию ослабления следующего за ним (основного) терма A: «довольно высокий», «довольно старый» и т.п. (рис. 12, зеленая линия).

Операция растяжения определяется как:

$$dil(A) = \sqrt{A} = \sum_i \frac{x_i}{\sqrt{\mu_i}}.$$

$$\text{«Довольно старческий возраст»} = \left\{\frac{60}{0{,}77} + \frac{70}{0{,}89} + \frac{80}{0{,}95} + \frac{90}{1}\right\},$$

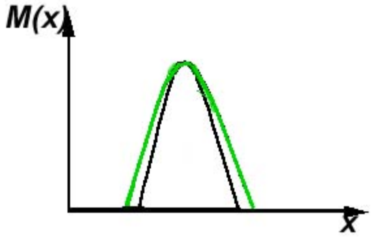


Рис. 12. Растяжение нечеткого множества

Методика продукционного вывода:

1. *Фаззификация*. Для каждого входного фактического параметра (переменной, участвующей в процессе вывода), определяется соответствующая функция принадлежности. Для этого применяются синтаксические и семантические процедуры той лингвистической переменной, значением которой является текущий входной параметр.

2. *Сопоставление*. Для посылки (антецедента) каждого правила, участвующего на очередном шаге вывода, вычисляется значение истинности, которое в дальнейшем применяется к заключению (консеквенту) правила. Это приводит к некоторому видоизменению функции принадлежности в консеквенте правил, и это видоизменение зависит от используемого метода вывода.

3. *Композиция*. Все функции принадлежности, полученные в процессе сопоставления и относящиеся к одной и той же переменной вывода, объединяются для того, чтобы сформировать одну функцию принадлежности. Способ композиции так же зависит от используемого метода нечеткого вывода.

4. *Дефаззификация*. Приведение функций принадлежности к четким значениям. Эта процедура используется тогда, когда полезно преобразовать набор выведенных значений, представляющий собой множество функций принадлежности, в четкие значения, которые можно интерпретировать в терминах проблемной области.

Пример использования нечеткой логики при управлении мобильным роботом

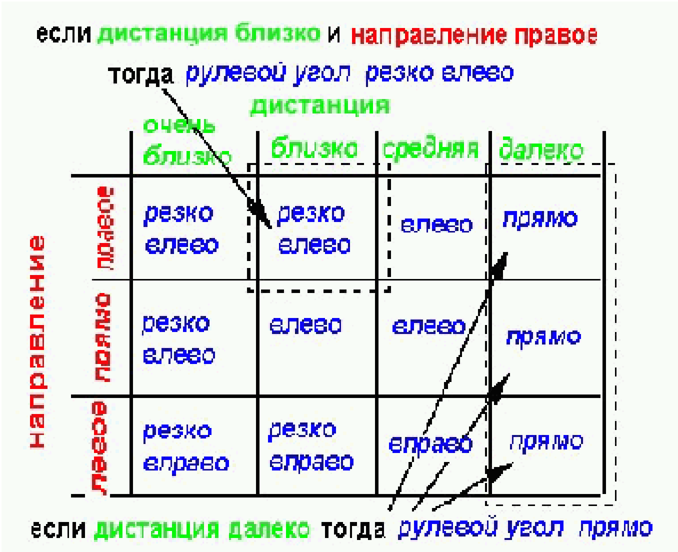
Пусть роботу необходимо объехать помеху. Для этого введем две лингвистические переменные: ДИСТАНЦИЯ (расстояние от робота до помехи) и НАПРАВЛЕНИЕ (угол между продольной осью робота и направлением на помеху).

Рассмотрим лингвистическую переменную ДИСТАНЦИЯ. Значениями ее можно определить термы ДАЛЕКО, СРЕДНЯЯ, БЛИЗКО и ОЧЕНЬ БЛИЗКО. Для физической реализации лингвистической переменной необходимо определить точные физические значения термов этой переменной. Пусть переменная ДИСТАНЦИЯ может принимать любое значение из диапазона от нуля до бесконечности. Согласно положениям теории нечетких множеств, в таком случае каждому значению расстояния из указанного диапазона может быть поставлено в соответствие некоторое число от нуля до единицы, которое определяет степень принадлежности данного физического расстояния (допустим 40 см) к тому или иному терму лингвистической переменной ДИСТАНЦИЯ. Степень принадлежности определяется так называемой функцией принадлежности $\mu(d)$, где d – расстояние до помехи. В нашем случае расстоянию 40 см можно задать степень принадлежности к терму ОЧЕНЬ БЛИЗКО равную 0,7, а к терму *БЛИЗКО* – 0,3 (см. рис. 13). Конкретное определение степени принадлежности может проходить только при работе с экспертами.

Рис. 13. Лингвистическая переменная и функция принадлежности

Переменной НАПРАВЛЕНИЕ, которая может принимать значения в диапазоне от 0 до 360 градусов, зададим термы ЛЕВОЕ, ПРЯМО И ПРАВОЕ.

Теперь необходимо задать выходные переменные. В рассматриваемом примере достаточно одной, которая будет называться РУЛЕВОЙ УГОЛ. Она может содержать термы: РЕЗКО ВЛЕВО, ВЛЕВО, ПРЯМО, ВПРАВО, РЕЗКО ВПРАВО. Связь между входом и выходом запоминается в таблице нечетких правил:



Каждая запись в данной таблице соответствует своему нечеткому правилу, например:

Если ДИСТАНЦИЯ БЛИЗКО и НАПРАВЛЕНИЕ ПРАВОЕ, тогда РУЛЕВОЙ УГОЛ РЕЗКО ВЛЕВО

Таким образом, мобильный робот с нечеткой логикой будет работать по следующему принципу: данные с сенсоров о расстоянии до помехи и направлении на нее будут фаззифицированы, обработаны согласно табличным правилам, дефаззифицированы и полученные данные в виде управляющих сигналов поступят на приводные устройства робота.

Рекомендуемая литература

1. *Назаров, Д.М.* Интеллектуальные системы: основы теории нечетких множеств: учеб. пособие для вузов / Д.М. Назаров, Л.К. Конышева. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2020. – 186 с. – URL: https://urait.ru/bcode/453458.

2. *Чернов, В.Г.* Основы теории нечетких множеств: учеб. пособие / В.Г. Чернов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2010. – 96 с. – URL: http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/2087/3/00705.pdf.