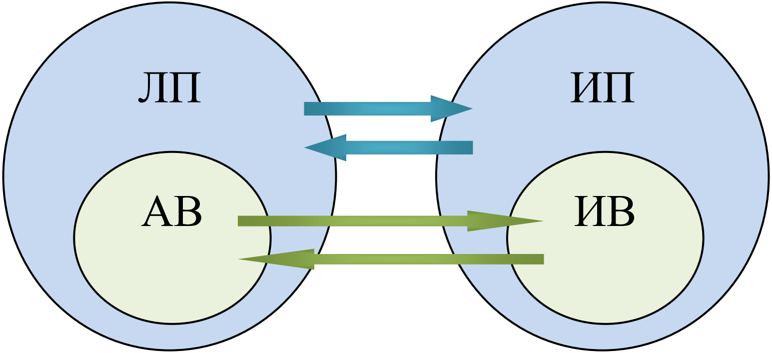
5. ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ

Исчисление предикатов – *формальная аксиоматическая теория*, которая предназначена для описания логических законов, справедливых для любой непустой области объектов с произвольными заданными на этих объектах предикатами.



Как и всякая аксиоматическая система, исчисление предикатов содержит символы, из которых составляются формулы.

Затем среди всех формул выделяются формулы, называемые выводимыми.

Для этого указываются некоторая конечная совокупность формул, которые называются аксиомами, и правила вывода, позволяющие из выводимых формул получать новые выводимые формулы.

Формальная система считается заданной, если:

1) задан **алфавит**;

2) определено, какие именно выражения считать **формулами** (остальные строки считаются просто бессмысленными);

3) выделено множество **аксиом**;

4) задано множество **правил вывода**.

5.1. Символы исчисления предикатов (далее – ИП)

Алфавит исчисления предикатов

- **Малые латинские буквы конца алфавита *x, y, z, …***
  (для обозначения **предметных переменных**, т.е. неопределенных элементов области)
- **Малые латинские буквы начала алфавита *a, b, c, …***
  (для обозначения **предметных постоянных**, или **индивидуальных предметов**)
- **Заглавные латинские буквы *A, B, C, …***
  (для обозначения простых высказываний)
- **$F(x)$, $G(x, y)$, $P(x_1, \ldots, x_n)$, …**
  (для обозначения **переменных предикатов**, т.е. функций, аргументы которых принимают значения из области Ω, а сами функции могут принимать только два значения: 1 и 0
- **Символы & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\overline{}$ (инверсия), $\rightarrow$ (импликация), $\forall$(квантор всеобщности), $\exists$ (существований)**
  (для обозначения **операций**, с помощью которых формируются сложные высказывания)
- **Круглые скобки** (для указания приоритета операций)

Определение формулы ИП:

1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.

2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.

3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.

4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.

5° Если α – формула ИП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.

6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Формулы, определенные в п. 1° и 2°, называются **элементарными формулами ИП.**

Примечание: Из определения видно, что все формулы ИВ также являются формулами ИП.

Символы $\forall$ и $\exists$ называются **кванторами всеобщности** и квантором **существования**, соответственно.

Переменная x в формулах $\forall x\alpha$ и $\exists x\alpha$ называется **связанной переменной.**

Переменные, которые не связаны кванторами, называются **свободными**.

Из п. 3° и 4° определения формулы ИП следует:

а) *в формуле свободные и связанные переменные должны быть обозначены разными буквами;*

б) *если какой-либо квантор находится в области действия другого квантора, то переменные, связанные этими квантами, должны быть обозначены разными буквами.*

Нарушения этих условий называется **коллизией переменных**.

3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.

4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.

Вопрос: является ли формулами следующие выражения

1) $A \to G(x, y)$
2) $\bar{A} \& (B \to (C \vee A))$
3) $F(x, y, z)$
4) $\overline{F(x)}$
5) B

Определение формулы ИП:
1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.
2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.
3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x \alpha(x)$ и $\exists x \alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.
4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \& \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.
5° Если α – формула ЛП, то выражение $\bar{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.
6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Ответ: Все выражения являются формулами ИП.

Вопрос: является ли формулой следующее выражение

$$F(x) \to \exists x G(x, y)?$$

Определение формулы ИП:

1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.

2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.

3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x \alpha(x)$ и $\exists x \alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.

4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \& \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.

5° Если α – формула ЛП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.

6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Пример 5.1. Проверить, является ли формулой следующее выражение

$$F(x) \to \exists x G(x, y).$$

В данном слове присутствуют два предиката – $F(x)$ и $G(x, y)$. По определению (см. п. 2°) данные выражения являются формулами ИП:

$$\alpha_1 = F(x); \ \alpha_2 = G(x, y).$$

Так как переменная x в формуле α_2 свободная, то по определению (п. 3°) из нее можно получить формулу:

$$\alpha_3 = \exists x G(x, y).$$

В формулу α_1 предметная переменная x входит свободно, а в формуле α_3 переменная x связана квантором $\exists$. Это нарушает условия п. 4°.

Определение формулы ИП:
1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.
2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.
3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.
4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.
5° Если α – формула ЛП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.
6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Следовательно, выражение $F(x) \to \exists x G(x, y)$ **не является формулой ИП**.

Вопрос: является ли формулой следующее выражение

$$\forall x(F(y) \to \exists x G(x, y))?$$

Определение формулы ИП:

1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.

2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.

3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x \alpha(x)$ и $\exists x \alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.

4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.

5° Если α – формула ЛП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.

6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Пример 5.2. Проверить, является ли формулой следующее выражение

$$\forall x(F(y) \to \exists x G(x, y)).$$

В данном слове присутствуют два предиката – $F(y)$ и $G(x, y)$. По определению формулы ИП (см. п. 2°) данные выражения являются формулами ИП:

$$\alpha_1 = F(y);\ \alpha_2 = G(x, y).$$

Так как переменная x в формуле α_2 свободная, то по определению (п. 3°) из нее можно получить формулу:

$$\alpha_3 = \exists x G(x, y).$$

Из формул α_1 и α_3 по п. 4° можно получить формулу:

$$\alpha_4 = F(y) \to \exists x G(x, y).$$

Однако получить из α_4 новую формулу, в которой переменная x будет связана квантором $\forall$, нельзя, так как по п. 3° для этого переменная x в формуле α_4 должна быть свободной, а она в ней связана квантором $\exists$.

Следовательно, слово $\forall \boldsymbol{x}(F(y) \to \exists \boldsymbol{x} G(\boldsymbol{x}, y))$ **не является формулой ИП**.

Определение формулы ИП:
1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.
2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.
3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.
4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.
5° Если α – формула ЛП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.
6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Вопрос: является ли формулой следующее выражение

$$\forall x F(x) \to \exists x G(x, y)?$$

Определение формулы ИП:

1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.

2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.

3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.

4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \& \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.

5° Если α – формула ЛП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.

6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Пример 5.3. Проверить, является ли формулой следующее выражение
$$\forall x F(x) \to \exists x G(x,y).$$
В данном слове присутствуют два предиката – $F(x)$ и $G(x,y)$. По определению формулы ИП (см. п. 2°) данные выражения являются формулами ИП:
$$\alpha_1 = F(x);\ \alpha_2 = G(x,y).$$
Так как переменная x в формуле α_1 свободная, то по определению (п. 3°) из нее можно получить формулу:
$$\alpha_3 = \forall x F(x).$$
Так как переменная x в формуле α_2 свободная, то по определению (п. 3°) из нее можно получить формулу:
$$\alpha_4 = \exists x G(x,y).$$

Определение формулы ИП:
1° Каждое переменное высказывание есть формула ИП.
2° Каждый переменный предикат есть формула ИП.
3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ИП, в которую предметная переменная x входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ИП, причем перемена x в них входит связано.
4° Если α и β – формулы ИП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ИП.
5° Если α – формула ЛП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ИП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.
6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ИП нет.

Из формул α_3 и α_4 по п. 4°, так как в них обеих переменна x связана кванторами, а переменная y присутствует свободно только в формуле α_4, можно получить формулу: $\alpha_5 = \forall x F(x) \to \exists x G(x,y)$.
Следовательно, выражение $\forall x F(x) \to \exists x G(x,y)$ **является формулой ИП**.

Выражения из примеров 5.2 и 5.3 похожи, только первое – не является формулой, а второе – является формулой.

$$\forall x(F(y) \to \exists x G(x,y)) \qquad \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \to \exists \boldsymbol{x} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Что изменилось? Кроме того, что у предиката F заменили обозначение предметной переменной, изменилась область (часть формулы), на которую распространяется действие квантора $\forall$.

Для дальнейшего изложения материала необходимо определить, что является «областью действия квантор» и что такое «часть формулы».

Областью действия квантора называется часть формулы, на которую распространяется действие квантора.

Пример 5.4. Для формулы $\exists x(F(x) \to \forall y G(y,z))$:

1) переменные x связана квантором $\exists$, переменная у связана квантором $\forall$, переменная z – свободная;
2) областью действия квантора $\exists$, связывающего переменную x, является формула $(F(x) \to \forall y G(y,z))$;
3) областью действия квантора $\forall$, связывающего переменную y, – предикат $G(y, z)$;

$$\exists x\overbrace{(F(x) \to \forall y \underbrace{G(y,z)}_{\text{Область действия квантора } \forall})}^{\text{Область действия квантора } \exists}$$

Определение понятия «часть формулы»:

1° Частью элементарной формулы является она сама.

2° Частью формулы $\forall x\alpha$ (или $\exists x\alpha$) является сама формула и всякая часть формулы α.

3° Частями формул $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ и $(\alpha \to \beta)$ являются сами эти формулы и все части формул α и β.

4° Частями формулы $\overline{\alpha}$ является сама эта формула и все части формулы α.

Пример 5.5. Выписать все части формулы $\exists x(F(x) \to \forall yG(y, z))$.

Частями данной формулы являются следующие выражения:

1) $G(y, z)$
2) $F(x)$
3) $\forall yG(y, z)$
4) $F(x) \to \forall yG(y, z)$
5) $\exists x(F(x) \to \forall yG(y, z))$

Из определения части формулы ИП и приведенного примера видно, что **каждая из частей любой формулы ИП является формулой ИП**.

Исчисление предикатов является формальной аксимоматической системой.

Согласно теории, формальная аксиоматическая теория считается определенной, если выполнены следующие условия:

1. Задан язык теории.

2. Определено понятие формулы этой теории.

3. Выделено некоторое множество формул, называемых аксиомами.

4. Определены правила вывода в этой теории.

5.2. Аксиомы исчисления предикатов

I

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$

II

1. $(A \,\&\, B) \to A$
2. $(A \,\&\, B) \to B$
3. $(A \to B) \to \big((A \to C) \to (A \to (B \,\&\, C))\big)$

III

1. $A \to (A \vee B)$
2. $B \to (A \vee B)$
3. $(A \to C) \to \big((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)\big)$

IV

1. $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$
2. $A \to \bar{\bar{A}}$
3. $\bar{\bar{A}} \to A$

Аксиомы исчисления высказываний

V

1. $\forall x F(x) \to F(y)$
2. $F(y) \to \exists x F(x)$

5.3. Правила образования выводимых формул

1. Правило заключения. *Если* α *и* $\alpha \to \beta$ *– выводимые формулы ИП, то* β *– также выводимая формула ИП:*

$$\frac{\vdash \alpha, \vdash \alpha \to \beta}{\vdash \beta}.$$

Символ $\vdash$ так же, как и в ИВ, будет использоваться для обозначения выводимых формул.

Пример 5.6. С помощью правила заключения доказать, что выводима формула $\vdash \left(\overline{F(y)} \to \overline{\forall x F(x)}\right)$;

Имеем следующие выводимые формулы:

$$\vdash (\forall x F(x) \to F(y)); \qquad \vdash (\forall x F(x) \to F(y)) \to \left(\overline{F(y)} \to \overline{\forall x F(x)}\right)$$

(первая из них является аксиомой A.V.1, вторая получается из A.IV.1). Применим к ним правило заключения:

$$\frac{\vdash (\forall x F(x) \to F(y));\ \ \vdash (\forall x F(x) \to F(y)) \to \left(\overline{F(y)} \to \overline{\forall x F(x)}\right)}{\vdash \left(\overline{F(y)} \to \overline{\forall x F(x)}\right)}.$$

Следовательно, формула$\left(\overline{F(y)} \to \overline{\forall x F(x)}\right)$ является выводимой в ИП.

Введем в рассмотрение две операции замены элементарных формул ИП. Согласно определению, элементарными формулами в ИП являются переменные высказывания и переменные предикаты.

Операция замены: переменного высказывания. Пусть формула $\alpha(A)$ содержит переменное высказывание A. Тогда все вхождения переменного высказывания A в формулу α можно заменить любой формулой β, если последняя удовлетворяет следующим условиям:

1) *свободные переменные в формуле* β *обозначены буквами, отличными от связанных переменных в формуле* α*, и связанные переменные в формуле* β *– буквами, отличными от свободных переменных в формуле* α;

2) *если переменное высказывание* A *в формуле* α *находится в области действия квантора, связывающего некоторую переменную, то эта переменная не входит в формулу* β.

Такая замена называется *подстановкой формулы* β *в формулу* α *вместо переменного высказывания* A.

Пример 5.7. Пусть $\alpha(A)$ есть формула

$$\forall x(A \vee \exists z F(x, y, z))$$

В данной формуле предметные переменные x и z являются связанными кванторами, а переменная y – свободной.

Для удовлетворения первого условия, в формуле β свободные переменные не должны быть обозначены буквами x и z (так как они в формуле $\alpha(A)$ являются связанными), а среди связанных переменных не должно быть y.

Для удовлетворения второго условия, в формуле β не должно быть предметной переменной x (так как в формуле $\alpha(A)$ заменяемое переменное высказывание находится в области действия квантора $\forall$, который связывает предметную переменную x)

Тогда A можно, например, заменить следующей формулой β:

$$\forall z \forall t(A \,\&\, G(z, t) \,\&\, F(t, y, z)).$$

Полученное в результате такой замены слово

$$\forall x(\forall z \forall t(A \,\&\, G(z, t) \,\&\, F(t, y, z)) \vee \exists z F(x, y, z))$$

является формулой ИП.

Операция замены переменного предиката. Пусть формула $\alpha(F)$ содержит переменный предикат F от n переменных и пусть имеется формула $\beta(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, содержащая n свободных переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (вообще говоря, может содержать и другие переменные), где $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – буквы, отличные от всех предметных переменных формулы α, и удовлетворяющая следующим условиям:

1) *свободные переменные в формуле* β *обозначены буквами, отличными от связанных переменных в формуле* α*, и связанные переменные в формуле* β *– буквами, отличными от свободных переменных в* α;

2) *если* F *в формуле* α *находится в области действия квантора, связывающего какую-либо переменную, то эта переменная не входит в формулу* β.

Тогда возможна подстановка формулы β в α вместо предиката F.

Операция подстановки формулы $\beta(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ в формулу $\alpha(F)$ вместо $F(\ldots)$ представляет собой замену каждой элементарной формулы вида $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – какие-то переменные, не обязательно различные), входящей в $\alpha(F)$, выражением, полученным из формулы β **переименованием переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$** буквами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответственно. При этом должно быть четко указано, на каком месте в $F(\ldots)$ должна стоять каждая из переменных $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

Пример 5.8. Пусть формула α имеет вид

$$\forall x \exists y \exists z \big(F(x, y) \vee \overline{F(x, z)}\big).$$

Требуется произвести подстановку, заменив F формулой

$$\forall u \exists v (H(u, t_1) \vee H(v, t_2)).$$

Пусть при этом 1-е место в $F(\ldots)$ соответствует переменной t_1, а 2-е – переменной t_2. Условия 1) и 2) здесь выполнены. Тогда в результате замены предиката $F(\ldots)$ из формулы

$$\forall x \exists y \exists z \big(F(x, y) \vee \overline{F(x, z)}\big)$$

получится формула

$$\forall x \exists y \exists z \big(\forall u \exists v (H(u, x) \vee H(v, y)) \vee \overline{\forall u \exists v (H(u, x) \vee H(v, z))}\big).$$

2. Правило подстановки в переменное высказывание и переменный предикат: *если α – выводимая формула ИП, то формула, полученная из α в результате применения операции замены переменного высказывания или операции замены переменного предиката также будет выводимой формулой ИП.*

Пример 5.9. Вывести формулу $F(x) \to F(x)$.

Рассмотрим формулу $A \to A$. Выводимость данной формулы было доказано в рамках исчисления высказываний:

$$\vdash A \to A.$$

Данная формула не имеет ни свободных, не связанных предметных переменных, поэтому мы можем заменить переменное высказывание A на формулу $F(x)$. В результате получим выводимую формулу:

$$\vdash (F(x) \to F(x)).$$

Пример 5.10. Вывести формулу

$$\forall x(G(x,y)\ \&\ F(x)) \to \exists x(G(x,y)\ \&\ F(x)).$$

Ранее нами была выведена формула (см. пример 5.6):

$$\vdash (\forall x F(x) \to \exists x F(x)).$$

В данной формуле заменим предикат $F(x)$ формулой

$$\beta(t) = G(t,y)\ \&\ F(t).$$

В этой формуле при подстановке ее в исходную формулу место предметной переменной t займет предметная переменная x. В результате получим выводимую формулу:

$$\vdash \big(\forall x(G(x,y)\ \&\ F(x)) \to \exists x(G(x,y)\ \&\ F(x))\big).$$

Замечание к применению этого правила. Мы можем заменить любое высказывание и любой предикат (т.е. любую **элементарную (неделимую) формулу**) любой формулой, если замена не приводит к коллизии переменной. Но наоборот, т.е. заменить любую составную (сложную) формулу переменным высказыванием или переменным предикатом **в общем случае нельзя**!

К примеру, рассмотрим аксиому А.II.1 $(A \& B) \to A$, которая очевидно является **выводимой формулой** и в ИП, и в исчислении высказываний (ИВ). Эта формула кроме всего прочего, будучи рассмотренной в рамках алгебры высказываний (АВ) является тождественно истинной формулой. Мы доказали ранее, что все выводимые формулы ИВ являются тождественно истинными формулами (тавтологиями), если их рассматривать в АВ.

Если заменить формулу $(A \& B)$ например на высказывание B. То получится такая формула:

$$B \to A,$$

которая очевидно **не является выводимой**, так как не является тождественно истинной.

Внимательно читайте правила, не подменяйте понятия и не вырывайте из контекста. Тогда задачи будут решены правильно.

3. Правило замены свободной предметной переменной. *Пусть формула* α *является выводимой формулой ИП и формула* α' *получена из* α *заменой любой свободной предметной переменной другой свободной предметной переменной, так что заменяемая переменная заменяется одинаковым образом всюду, где она в формулу* α входит; тогда α' *является выводимой формулой ИП.*

Пример 5.11. Рассмотрим выводимую формулу из примера 5.10

$$\vdash \big(\forall x(G(x,y)\ \&\ F(x)) \to \exists x(G(x,y)\ \&\ F(x))\big).$$

В этой формуле одна свободная предметная переменная – y. Произведем замену этой свободной переменной, подставив вместо нее переменную z. Получим выводимую формулу

$$\vdash \big(\forall x(G(x,z)\ \&\ F(x)) \to \exists x(G(x,z)\ \&\ F(x))\big).$$

Переменная y была заменена на z всюду, где она входила в формулу.

Нельзя заменить переменную y переменной x, так как эта переменная в нашей формуле является связанной кванторами, свободную переменную y можно заменить только свободной переменной.

4. Правило переименования связанных предметных переменных. *Если формула α является выводимой формулой ИП, то формула α', полученная из α заменой связанных переменных другими связанными переменными, отличными от всех свободных переменных формулы α, также является выводимой формулой. При этом заменяемая связанная переменная в формуле α должна заменяться одинаковым образом всюду в области действия квантора, связывающего данную переменную, и в самом кванторе.*

Таким образом, согласно этому правилу связанные предметные переменные заменяются одинаковым образом только в кванторе и в области действия квантора, в другом кванторе, связывающем эту же переменную и в его области действия переменную можно заменить другой буквой или ее можно и не менять.

Пример 5.12. Рассмотрим выводимую формулу из примера 5.10

$$\vdash \big(\forall x(G(x,y) \,\&\, F(x)) \to \exists x(G(x,y) \,\&\, F(x))\big).$$

В этой формуле одна связанная предметная переменная – x. Причем в области действия кванторов $\forall$ и $\exists$ разные. Поэтому в области действия квантора $\forall$ и в самом кванторе заменить предметную переменную x например переменной z, то получится выводима формула:

$$\vdash \big(\forall z(G(z,y) \,\&\, F(z)) \to \exists x(G(x,y) \,\&\, F(x))\big).$$

Можно при этом также в области действия квантора $\exists$ и в самом кванторе заменить предметную переменную x например переменной w, то получится выводима формула:

$$\vdash \big(\forall z(G(z,y) \,\&\, F(z)) \to \exists w(G(w,y) \,\&\, F(w))\big).$$

Можно во всей исходной формуле заменить предметную переменную x везде, где она входит, другой переменной, например, u. В результате получим выводимую формулу:

$$\vdash \big(\forall u(G(u,y) \,\&\, F(u)) \to \exists u(G(u,y) \,\&\, F(u))\big).$$

5. Правила связывания квантором

Первое правило связывания квантором. *Если формулы* $\beta \to \alpha(x)$ *выводима в исчислении предикатов и* β *не содержит переменной x, то формула* $\beta \to \forall x\alpha(x)$ *также выводима в исчислении предикатов, т.е.*

$$\frac{\vdash \beta \to \alpha(x)}{\vdash \beta \to \forall x\alpha(x)}.$$

Второе правило связывания квантором. *Если формула* $\alpha(x) \to \beta$ *выводима в исчислении предикатов и* β *не содержит переменной x, то формула* $\exists x\alpha(x) \to \beta$ *также выводима в исчислении предикатов, т.е.*

$$\frac{\vdash \alpha(x) \to \beta}{\vdash \exists x\alpha(x) \to \beta}.$$

Пример 5.13. Вывести формулу

$$\exists x(F(x) \mathbin{\&} G(y)) \to G(y).$$

Рассмотрим аксиому II.2:

$$\vdash ((A \mathbin{\&} B) \to B).$$

В эту формулу подставим вместо высказывания A предикат $F(x)$, а вместо B – $G(y)$. Получим выводимую формулу:

$$\vdash [(F(x) \mathbin{\&} G(y)) \to G(y)].$$

И, наконец, к последней формуле применим 2-е правило связывания квантором:

$$\vdash [\exists x(F(x) \mathbin{\&} G(y)) \to G(y)].$$

Второе правило связывания квантором:

$$\frac{\vdash \alpha(x) \to \beta}{\vdash \exists x \alpha(x) \to \beta}.$$

Примечания

1. *Среди выводимых формул ИП находятся все выводимые формулы ИВ*.

2. *Всякая формула, выведенная из аксиом по правилам ИП, является тождественно истинной формулой в содержательном смысле*.

Согласно примечанию, в ИП для получения выводимых формул можно использовать все введенные в ИВ производные (составные правила) – правило силлогизма, введения конъюнкции, перестановки посылок и др.

Правило силлогизма $\dfrac{\vdash(\alpha\to\beta),\quad \vdash(\beta\to\gamma)}{\vdash(\alpha\to\gamma)}$.

Правило введения конъюнкции $\dfrac{\vdash\alpha,\ \vdash\beta}{\vdash(\alpha\,\&\,\beta)}$.

Имеет место и обратное правило: $\dfrac{\vdash(\alpha\,\&\,\beta)}{\vdash\alpha,\ \vdash\beta}$.

Правило перестановки посылок $\dfrac{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{\vdash(\beta\to(\alpha\to\gamma))}$.

Правило соединения посылок $\dfrac{\vdash\alpha\to(\beta\to\gamma)}{\vdash(\alpha\,\&\,\beta)\to\gamma}$.

Правило разъединения посылок $\dfrac{\vdash(\alpha\,\&\,\beta)\to\gamma}{\vdash\alpha\to(\beta\to\gamma)}$.

Пример 5.14. С помощью правила силлогизма доказать, что выводима формула $\forall x F(x) \to \exists x F(x)$.

Имеем следующие выводимые формулы:

$$\vdash (\forall x F(x) \to F(y)); \qquad \vdash (F(y) \to \exists x F(x))$$

(первая из них является аксиомой A.V.1, вторая – A.V.2). Применим к ним правило силлогизма:

$$\frac{\vdash(\forall x F(x) \to F(y));\ \ \vdash(F(y) \to \exists x F(x))}{\vdash(\forall x F(x) \to \exists x F(x))}.$$

Следовательно, формула $\forall x F(x) \to \exists x F(x)$ является выводимой в ИП.

Введем в ИП еще одно производное правило.

Производное правило связывания квантором, которое формулируется следующим образом: *если в ИП выводима формула* $\alpha(x)$, *то в ИП также выводима формула* $\forall x \alpha(x)$:

$$\frac{\vdash \alpha(x)}{\vdash \forall x \alpha(x)}.$$

Пример 5.15. Вывести формулу

$$\forall x \forall y [F(x) \to (G(y) \to F(x))].$$

Рассмотрим аксиому I.1: $\vdash (A \to (B \to A))$.

После подстановки вместо высказывания A предикат $F(x)$, а вместо B – $G(y)$, получим выводимую формулу:

$$\vdash [F(x) \to (G(y) \to F(x))].$$

Применим дважды производное правило связывания квантором, последовательно получим:

$$\vdash \forall y [F(x) \to (G(y) \to F(x))], \quad \vdash \forall x \forall y [F(x) \to (G(y) \to F(x))].$$

Аксиомы ИП

I

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

II

1. $(A \,\&\, B) \to A$
2. $(A \,\&\, B) \to B$
3. $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \,\&\, C)))$

III

1. $A \to (A \vee B)$
2. $B \to (A \vee B)$
3. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

IV

1. $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$
2. $A \to \bar{\bar{A}}$
3. $\bar{\bar{A}} \to A$

V

1. $\forall x F(x) \to F(y)$
2. $F(y) \to \exists x F(x)$

Правила ИП:

1. Правило заключения $\dfrac{\vdash\alpha, \ \vdash\alpha\to\beta}{\vdash\beta}$.

2. Правило подстановки в переменное высказывание и переменный предикат: *если* α *– выводимая формула ИП (далее – ВФ ИП), то формула, полученная из* α *в результате применения операции замены переменного высказывания или операции замены переменного предиката также будет ВФ ИП.*

3. Правило замены свободной предметной переменной. *Пусть формула* α *является ВФ ИП и формула* α' *получена из* α *заменой любой свободной предметной переменной другой свободной предметной переменной, так что заменяемая переменная заменяется одинаковым образом всюду, где она в формулу* α входит; тогда α' *является ВФ ИП.*

4. Правило переименования связанных предметных переменных. *Если формула* α *является ВФ ИП, то формула* α'*, полученная из* α *заменой связанных переменных другими связанными переменными, отличными от всех свободных переменных формулы* α*, также является ВФ ИП. При этом заменяемая связанная переменная в формуле* α *должна заменяться одинаковым образом всюду в области действия квантора, связывающего данную переменную, и в самом кванторе.*

5. Правила связывания квантором

1-е правило $\dfrac{\vdash\beta\to\alpha(x)}{\vdash\beta\to\forall x\alpha(x)}$. **2-е правило** $\dfrac{\vdash\alpha(x)\to\beta}{\vdash\exists x\alpha(x)\to\beta}$.

Правило силлогизма $\dfrac{\vdash(\alpha\to\beta), \ \vdash(\beta\to\gamma),}{\vdash(\alpha\to\gamma)}$

Правило введения (удаления) конъюнкции $\dfrac{\vdash\alpha, \ \vdash\beta,}{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)}$ $\dfrac{\vdash(\alpha \,\&\, \beta),}{\vdash\alpha, \ \vdash\beta}$

Правило перестановки посылок $\dfrac{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{\vdash(\beta\to(\alpha\to\gamma))}$

Правило соединения посылок $\dfrac{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)\to\gamma)}$

Правило разъединения посылок $\dfrac{\vdash(\alpha \,\&\, \beta)\to\gamma)}{\vdash(\alpha\to(\beta\to\gamma))}$

Производное правило связывания квантором $\dfrac{\vdash\alpha(x)}{\vdash\forall x\alpha(x)}$