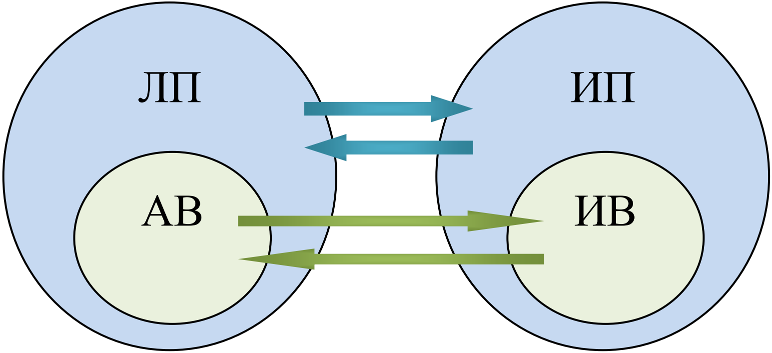
5. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

Исчисление предикатов – *формальная аксиоматическая теория*, которая предназначена для описания логических законов, справедливых для любой непустой области объектов с произвольными заданными на этих объектах предикатами.



Символы исчисления предикатов (далее – ИП)

Алфавит исчисления предикатов

- **Малые латинские буквы конца алфавита *x*, *y*, *z*, …**
  (для обозначения **предметных переменных**, т.е. неопределенных элементов области)
- **Малые латинские буквы начала алфавита *a*, *b*, *c*, …**
  (для обозначения **предметных постоянных**, или **индивидуальных предметов**)
- **Заглавные латинские буквы *A*, *B*, *C*, …**
  (для обозначения простых высказываний)
- **$F(x)$, $G(x, y)$, $P(x_1, \ldots, x_n)$, …**
  (для обозначения **переменных предикатов**, т.е. функций, аргументы которых принимают значения из области Ω, а сами функции могут принимать только два значения: 1 и 0
- **Символы & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\bar{\ }$ (инверсия), $\rightarrow$ (импликация), $\forall$(квантор всеобщности), $\exists$ (существований)**
  (для обозначения **операций**, с помощью которых формируются сложные высказывания)
- **Круглые скобки** (для указания приоритета операций)

Определение формулы ИП:

1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.

2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.

3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.

4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ – формулы ИП.

5° Если α – формула ИП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.

6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Формулы, определенные в п. 1° и 2°, называются **элементарными формулами ИП.**

Примечание: Из определения видно, что все формулы ИВ также являются формулами ИП.

Символы $\forall$ и $\exists$ называются **квантором всеобщности** и квантором **существования**, соответственно.

Переменная x в формулах $\forall x \alpha$ и $\exists x \alpha$ называется **связанной переменной.**

Переменные, которые не связаны кванторами, называются **свободными**.

Коллизия предметных переменных:

а) *если в формуле свободные и связанные переменные обозначены одинаковыми буквами*;

б) *если какой-либо квантор находится в области действия другого квантора, и переменные, связанные этими квантами обозначены одинаковыми буквами.*

Примеры выражений, которые **не являются формулами**, из-за имеющей место коллизии переменных

$$F(x) \to \exists x G(x, y)$$

$$\forall x(F(y) \to \exists x G(x, y))$$

Областью действия квантора называется часть формулы, на которую распространяется действие квантора.

$$\overbrace{\exists x(F(x) \rightarrow \forall y \underbrace{G(y,z))}_{\text{Область действия квантора } \forall}}^{\text{Область действия квантора } \exists}$$

Определение понятия «часть формулы»:

1° Частью элементарной формулы является она сама.

2° Частью формулы $\forall x\alpha$ (или $\exists x\alpha$) является сама формула и всякая часть формулы α.

3° Частями формул $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ и $(\alpha \rightarrow \beta)$ являются сами эти формулы и все части формул α и β.

4° Частями формулы $\overline{\alpha}$ является сама эта формула и все части формулы α.

Все части формулы $\exists x(F(x) \rightarrow \forall y G(y, z))$:

1) $G(y, z)$
2) $F(x)$
3) $\forall y G(y, z)$
4) $F(x) \rightarrow \forall y G(y, z)$
5) $\exists x(F(x) \rightarrow \forall y G(y, z))$

Из определения части формулы ИП и приведенного примера видно, что **каждая из частей любой формулы ИП является формулой ИП**.

5.2. Аксиомы исчисления предикатов

I

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

II

1. $(A \,\&\, B) \to A$
2. $(A \,\&\, B) \to B$
3. $(A \to B) \to \big((A \to C) \to (A \to (B \,\&\, C))\big)$

III

1. $A \to (A \vee B)$
2. $B \to (A \vee B)$
3. $(A \to C) \to \big((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)\big)$

IV

1. $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$
2. $A \to \bar{\bar{A}}$
3. $\bar{\bar{A}} \to A$

Аксиомы исчисления высказываний

V

1. $\forall x F(x) \to F(y)$
2. $F(y) \to \exists x F(x)$

5.3. Правила образования выводимых формул

1. Правило заключения. *Если* α *и* $\alpha \rightarrow \beta$ *– выводимые формулы ИП, то* β *– также выводимая формула ИП:*

$$\frac{\vdash \alpha, \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\vdash \beta}.$$

Символ $\vdash$ так же, как и в ИВ, будет использоваться для обозначения выводимых формул.

С помощью правила заключения доказать, что выводима формула $\vdash \left(\overline{F(y)} \rightarrow \overline{\forall x F(x)}\right)$;

Имеем следующие выводимые формулы:

$$\vdash (\forall x F(x) \rightarrow F(y)); \qquad \vdash (\forall x F(x) \rightarrow F(y)) \rightarrow \left(\overline{F(y)} \rightarrow \overline{\forall x F(x)}\right)$$

(первая из них является аксиомой A.V.1, вторая получается из A.IV.1). Применим к ним правило заключения:

$$\frac{\vdash (\forall x F(x) \rightarrow F(y)); \ \ \vdash (\forall x F(x) \rightarrow F(y)) \rightarrow \left(\overline{F(y)} \rightarrow \overline{\forall x F(x)}\right)}{\vdash \left(\overline{F(y)} \rightarrow \overline{\forall x F(x)}\right)}.$$

Следовательно, формула $\left(\overline{F(y)} \rightarrow \overline{\forall x F(x)}\right)$ является выводимой в ИП.

Группа операций подстановки (замены) элементов формул ИП

Операция замены: переменного высказывания. Пусть формула $\alpha(A)$ содержит переменное высказывание A. Тогда все вхождения переменного высказывания A в формулу α можно заменить любой формулой β, если последняя удовлетворяет следующим условиям:

1) *свободные переменные в формуле* β *обозначены буквами, отличными от связанных переменных в формуле* α, *и связанные переменные в формуле* β – *буквами, отличными от свободных переменных в формуле* α;

2) *если переменное высказывание A в формуле* α *находится в области действия квантора, связывающего некоторую переменную, то эта переменная не входит в формулу* β.

Такая замена называется *подстановкой формулы* β *в формулу* α *вместо переменного высказывания A.*

ИЛИ: *Подстановкой в формулу* α *вместо переменного высказывания A формулы* β *называется замена формулой* β *всех вхождений переменного высказывания A в формулу* α, *если при этом* ***не возникает коллизии предметных переменных с*** α.

Пусть

$$\alpha(A) = \forall x(A \vee \exists z F(x, y, z))$$

В данной формуле предметные переменные x и z являются связанными кванторами, а переменная y – свободной.

Для того, чтобы не возникла коллизия переменных A можно, например, заменить следующей формулой:

$$\beta = \forall z \forall t(A \,\&\, G(z, t) \& F(t, y, z)).$$

Полученное в результате такой замены слово

$$\forall x(\forall z \forall t(A \,\&\, G(z, t) \& F(t, y, z)) \vee \exists z F(x, y, z))$$

является формулой ИП.

Операция замены переменного предиката. Пусть формула $\alpha(F)$ содержит переменный предикат F от n переменных и пусть имеется формула $\beta(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, содержащая n свободных переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (вообще говоря, может содержать и другие переменные), где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – буквы, отличные от всех предметных переменных формулы α, и удовлетворяющая следующим условиям:

1) *свободные переменные в формуле β обозначены буквами, отличными от связанных переменных в формуле α, и связанные переменные в формуле β – буквами, отличными от свободных переменных в α;*

2) *если F в формуле α находится в области действия квантора, связывающего какую-либо переменную, то эта переменная не входит в формулу β.*

Тогда возможна подстановка формулы β в α вместо предиката F.

ИЛИ: *Если формула $\alpha(F)$ содержит переменный предикат F от n переменных и имеется формула $\beta(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, содержащая n свободных переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (вообще говоря, может содержать и другие переменные), где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – буквы, отличные от всех предметных переменных формулы α, то возможна подстановка формулы β в α вместо предиката F, если при этом не возникает коллизии переменных с α.*

Пусть имеются формулы

$$\alpha = \forall x \exists y \exists z \big(F(x,y) \vee \overline{F(x,z)}\big).$$

$$\beta = \forall u \exists v (H(u,t_1) \vee H(v,t_2)).$$

Тогда замена предиката F формулой β может следующей (1-е место в $F(\ldots)$ соответствует переменной t_1, а 2-е – переменной t_2)

$$\forall x \exists y \exists z \big(\forall u \exists v (H(u,x) \vee H(v,y)) \vee \overline{\forall u \exists v (H(u,x) \vee H(v,z))}\big).$$

2. Правило подстановки в переменное высказывание и переменный предикат: *если α – выводимая формула ИП, то формула, полученная из α в результате применения операции замены переменного высказывания или операции замены переменного предиката также будет выводимой формулой ИП.*

Например, из выводимой формулы

$$\vdash A \to A$$

с помощью замены переменного высказывания A формулой $F(x)$ можно вывести формулу

$$\vdash (F(x) \to F(x)).$$

А из выводимой формулы

$$\vdash (\forall x F(x) \to \exists x F(x))$$

с помощью замены предиката $F(x)$ формулой $\beta(t) = G(t, y) \,\&\, F(t)$ можно получить следующую выводимую формулу:

$$\vdash \big(\forall x(G(x, y) \,\&\, F(x)) \to \exists x(G(x, y) \,\&\, F(x))\big).$$

3. Правило замены свободной предметной переменной. *Пусть формула* α *является выводимой формулой ИП и формула* α' *получена из* α *заменой любой свободной предметной переменной другой свободной предметной переменной, так что заменяемая переменная заменяется одинаковым образом всюду, где она в формулу* α входит; тогда α' *является выводимой формулой ИП*.

Например из выводимой формулы

$$\vdash \big(\forall x(G(x,y) \,\&\, F(x)) \to \exists x(G(x,y) \,\&\, F(x))\big),$$

содержащей одну свободную предметную переменную – y, можно получить следующую выводимую формулу:

$$\vdash \big(\forall x(G(x,z) \,\&\, F(x)) \to \exists x(G(x,z) \,\&\, F(x))\big),$$

в которой переменная y была заменена на z всюду, где она входила в исходную формулу (при этом переменная z не была связана кванторами).

4. Правило переименования связанных предметных переменных. *Если формула α является выводимой формулой ИП, то формула α′, полученная из α заменой связанных переменных другими связанными переменными, отличными от всех свободных переменных формулы α, также является выводимой формулой. При этом заменяемая связанная переменная в формуле α должна заменяться одинаковым образом всюду в области действия квантора, связывающего данную переменную, и в самом кванторе.*

Например, если в выводимой формуле

$$\vdash \big(\forall x(G(x,y)\ \&\ F(x)) \to \exists x(G(x,y)\ \&\ F(x))\big)$$

заменить связанную переменную x другой переменой или другими переменными, которые не были свободными в исходной формуле, то получатся следующие выводимые формулы:

$$\vdash \big(\forall z(G(z,y)\ \&\ F(z)) \to \exists x(G(x,y)\ \&\ F(x))\big).$$

$$\vdash \big(\forall z(G(z,y)\ \&\ F(z)) \to \exists w(G(w,y)\ \&\ F(w))\big).$$

$$\vdash \big(\forall u(G(u,y)\ \&\ F(u)) \to \exists u(G(u,y)\ \&\ F(u))\big).$$

5. Правила связывания квантором

Первое правило связывания квантором. *Если формулы* $\beta \to \alpha(x)$ *выводима в исчислении предикатов и* β *не содержит переменной x, то формула* $\beta \to \forall x\alpha(x)$ *также выводима в исчислении предикатов, т.е.*

$$\frac{\vdash \beta \to \alpha(x)}{\vdash \beta \to \forall x\alpha(x)}.$$

Второе правило связывания квантором. *Если формула* $\alpha(x) \to \beta$ *выводима в исчислении предикатов и* β *не содержит переменной x, то формула* $\exists x\alpha(x) \to \beta$ *также выводима в исчислении предикатов, т.е.*

$$\frac{\vdash \alpha(x) \to \beta}{\vdash \exists x\alpha(x) \to \beta}.$$

Например, с помощью второго правила связывания квантором из выводимой формулы $\vdash [(F(x) \,\&\, G(y)) \to G(y)]$ может быть получена выводима формула:

$$\vdash [\exists x(F(x) \,\&\, G(y)) \to G(y)].$$

Правило силлогизма $\dfrac{\vdash(\alpha\to\beta),\quad \vdash(\beta\to\gamma)}{\vdash(\alpha\to\gamma)}$.

Правило введения конъюнкции $\dfrac{\vdash\alpha,\ \vdash\beta}{\vdash(\alpha\,\&\,\beta)}$.

Имеет место и обратное правило: $\dfrac{\vdash(\alpha\,\&\,\beta)}{\vdash\alpha,\ \vdash\beta}$.

Правило перестановки посылок $\dfrac{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{\vdash(\beta\to(\alpha\to\gamma))}$.

Правило соединения посылок $\dfrac{\vdash\alpha\to(\beta\to\gamma)}{\vdash(\alpha\,\&\,\beta)\to\gamma}$.

Правило разъединения посылок $\dfrac{\vdash(\alpha\,\&\,\beta)\to\gamma}{\vdash\alpha\to(\beta\to\gamma)}$.

Производное правило связывания квантором, которое формулируется следующим образом: *если в ИП выводима формула* $\alpha(x)$, *то в ИП также выводима формула* $\forall x\alpha(x)$:

$$\frac{\vdash \alpha(x)}{\vdash \forall x\alpha(x)}.$$

Например, из выводимой формулы

$$\vdash [F(x) \to (G(y) \to F(x))]$$

путем применения данного правила последовательно получить следующие выводимые формулы:

$$\vdash \forall y[F(x) \to (G(y) \to F(x))],$$

$$\vdash \forall x\forall y[F(x) \to (G(y) \to F(x))].$$

Аксиомы ИП

I

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

II

1. $(A \,\&\, B) \to A$
2. $(A \,\&\, B) \to B$
3. $(A \to B) \to \big((A \to C) \to (A \to (B \,\&\, C))\big)$

III

1. $A \to (A \vee B)$
2. $B \to (A \vee B)$
3. $(A \to C) \to \big((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)\big)$

IV

1. $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$
2. $A \to \bar{\bar{A}}$
3. $\bar{\bar{A}} \to A$

V

1. $\forall x F(x) \to F(y)$
2. $F(y) \to \exists x F(x)$

Правила ИП:

1. Правило заключения $\dfrac{\vdash\alpha,\quad \vdash\alpha\to\beta}{\vdash\beta}$.

2. Правило подстановки в переменное высказывание и переменный предикат: *если* α *– выводимая формула ИП (далее – ВФ ИП), то формула, полученная из* α *в результате применения операции замены переменного высказывания или операции замены переменного предиката также будет ВФ ИП.*

3. Правило замены свободной предметной переменной. *Пусть формула* α *является ВФ ИП и формула* α' *получена из* α *заменой любой свободной предметной переменной другой свободной предметной переменной, так что заменяемая переменная заменяется одинаковым образом всюду, где она в формулу* α входит; тогда α' *является ВФ ИП.*

4. Правило переименования связанных предметных переменных. *Если формула* α *является ВФ ИП, то формула* α', *полученная из* α *заменой связанных переменных другими связанными переменными, отличными от всех свободных переменных формулы* α, *также является ВФ ИП. При этом заменяемая связанная переменная в формуле* α *должна заменяться одинаковым образом всюду в области действия квантора, связывающего данную переменную, и в самом кванторе.*

5. Правила связывания квантором

1-е правило $\dfrac{\vdash\beta\to\alpha(x)}{\vdash\beta\to\forall x\alpha(x)}$. **2-е правило** $\dfrac{\vdash\alpha(x)\to\beta}{\vdash\exists x\alpha(x)\to\beta}$.

Правило силлогизма $\dfrac{\vdash(\alpha\to\beta),\quad \vdash(\beta\to\gamma),}{\vdash(\alpha\to\gamma)}$

Правило введения (удаления) конъюнкции $\dfrac{\vdash\alpha,\quad \vdash\beta,}{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)}$ $\dfrac{\vdash(\alpha \,\&\, \beta),}{\vdash\alpha,\quad \vdash\beta}$

Правило перестановки посылок $\dfrac{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{\vdash(\beta\to(\alpha\to\gamma))}$

Правило соединения посылок $\dfrac{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)\to\gamma)}$

Правило разъединения посылок $\dfrac{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)\to\gamma)}{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}$

Производное правило связывания квантором $\dfrac{\vdash\alpha(x)}{\vdash\forall x\alpha(x)}$

5.4. Непротиворечивость исчисления предикатов

Противоречивым называется такое **исчисление**, в котором какая-либо формула доказуема вместе со своим отрицанием.

Теорема 5.1. *Исчисление предикатов непротиворечиво.*

Докажем данную теорему. Рассмотрим формулы с содержательной точки зрения: будем считать, что все предикаты, входящие в формулы, определены на некоторой предметной области Ω.

Если $\Omega = \{a\}$, т.е. состоит только из одного элемента a, то кванторы можно отбросить, так как на данной области:

$$\forall x\alpha(x) = \alpha(a) \text{ и } \exists x\alpha(x) = \alpha(a).$$

Очевидно, что при этом все формулы ИП модно рассматривать как формулы ИВ. При этом все аксиомы ИП будут выводимыми формулами ИВ, а правила ИП преобразуются в правила ИВ.

Если в ИП была выводима формула, являющаяся буквой A, то преобразованная система была бы противоречивой. Но эта система представляет собой ИВ, которое непротиворечиво.

Далее, каждой формуле ИП α поставим в соответствие формулу α^*, которая получается из формулы α, если в ней зачеркнуть все кванторы и удалить ее предметные переменные, оставив от каждого элементарного предиката $F(x, y, \ldots, u)$, входящего в формулу, только букву F.

Например, если α имела такой вид:

$$\big(\forall x(G(x,y)\,\&\,F(x)) \to (R(z,t) \vee A)\big),$$

то α^* имела бы такой вид:

$$\big((G\,\&\,F) \to (R \vee A)\big).$$

Таким образом, каждому предикату из ИП будет поставлено в соответствие высказывание из ИВ. Формулам

$$1)\ \alpha_1\,\&\,\alpha_2;\ 2)\ \alpha_1 \vee \alpha_2;\ 3)\ \alpha_1 \to \alpha_2;\ 4)\ \overline{\alpha}$$

поставим в соответствие формулы

$$1')\ \alpha_1^*\,\&\,\alpha_2^*;\ 2')\ \alpha_1^* \vee \alpha_2^*;\ 3')\ \alpha_1^* \to \alpha_2^*;\ 4')\ \overline{\alpha^*}.$$

Покажем, что *выводимым формулам ИП соответствуют выводимые формулы ИВ*. Доказательство проведем по индукции.

Базовыми выводимыми формулами в ИП являются аксиомы. Рассмотрим их.

Аксиомы групп I–IV совпадают ИП соответствуют аналогичные аксиомы в ИВ. Следовательно этим аксиомам из ИП соответствуют выводимые формулы ИВ.

Обеим же аксиомам группы V соответствует формула

$$F \to F,$$

которая является выводимой формулой в ИВ.

Таким образом, *всем аксиомам ИП соответствуют выводимые формулы ИВ*.

Аксиомы ИП

I

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

II

1. $(A \,\&\, B) \to A$
2. $(A \,\&\, B) \to B$
3. $(A \to B) \to \big((A \to C) \to (A \to (B \,\&\, C))\big)$

III

1. $A \to (A \vee B)$
2. $B \to (A \vee B)$
3. $(A \to C) \to \big((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)\big)$

IV

1. $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$
2. $A \to \bar{\bar{A}}$
3. $\bar{\bar{A}} \to A$

V

1. $\forall x F(x) \to F(y)$
2. $F(y) \to \exists x F(x)$

Остальные выводимые формулы ИП получаются из аксиом с помощью применения к ним правил вывода. Поэтому далее рассмотрим все правила образования формул ИП и докажем, что *они переводят формулы, которым соответствуют выводимые формулы ИВ, в формулы, которым также соответствуют выводимые формулы ИВ*.

Правило заключения в ИП: если α и $\alpha \to \beta$ – выводимые формулы, то и β является выводимой формулой. Но если соответствующие формулы α^* и $\alpha^* \to \beta^*$ – выводимые формулы ИВ, то и формула β^* является выводимой формулой ИВ, так как правило заключения есть и в ИВ.

Правило подстановки в свободную предметную переменную и правило переименования связанной переменной. Если формулы α и α' отличаются одна от другой только предметной переменной, то соответствующие им формулы совпадают между собой. Следовательно, если формуле α исчисления предикатов соответствует выводимая в исчислении высказываний формула α^*, то формуле α', полученной из α переименованием предметных переменных или подстановкой в свободную переменную, соответствует та же выводимая формула α^*.

Например, пусть

$$\alpha = \vdash \big(\forall x(G(x,y)\ \&\ F(x)) \rightarrow \exists x(G(x,y)\ \&\ F(x))\big),$$

$$\alpha' = \vdash \big(\forall u(G(u,z)\ \&\ F(u)) \rightarrow \exists v(G(v,z)\ \&\ F(v))\big).$$

Обеим этим выводимым формулам ИП соответствует одна формула ИВ:

$$\alpha^* = \big((G\ \&\ F) \rightarrow (G\ \&\ F)\big),$$

которая, очевидно, является выводимой в ИВ, т.е.:

$$\alpha^* = \vdash \big((G\ \&\ F) \rightarrow (G\ \&\ F)\big).$$

Правило подстановки в переменное высказывание и переменный предикат. Для сокращения записи операцию подстановки будем изображать следующим образом:

$$R_A^{\beta}(\alpha) \text{ (соответственно } R_{F(\dots)}^{\beta(t_1,\dots,t_n)}(\alpha)),$$

где A представляет собой переменное высказывание, а F – переменный предикат от n переменных, вместо которых в формулу α подставляется формула β. При этом при подставке вместо переменного предиката $F(\dots)$ формула $\beta(t_1, t_2, \dots, t_n)$ в числе своих свободных предметных переменных содержит особо отмеченные переменные $t_1, t_2, \dots, t_n$ число которых равно числу переменных предиката F, т.е. n.

Докажем сначала, что если γ – формула, получившаяся в результате подстановки, при которой в формуле α буква A или же предикат $F(\ldots)$ заменены формулой β, то соответствующая γ формула γ^* получается в результате замены в формуле α^* буквы A или F формулой β^*:

$$[R_A^{\beta}(\alpha)]^* \text{ совпадает с } R_A^{\beta^*}(\alpha^*)$$

$$\text{и } [R_{F(\ldots)}^{\beta(t_1,\ldots,t_n)}(\alpha)]^* \text{ совпадает с } R_F^{\beta^*}(\alpha^*).$$

Это утверждение, очевидно, справедливо, если α – элементарная формула A или F.

Рассмотрим далее операции образования новых формул и докажем по индукции, что если наше утверждение справедливо для формул α_1, α_2, $\alpha(x)$, то оно справедливо и для формул, полученных из этих применением логических операций конъюнкции, дизъюнкции, импликации, отрицания и связывания квантором.

Докажем например, что формула

$$[R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_1 \& \alpha_2)]^* \text{ совпадает с } [R_F^{\beta^*}(\alpha_1^* \& \alpha_2^*),$$

если известно, что наше утверждение справедливо для формул α_1 и α_2. Имеем:

$$[R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_1 \& \alpha_2)]^* = [R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_1) \& R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_2)]^*,$$

а

$$[R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_1) \& R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_2)]^* = [R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_1)]^* \& [R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_2)]^*.$$

В силу индуктивного предположения

$$[R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_1)]^* = R_F^{\beta^*}(\alpha_1^*),\ [R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_2)]^* = R_F^{\beta^*}(\alpha_2^*).$$

Следовательно, $[R_{F(...)}^{\beta(t_1,...,t_n)}(\alpha_1 \& \alpha_2)]^* = [R_F^{\beta^*}(\alpha_1^* \& \alpha_2^*)]$.

Рассмотрим теперь операцию связывания квантором всеобщности. Надо доказать, что

$$[R_{F(\ldots)}^{\beta(t_1,\ldots,t_n)} \forall x \alpha(x)]^* = R_F^{\beta^*} [\forall x \alpha(x)]^* .$$

В самом деле,

$$[R_{F(\ldots)}^{\beta(t_1,\ldots,t_n)} \forall x \alpha(x)]^* = [\forall x R_{F(\ldots)}^{\beta(t_1,\ldots,t_n)} (\alpha(x))]^* = \forall x [R_{F(\ldots)}^{\beta(t_1,\ldots,t_n)} (\alpha(x))]^* .$$

В силу индуктивного предположения

$$[R_{F(\ldots)}^{\beta(t_1,\ldots,t_n)} (\alpha(x))]^* = R_F^{\beta^*} (\alpha^*) ,$$

или, что одно и то же, $\forall x [R_{F(\ldots)}^{\beta(t_1,\ldots,t_n)} (\alpha(x))]^* = R_F^{\beta^*} [\forall x \alpha(x))]^*$,

откуда следует:

$$[R_{F(\ldots)}^{\beta(t_1,\ldots,t_n)} \forall x \alpha(x)]^* = R_F^{\beta^*} [\forall x \alpha(x)]^* ,$$

что и требовалось доказать.

Для остальных логических операций наше утверждение доказывается аналогично.

Пусть теперь γ – формула ИП, полученная из выводимой формулы α в результате подстановки формулы β в $F(\ldots)$ (или в A).

По предположению формуле ИП α соответствует выводимая формула ИВ α^*, а формуле β – формула ИВ β^*.

Но тогда, по доказанному, выводимой формуле ИП γ соответствует формула γ^*, полученная в результате подстановки в выводимую формулу ИВ α^* вместо F (или A) формулы β^*. Следовательно, γ^* также является выводимой формулой ИВ, что и требовалось доказать.

Правила связывания квантором. Пусть $\beta \to \alpha(x)$ – выводимая формула в ИП и β не содержит переменной x. Ей соответствует формула ИВ $\beta^* \to \alpha^*$. Допустим, что эта формула выводима. Формуле

$$\beta \to \forall\alpha(x),$$

которая получена из $\beta \to \alpha(x)$ с помощью правила связывания переменной x квантором всеобщности, соответствует формула

$$\beta^* \to (\forall\alpha(x))^*$$

или, что одно и то же $\qquad \beta^* \to \alpha^*.$

Следовательно, формуле ИП $\beta \to \forall\alpha(x)$ и выводимой по нашему предположению формуле ИП $\beta \to \alpha(x)$ соответствует одна и та же формула ИВ $\beta^* \to \alpha^*$, которая по нашему предположению является выводимой в ИВ.

Аналогично утверждение доказывается для второго правила связывания квантором.

Таким образом, было доказано:

Если выводимым формулам ИП

$$\alpha, \beta, \ldots \tag{5.3}$$

соответствуют выводимые формулы ИВ

$$\alpha^*, \beta^*, \ldots,$$

то формулам, полученным из формул (5.3) *применением правил заключения, подстановки, переименования переменных и связывания квантором, соответствуют формулы, которые также выводимы в ИВ*.

Следовательно, всякой выводимой формуле ИП соответствует выводимая формула ИВ.

Отсюда немедленно следует внутренняя непротиворечивость ИП.

В самом деле, если бы ИП было противоречивым, то в нем всякая формула была бы выводимой. В частности, формула, состоящая из одной буквы *A*, была бы в ней выводимой.

Но тогда соответствующая *A* формула, т.е. она сама, была бы выводимой в ИВ. А это, как известно, неверно, так как ИВ непротиворечиво.

Теперь может возникнуть другой вопрос: *может ли формула ИВ, не являющаяся выводимой в ИВ, быть выводимой в ИП*?

Докажем, что такой формулы не может быть.

Пусть α – формула ИВ, выводимая в ИП; тогда соответствующая ей формула α^* выводима в ИВ. Но так как α – сама формула ИВ, α^* совпадает с α и, значит, α выводима в ИВ, что и требовалось доказать.

Таким образом доказано, что *всякая формула ИВ, выводимая в ИП, является выводимой формулой ИВ*.

5.5. Теорема о дедукции

В исчислении предикатов также рассмотрим теорему о дедукции. В ИП, как и в ИВ, данная теорема позволяет выводить формулы (или доказывать их выводимость) более простым способом, нежели прямой их вывод из аксиом с использованием правил вывода.

Определение **выводимости формул из формулы-гипотезы** α:

1. $\dfrac{\vdash \beta}{\alpha \vdash \beta}$
2. $\alpha \vdash \alpha$
3. $\dfrac{\alpha \vdash \beta_1, \quad \alpha \vdash (\beta_1 \to \beta_2)}{\alpha \vdash \beta_2}$
4. $\dfrac{\alpha \vdash (\beta_1 \to \beta_2(x))}{\alpha \vdash (\beta_1 \to \forall x \beta_2(x))}$, причем β_1 и α не содержат переменной x
5. $\dfrac{\alpha \vdash (\beta_2(x) \to \beta_1)}{\alpha \vdash (\exists x \beta_2(x) \to \beta_1)}$, причем β_1 и α не содержат переменной x

6. Если формула $\alpha \vdash \beta$, то и формула $\alpha \vdash \beta'$, где β' получена из β: любым переименованием связанных переменных, не приводящим к коллизии переменных с α; или подстановкой в свободную предметную переменную, не входящую в α, также выводима из α, если эта подстановка не приводит к коллизии переменных с α; или посредством подстановки в переменное высказывание или переменный предикат, причем это они не содержатся в формуле α, и если, кроме того, подстановка не приводит к коллизии переменных с α.

Теорема 5.2 (теорема о дедукции). *Если формула* β *выводима из формулы* α, *то формула* $\alpha \to \beta$ *выводима в ИП*, т.е.

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\vdash (\alpha \to \beta)}.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы дедукции достаточно показать, что верны следующие утверждения:

a) для любой выводимой в ИП формулы теорема дедукции имеет место;

b) для формулы β, совпадающей с α, она имеет место;

c) если теорема справедлива для формул β_1 и $\beta_1 \to \beta_2$, то она справедлива и для формулы β_2;

d) если теорема справедлива для формулы $\beta_1 \to \beta_2(x)$, причем β_1 и α не содержат переменной x, то она справедлива и для формулы $\beta_1 \to \forall x \beta_2(x)$;

e) если теорема справедлива для формулы $\beta_2(x) \to \beta_1$, причем β_1 и α не содержат переменной x, то она справедлива и для формулы $\exists x \beta_2(x) \to \beta_1$;

f) если теорема справедлива для формулы β, то она справедлива и для любой формулы β', полученной из формулы β любым переименование связанных переменных, не приводящим к коллизии переменных с α, выводима из α;

g) если теорема справедлива для формулы β, то она справедлива и для формула β', полученной из β подстановкой в свободную предметную переменную, не входящую в формулу α, также выводима из α, если эта подстановка не приводит к коллизии переменных с α;

h) если теорема справедлива для формулы β, то она справедлива и для формулы β', полученной из β подстановкой в переменное высказывание или переменный предикат, не содержащиеся в формуле α, при условии, что между α, и β' не возникает коллизии переменных.

Справедливость a) «*для любой выводимой в ИП формулы теорема дедукции имеет место*» следует из того, что по Т. 3.1:

$$\vdash A \to \mathfrak{R},$$

где $\mathfrak{R}$ – произвольная выводимая формула.

Следовательно, если $\vdash \beta$, то $\vdash (\alpha \to \beta)$.

Справедливость b) «*для формулы* β*, совпадающей с* α*, она имеет место*» следует из того, что Т. 3.2:

$$\vdash (A \to A).$$

Докажем с) *«если теорема справедлива для формул β_1 и $\beta_1 \to \beta_2$, то она справедлива и для формулы β_2»*.

Пусть β_1 и $\beta_1 \to \beta_2$ – выводимые из α формулы, т.е.:

$$\alpha \vdash \beta_1 \text{ и } \alpha \vdash (\beta_1 \to \beta_2).$$

Так как для этих формул теорема о дедукции справедлива, то выводимыми будут следующие формулы:

$$\vdash (\alpha \to \beta_1) \quad \text{и} \quad \vdash (\alpha \to (\beta_1 \to \beta_2)).$$

Рассмотрим аксиому А.I.2:

$$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)).$$

Подстановками в эту аксиому получается следующая выводимая в ИП формула:

$$\vdash (\alpha \to (\beta_1 \to \beta_2)) \to ((\alpha \to \beta_1) \to (\alpha \to \beta_2)),$$

применив сложное правило заключения, получим

$$\vdash (\alpha \to \beta_2).$$

Правило заключения

$$\frac{\vdash\alpha, \quad \vdash\alpha\to\beta}{\vdash\beta}$$

Докажем d) «*если теорема справедлива для формулы* $\beta_1 \to \beta_2(x)$, *причем* β_1 *и* α *не содержат переменной* x, *то она справедлива и для формулы* $\beta_1 \to \forall x\beta_2(x)$» .

Для этого допустим, что для выводимой из α формулы $\beta_1 \to \beta_2(x)$ (причем x в β_1 и в α не входит) теорема верна. Это значит, что имеет место

$$\vdash \left(\alpha \to \left(\beta_1 \to \beta_2(x)\right)\right).$$

Тогда по правилу соединения посылок получим

$$\vdash \left(\left(\alpha \,\&\, \beta_1\right) \to \beta_2(x)\right).$$

Применив первое правило связывания квантором, получим:

$$\vdash \left(\left(\alpha \,\&\, \beta_1\right) \to \forall x\beta_2(x)\right).$$

Применив правило разъединения посылок, получим требуемую формулу:

$$\vdash \left(\alpha \to \left(\beta_1 \to \forall x\beta_2(x)\right)\right).$$

Правило соединения посылок	**1-е правило связывания квантором**	**Правило разъединения посылок**
$\dfrac{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)\to\gamma)}$	$\dfrac{\vdash\beta\to\alpha(x)}{\vdash\beta\to\forall x\alpha(x)}$	$\dfrac{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)\to\gamma)}{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}$

Докажем е) «*если теорема справедлива для формулы* $\beta_2(x) \to \beta_1$, *причем* β_1 *и* α *не содержат переменной* x, *то она справедлива и для формулы* $\exists x \beta_2(x) \to \beta_1$».

Для этого допустим, что для выводимой из α формулы $\beta_2(x) \to \beta_1$ (причем x в β_1 и в α не входит) теорема верна. Это значит, что имеет место

$$\vdash \left(\alpha \to \left(\beta_2(x) \to \beta_1\right)\right).$$

По правилу перестановки посылок получим:

$$\vdash \left(\beta_2(x) \to \left(\alpha \to \beta_1\right)\right).$$

Применив второе правило связывания квантором, получим:

$$\vdash \left(\exists x \beta_2(x) \to \left(\alpha \to \beta_1\right)\right).$$

И еще раз применим правило перестановки посылок. В итоге получится выводимая формула:

$$\vdash \left(\alpha \to \left(\exists x \beta_2(x) \to \beta_1\right)\right).$$

Правило перестановки посылок	**2-е правило связывания квантором**
$\dfrac{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{\vdash(\beta\to(\alpha\to\gamma))}$	$\dfrac{\vdash\alpha(x)\to\beta}{\vdash\exists x\alpha(x)\to\beta}$

Справедливость остальных утверждений *f*)–*h*) очевидна.

Таким образом теорема доказано:

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\vdash (\alpha \rightarrow \beta)}.$$

f) если теорема справедлива для формулы β, то она справедлива и для любой формулы β′, полученной из формулы β любым переименование связанных переменных, не приводящим к коллизии переменных с α, выводима из α;

g) если теорема справедлива для формулы β, то она справедлива и для формула β′, полученной из β подстановкой в свободную предметную переменную, не входящую в формулу α, также выводима из α, если эта подстановка не приводит к коллизии переменных с α;

h) если теорема справедлива для формулы β, то она справедлива и для формулы β′, полученной из β подстановкой в переменное высказывание или переменный предикат, не содержащиеся в формуле α, при условии, что между α, и β′ не возникает коллизии переменных.

5.6. Эквивалентные формулы. Приведенные и нормальные формы

Формулы α и β **эквивалентны**, если имеет место

$$\vdash \alpha \sim \beta.$$

Отношение эквивалентности в исчислении предикатов также симметрично и транзитивно:

$$\frac{\alpha \sim \beta, \quad \beta \sim \gamma}{\alpha \sim \gamma} \text{ и } \frac{\alpha \sim \beta}{\beta \sim \alpha}.$$

Утверждение. *Если в формуле ИП α заменить любую часть эквивалентной формулой и если полученное вследствие этой замены выражение α' также является формулой ИП и содержит все свободные предметные переменные формулы α, то α и α' эквивалентны.*

Эквивалентность формул $(\alpha \to \beta)$ и $(\overline{\alpha} \vee \beta)$, т.е. справедливость соотношения

$$\vdash (\alpha \to \beta) \sim (\overline{\alpha} \vee \beta),$$

которое выполняется для ИВ, имеет место и для ИП.

При замене любых частей формулы эквивалентными мы переведем данную формулу в эквивалентную, мы можем исключить знак $\to$ *из формулы, заменив в ней каждую часть вида* $(\alpha \to \beta)$ *формулой* $(\overline{\alpha} \vee \beta)$. *После такой замены мы получим формулу, эквивалентную данной.*

Кроме того, *мы можем для каждой формулы, не содержащей знака* $\to$, *найти такую эквивалентную ей формулу, в которой знаки отрицания относятся только к элементарным частям.*

$$\vdash \overline{\alpha \,\&\, \beta} \sim \overline{\alpha} \vee \overline{\beta},$$
$$\vdash \overline{\alpha \vee \beta} \sim \overline{\alpha} \,\&\, \overline{\beta},$$
$$\vdash \overline{\overline{\alpha}} \sim \alpha.$$

Формулы, не содержащие импликации, и такие формулы, в которых знак отрицания относится только к элементарным частям, называются **приведенными**.

Для каждой формулы α существует эквивалентная ей приведенная формула. Эту формула называется **приведенной формой формулы α.**

Приведенная формула называется **нормальной**, если в последовательности символов, образующих формулу, кванторы предшествуют всем остальным символам.

Утверждение. *Для каждой формулы существует эквивалентная ей нормальная формула*.

При преобразовании формул к нормальному виду можно использовать следующие правила:

a. $\dfrac{\forall x(\alpha \vee \beta(x))}{\alpha \vee \forall x\beta(x)}$, a$^{/}$. $\dfrac{\alpha \vee \forall x\beta(x)}{\forall x(\alpha \vee \beta(x))}$

b. $\dfrac{\forall x(\alpha \,\&\, \beta(x))}{\alpha \,\&\, \forall x\beta(x)}$, b$^{/}$. $\dfrac{\alpha \,\&\, \forall x\beta(x)}{\forall x(\alpha \,\&\, \beta(x))}$

c. $\dfrac{\exists x(\alpha \vee \beta(x))}{\alpha \vee \exists x\beta(x)}$, c$^{/}$. $\dfrac{\alpha \vee \exists x\beta(x)}{\exists x(\alpha \vee \beta(x))}$

d. $\dfrac{\exists x(\alpha \,\&\, \beta(x))}{\alpha \,\&\, \exists x\beta(x)}$, d$^{/}$. $\dfrac{\alpha \,\&\, \exists x\beta(x)}{\exists x(\alpha \,\&\, \beta(x))}$

в предположении, что формула α не содержит x в качестве свободной переменной, а также правила:

$$\frac{\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x)}{\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))},$$

$$\frac{\forall x(\alpha(x) \,\&\, \beta(x))}{\forall x\alpha(x) \,\&\, \forall x\beta(x)}, \qquad \frac{\forall x\alpha(x) \,\&\, \forall x\beta(x)}{\forall x(\alpha(x) \,\&\, \beta(x))},$$

$$\frac{\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x))}{\exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x)},$$

$$\frac{\exists x(\alpha(x) \,\&\, \beta(x))}{\exists x\alpha(x) \,\&\, \exists x\beta(x)}, \qquad \frac{\exists x\alpha(x) \,\&\, \exists x\beta(x)}{\exists x(\alpha(x) \,\&\, \beta(x))}.$$

Нормальная формула, эквивалентная данной формуле α, называется **нормальной формой** формулы α.

5.7. Дедуктивная эквивалентность

Две формулы α и β называются **дедуктивно эквивалентными в исчислении**, если из аксиом этого исчисления и формулы α посредством правил исчисления можно вывести формулу β и, наоборот: из аксиом исчисления и формулы β посредством правил исчисления выводима формула α.

Для исчисления предикатов понятия «эквивалентные формулы» и «дедуктивно эквивалентные» не равнозначны.

Если α и β эквивалентны в исчислении предикатов, то они и дедуктивно эквивалентны.

Обратное утверждение, однако, неверно.

Если α и β эквивалентны в ИП, тогда

$$\vdash (\alpha \sim \beta) \quad \Rightarrow$$

$$\vdash (\alpha \to \beta) \,\&\, (\beta \to \alpha) \quad \Rightarrow$$

$$\vdash (\alpha \to \beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\beta \to \alpha).$$

Тогда можно утверждать, что

$$\alpha \vdash (\alpha \to \beta) \quad \text{и} \quad \beta \vdash (\beta \to \alpha). \quad (*)$$

А из формул α и β, по определению операции выводимости из формул-гипотез, выводимы они же:

$$\alpha \vdash \alpha \quad \text{и} \quad \beta \vdash \beta. \qquad (**)$$

Тогда из (*) и (**) по правилу заключения получаем, что

$$\alpha \vdash \beta \quad \text{и} \quad \beta \vdash \alpha.$$

Отсюда следует, что α выводима β, а из β выводима α, т.е. из эквивалентности формул α и β следует также, что **они и дедуктивно эквиваленты**.

Рассмотрим элементарные формулы (переменные высказывания!) A и B.

Они дедуктивно эквиваленты. В самом деле, если присоединить к аксиомам ИП формулу A, то любая формула, и, в частности B, станет выводимой посредством подстановки в формулу A.

То же самое будет, если присоединить к аксиомам формулу B.

Отсюда следует, что формулы A и B дедуктивно эквивалентны в ИП.

Однако эти формулы не являются эквивалентными, так как формула $(A \sim B)$ не является выводимой в ИП.

Если две формулы дедуктивно эквивалентны, то из того, что одна из них тождественно истинна (выводима), следует, что и другая также тождественно истинна (выводима).

Действительно, пусть α и β – некоторые формулы, которые дедуктивно эквивалентны.

Пусть формулы α является тождественно истинной формулой.

Все формулы, выводимые из тождественно истинных формул, также являются тождественно истинными формулами.

В силу дедуктивной эквивалентности, β выводима из аксиом ИП и формулы α; поэтому β также является тождественно истинной формулой.

Кроме того, если α и β дедуктивно эквивалентны и α – выводима в ИП формула, то β также выводима в ИП. Последнее вытекает из определения дедуктивной эквивалентности.

5.8. Проблема полноты исчисления предикатов

Проблема полноты в узком смысле

Логическая система называется полной в узком смысле, если нельзя без противоречия присоединить к ее аксиомам в качестве новой аксиомы никакую не выводимую в ней формулу так, чтобы полученная при этом система была бы непротиворечивой.

В отличие от ИВ, ***ИП неполно в узком смысле.***

К его аксиомам можно присоединить без противоречия недоказуемую в нем формулу $\exists x F(x) \to \forall x F(x)$. Каждая выводимая формула ИВ имеет выводимый аналог в ИП и может быть присоединена к аксиомам этого исчисления. Рассмотрим выводимую в ИВ формулу $A \to A$. Если предметная область Ω, на котором определен предикат $F(x)$, состоит из одного элемента x, то формула $A \to A$ может быть представлена в ИП формулой $\exists x F(x) \to \forall x F(x)$, которая при данных условиях будет истинной. Очевидно, что она не будет истинной, если Ω будет содержать больше одного элемента.

Полнота в широком смысле

Логическая система полна в широком смысле, если любая тождественно истинная формула в ней доказуема (т.е. выводима).

Теорема Геделя. *Всякая тождественно истинная формула логики предикатов является выводимой в исчислении предикатов.*

Пример 5.16. Вывести формулу

$$\forall x \forall y G(x,y) \to \forall y \forall x G(x,y).$$

№	Формула	Пояснение
1	$\vdash (\forall x F(x) \to F(y))$	A.V.1
2	$\vdash (\forall x \forall v G(x,v) \to \forall v G(y,v))$	подстановка в (1) вместо предиката $F(\ldots)$ формулы $\forall v G(t,v)$ (t – предметная переменная, которая стоит в заменяемом предикате $F(x)$)
3	$\vdash (\forall x G(u,x) \to G(u,y))$	подстановка в (1) вместо предиката $F(\ldots)$ формулы $G(u,t)$ (t – предметная переменная, которая стоит в заменяемом предикате $F(\ldots)$)
4	$\vdash (\forall v G(y,v) \to G(y,u))$	переименование свободных предметных переменных u и y на y и u, соответственно, и связанной x на v
5	$\vdash (\forall x \forall v G(x,v) \to G(y,u))$	правило силлогизма к формулам (2) и (4)
6	$\vdash (\forall x \forall v G(x,v) \to \forall y G(y,u))$	первое правило связывания квантором
7	$\vdash (\forall x \forall v G(x,v) \to \forall u \forall y G(y,u))$	первое правило связывания квантором
9	$\vdash (\forall x \forall y G(x,y) \to \forall y \forall x G(x,y))$	переименование связанных предметных переменных

Правило силлогизма

$$\frac{\vdash(\alpha\to\beta),\ \ \vdash(\beta\to\gamma),}{\vdash(\alpha\to\gamma)}$$

1-е правило связывания квантором

$$\frac{\vdash\beta\to\alpha(x)}{\vdash\beta\to\forall x\alpha(x)}$$

Пример 5.17. Вывести формулу

$$\exists x \forall y F(x,y) \to \forall y \exists x F(x,y).$$

№	Формула	Пояснение
1	$\vdash (\forall x F(x,y) \to F(z,v))$	подстановка в A.V.1 и замена свободных предметных переменных
2	$\vdash (F(z,v) \to \exists w F(w,v))$	подстановка в A.V.2 и замена свободных предметных переменных
3	$\vdash (\forall x F(x,y) \to \exists w F(w,v))$	правило силлогизма к формулам (1) и (2)
4	$\vdash (\exists y \forall x F(x,y) \to \exists w F(w,v))$	второе правило связывания квантором
5	$\vdash (\exists y \forall x F(x,y) \to \forall v \exists w F(w,v))$	первое правило связывания квантором
6	$\vdash (\exists y \forall x F(x,y) \to \forall y \exists x F(x,y))$	переименование связанных предметных переменных

Аксиома A.V.1

$\forall x F(x) \to F(y)$

Аксиома A.V.2

$F(y) \to \exists x F(x)$

Правило силлогизма

$$\frac{\vdash(\alpha\to\beta),\ \ \vdash(\beta\to\gamma),}{\vdash(\alpha\to\gamma)}$$

1-е правило связывания квантором

$$\frac{\vdash\beta\to\alpha(x)}{\vdash\beta\to\forall x\alpha(x)}$$

2-е правило связывания квантором

$$\frac{\vdash\alpha(x)\to\beta}{\vdash\exists x\alpha(x)\to\beta}$$

Пример 5.18. Вывести формулу

$$\forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x F(x) \to \forall x G(x)).$$

Для вывода формулы воспользуемся теоремой о дедукции, поэтому сначала докажем, что:

$$\underbrace{\forall x(F(x) \to G(x))}_{\Gamma} \overset{?}{\vdash} (\forall x F(x) \to \forall x G(x)).$$

№	Формула	Пояснение
1	$\vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (F(y) \to G(y))$	подстановка в A.V.1 вместо предиката $F(x)$ формулы $F(t) \to G(t)$
2	$\Gamma \vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to (F(y) \to G(y))$	определение выводимости формул из формулы-гипотезы
3	$\Gamma \vdash \forall x(F(x) \to G(x))$	определение выводимости формул из формулы-гипотезы
4	$\Gamma \vdash (F(y) \to G(y))$	правило заключения к формулам (2) и (3)
5	$\Gamma \vdash (\forall x F(x) \to F(y))$	определение выводимости формул из формулы-гипотезы и аксиома A.V.1: $\forall x F(x) \to F(y)$

Аксиома A.V.1

$\forall x F(x) \to F(y)$

Правило заключения

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \quad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

№	Формула	Пояснение
6	$\vdash (\forall x F(x) \to F(y)) \to \Big(\big(F(y) \to G(y)\big) \to (\forall x F(x) \to G(y))\Big)$	подстановка в A.I.1
7	$\Gamma \vdash (\forall x F(x) \to F(y)) \to \big(F(y) \to G(y)\big) \to (\forall x F(x) \to G(y))$	определение выводимости формул из формулы-гипотезы
8	$\Gamma \vdash \big(F(y) \to G(y)\big) \to (\forall x F(x) \to G(y))$	правило заключения к формулам (5) и (7)
9	$\Gamma \vdash (\forall x F(x) \to G(y))$	правило заключения к формулам (4) и (8)
10	$\Gamma \vdash (\forall x F(x) \to \forall y G(y))$	1-е правило связывания квантором
11	$\Gamma \vdash (\forall x F(x) \to \forall x G(x))$ или $\forall x(F(x) \to G(x)) \vdash (\forall x F(x) \to \forall x G(x))$	переименование связанной переменной
12	$\vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to \big(\forall x F(x) \to \forall x G(x)\big)$	теорема о дедукции

Формула, которую по заданию требуется вывести: $\forall x(F(x) \to G(x)) \to \big(\forall x F(x) \to \forall x G(x)\big)$

Аксиома A.I.1

$(A \to (B \to A))$

Правило заключения

$$\frac{\Gamma\vdash\alpha, \quad \Gamma\vdash\alpha\to\beta}{\Gamma\vdash\beta}$$

1-е правило связывания квантором

$$\frac{\vdash\beta\to\alpha(x)}{\vdash\beta\to\forall x\alpha(x)}$$

Соотношения, полученные ранее при выводе формулы

$\Gamma \vdash \big(F(y) \to G(y)\big)$ (4)

$\Gamma \vdash (\forall x F(x) \to F(y))$ (5)

Теорема о дедукции

$$\frac{\alpha\vdash\beta}{\vdash(\alpha\to\beta)}$$

Пример 5.19. Вывести формулу

$$\forall x(F(x) \to G(x)) \to \left(\exists xF(x) \to \exists xG(x)\right).$$

Воспользуемся теоремой о дедукции. Сначала докажем, что:

$$\underbrace{\forall x(F(x) \to G(x))}_{\Gamma\ (\text{как в примере 5.18})} \overset{?}{\vdash} \left(\exists xF(x) \to \exists xG(x)\right).$$

№	Формула	Пояснение
1	$\Gamma \vdash \left(F(y) \to G(y)\right)$	см. формулу (4) из примера 5.18
2	$\Gamma \vdash \left(G(y) \to \exists xG(x)\right)$	определение выводимости формул из формулы-гипотезы и аксиома A.V.2 после замены предиката $F(.)$ формулой $G(.)$
3	$\Gamma \vdash \left(F(y) \to \exists xG(x)\right)$	правило силлогизма
4	$\Gamma \vdash \left(\exists yF(y) \to \exists xG(x)\right)$	второе правило связывания квантором
5	$\Gamma \vdash \left(\exists xF(x) \to \exists xG(x)\right)$	переименование связанной переменной
6	$\vdash \forall x(F(x) \to G(x)) \to \left(\exists xF(x) \to \exists xG(x)\right).$	теорема о дедукции

Аксиома A.V.2

$F(y) \to \exists xF(x)$

2-е правило связывания квантором

$$\frac{\vdash \alpha(x) \to \beta}{\vdash \exists x\alpha(x) \to \beta}$$

Правило силлогизма (*доказать самостоятельно*)

$$\frac{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta), \quad \Gamma \vdash (\beta \to \gamma)}{\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma)}$$

Теорема о дедукции

$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\vdash (\alpha \to \beta)}$$

Пример 5.20. Вывести формулу

$$\exists xF(x) \sim \overline{\forall x\overline{F(x)}}.$$

Докажем, по отдельности выводимость следующих формул:

$$\overset{?}{\vdash} \exists xF(x) \to \overline{\forall x\overline{F(x)}} \text{ и } \overset{?}{\vdash} \overline{\forall x\overline{F(x)}} \to \exists xF(x)$$

№	Формула	Пояснение
1	$\vdash \forall x\overline{F(x)} \to \overline{F(y)}$	подстановка в A.V.1 вместо предиката $F(.)$ формулы $\overline{F(.)}$
2	$\vdash (\forall x\overline{F(x)} \to \overline{F(y)}) \to (\overline{\overline{F(y)}} \to \overline{\forall x\overline{F(x)}})$	подстановка в A.IV.1 вместо A и B формул $\forall x\overline{F(x)}$ и $\overline{F(y)}$, соответственно
3	$\vdash (\overline{\overline{F(y)}} \to \overline{\forall x\overline{F(x)}})$	правило заключения к формулам (1) и (2)
4	$\vdash (F(y) \to \overline{\overline{F(y)}})$	подстановка в A.IV.2 вместо A формулы $F(y)$
5	$\vdash (F(y) \to \overline{\forall x\overline{F(x)}})$	правило силлогизма к формулам (3) и (4)
6	$\vdash (\exists yF(y) \to \overline{\forall x\overline{F(x)}})$	второе правило связывания квантором
7	$\vdash (\exists xF(y) \to \overline{\forall x\overline{F(x)}})$	переименование связанной переменной

Аксиома A.V.1
$\forall xF(x) \to F(y)$

Аксиома A.IV.1
$(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$

Аксиома A.IV.2
$A \to \bar{\bar{A}}$

Правило заключения
$$\frac{\Gamma\vdash\alpha, \quad \Gamma\vdash\alpha\to\beta}{\Gamma\vdash\beta}$$

Правило силлогизма
$$\frac{\Gamma\vdash(\alpha\to\beta), \quad \Gamma\vdash(\beta\to\gamma)}{\Gamma\vdash(\alpha\to\gamma)}$$

2-е правило связывания квантором
$$\frac{\vdash\alpha(x)\to\beta}{\vdash\exists x\alpha(x)\to\beta}$$

Докажем обратное следование:

$$\overset{?}{\vdash} \overline{\forall x \overline{F(x)}} \to \exists x F(x)$$

№	Формула	Пояснение
1	$\vdash F(y) \to \exists x F(x)$	A.V.2
2	$\vdash (F(y) \to \exists x F(x)) \to (\overline{\exists x F(x)} \to \overline{F(y)})$	подстановка в A.IV.1 вместо A и B формул $F(y)$ и $\exists x F(x)$, соответственно
3	$\vdash (\overline{\exists x F(x)} \to \overline{F(y)})$	правило заключения к формулам (1) и (2)
4	$\vdash (\overline{\exists x F(x)} \to \forall y \overline{F(y)})$	первое правило связывания кантором
5	$\vdash (\overline{\exists x F(x)} \to \forall x \overline{F(x)})$	переименование связанной переменной
6	$\vdash \left(\overline{\exists x F(x)} \to \forall x \overline{F(x)}\right) \to (\overline{\forall x \overline{F(x)}} \to \overline{\overline{\exists x F(x)}})$	подстановка в A.IV.1 вместо A и B формул $\overline{\exists x F(x)}$ и $\forall x \overline{F(x)}$, соответственно
7	$\vdash (\overline{\forall x \overline{F(x)}} \to \overline{\overline{\exists x F(x)}})$	правило заключения к формулам (5) и (6)
8	$\vdash \left(\overline{\overline{\exists x F(x)}} \to \exists x F(x)\right)$	подстановка в A.IV.3 вместо A формулы $\exists x F(x)$
9	$\vdash (\overline{\forall x \overline{F(x)}} \to \exists x F(x))$	правило силлогизма к формулам (7) и (8)

Аксиома A.V.2
$F(y) \to \exists x F(x)$

Аксиома A.IV.1
$(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$

Аксиома A.IV.3
$\bar{\bar{A}} \to A$

Правило заключения
$$\frac{\Gamma \vdash \alpha, \quad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta}$$

Правило силлогизма
$$\frac{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta), \quad \Gamma \vdash (\beta \to \gamma)}{\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma)}$$

1-е правило связывания квантором
$$\frac{\vdash \beta \to \alpha(x)}{\vdash \beta \to \forall x \alpha(x)}$$

Мы доказали, что выводимы следующие формулы:

$$\vdash \exists x F(x) \rightarrow \overline{\forall x \overline{F(x)}} \text{ и } \vdash \overline{\forall x \overline{F(x)}} \rightarrow \exists x F(x).$$

Тогда по правилу введения конъюнкции $\left(\frac{\vdash\alpha,\ \ \vdash\beta,}{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)}\right)$ выводимой будет формула:

$$\vdash \exists x F(x) \sim \overline{\forall x \overline{F(x)}}.$$

Вывести самостоятельно следующие формулы:

1. $\forall x (F(x) \sim G(x)) \rightarrow \big(\exists x F(x) \sim \exists x G(x)\big)$
2. $\forall x (F(x) \sim G(x)) \rightarrow \big(\forall x F(x) \sim \forall x G(x)\big)$
3. $\exists x \overline{F(x)} \sim \overline{\forall x F(x)}$
4. $\overline{\exists x F(x)} \sim \forall x \overline{F(x)}$
5. $\overline{\exists x \overline{F(x)}} \sim \forall x F(x)$

Вопросы для самопроверки

1. *Какие символы используются для записи выражений в исчислении предикатов?*
2. *Дайте определение формулы в исчислении предикатов.*
3. *Дайте определение частей формулы.*
4. *Перечислите аксиомы исчисления предикатов.*
5. *Сформулируйте правило заключения в исчислении предикатов.*
6. *Сформулируйте правило подстановки в переменное высказывание и переменный предикат.*
7. *Сформулируйте правило замены свободной предметной переменной.*
8. *Сформулируйте правило переименования связанных предметных переменных.*
9. *Сформулируйте правила связывания кванторами.*
10. *Докажите, что исчисление предикатов является непротиворечивым.*
11. *Дайте определение выводимости формулы из набора формул.*
12. *Сформулируйте теорему дедукции в исчислении предикатов.*
13. *Какие формулы в исчислении предикатов называются эквивалентными?*
14. *Какие формулы в исчислении предикатов называются приведенными?*
15. *Какие формулы в исчислении предикатов называются нормальными?*
16. *Какие две формулы называются дедуктивно эквивалентными?*
17. *Как связаны понятия «эквивалентные формулы» и «дедуктивно эквивалентные формулы»?*
18. *Какая формула называется нормальной формулой Сколема?*
19. *Полно ли исчисление предикатов в узком смысле?*
20. *Полно ли исчисления предикатов в широком смысле?*