# 4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Рассмотрим следующее известное умозаключение:

*Каждый человек смертен.*
*Сократ человек,*
*следовательно, он смертен.*

Данное умозаключение интуитивно корректно (истинно).

Если данное умозаключение записать на языке алгебры высказываний (АВ), введя следующие обозначения:

$$A = \{\text{Каждый человек смертен}\};\ B = \{\text{Сократ является человеком}\};$$
$$C = \{\text{Сократ смертен}\},$$

то получим формулу

$$(A \,\&\, B) \to C,$$

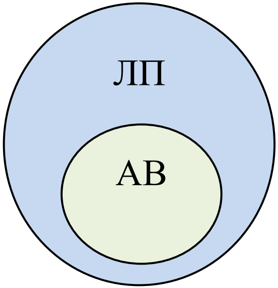
которая не является истинной в АВ.

Указанное противоречие имеет место потому, что в АВ не рассматривается структура высказываний $A$, $B$ и $C$.

В связи с этим возникает необходимость в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках АВ рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является логика предикатов (ЛП).

**ЛП содержит в себе всю АВ** (т.е. элементарные высказывания, рассматриваемые как величины, которые принимают два значения 1 и 0, все операции алгебры высказываний и все ее формулы).



В ЛП уже имеется расчленение высказываний на субъект и предикат.

**Субъект** (букв. – подлежащее, хотя оно может играть также роль дополнения) – *это то, о чем что-то утверждается в высказывании*.

**Предикат** (букв. – сказуемое, хотя оно может играть также роль определения) – *это, что утверждается о субъекте*.

В высказывании «Москва является столицей России»: «Москва» – это субъект, «*x* является столицей России» – предикат.

В высказывании «число 9 делится на число 3»: «число 9» и «число 3» – субъекты, «*x* делится на *y*» – предикат.

## 4.1. Понятие предиката

Все понятия, которые вводятся в ЛП, относятся всегда к некоторому произвольному множеству $\Omega$, которое называется **предметной областью**, или просто **областью**.

Пример 4.1. Субъект «*Москва*» может быть отнесен к множествам:

$\Omega_1$ – множество всех городов мира,

$\Omega_2$ – множество всех городов России,

$\Omega_3$ – множество всех столиц мира и др.

Субъект «*число x*»:

$\Omega_4$ – множество натуральных чисел,

$\Omega_5$ – множество неотрицательных чисел и др.

**Одноместным предикатом $F(x)$** называется произвольная функция переменного предмета $x$, определенная на множестве $\Omega$ и принимающая значения 1 и 0.

Множество всех элементов $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1 («истина»), называется **множеством истинности предиката $P(x)$:**

$$I_P = \{x\colon x \in \Omega,\ P(x) = 1\}.$$

Пример 4.2. Пусть предикат $P(x)$ – «*x – простое число*» определен на множестве натуральных чисел **N**, тогда множество $I_P$ для него – множество всех простых чисел.

Предикат $F(x)$ – «*Диагонали параллелограмма x перпендикулярны*» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

Обычно одноместные предикаты определяют свойство предмета.

**Двухместным предикатом $P(x, y)$** называется функция двух переменных предметов $x$ и $y$, определенная на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ и принимающая значения 1 и 0.

Пример 4.3. Двухместные предикаты:

$Q(x, y)$ – «$x = y$» предикат равенства, определенный на множестве $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$;

$F(x, y)$ – «прямая $x$ параллельна прямой $y$», определенный на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.

Обычно двухместные предикаты характеризуют отношения предметов друг к другу.

Аналогично определяется *n-местный предикат*.

Говорят, что *предикаты* $P(x)$ и $Q(x)$ *равносильны*, если $I_Q = I_P$.

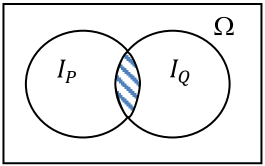
## 4.2. Логические операции над предикатами

Пусть на некотором множестве $\Omega$ определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

**Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$** называется новый предикат $(P(x)\ \&\ Q(x)) = 1$ при $x \in \Omega$, при которых каждый из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение 1, и принимает значение 0 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката:

$$I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q.$$




Пример 3.4. Пусть даны предикаты, определенные на множестве **N** (натуральных чисел):

$P(x)$: «$x$ – четное число» и $Q(x)$: «$x$ кратно 3».

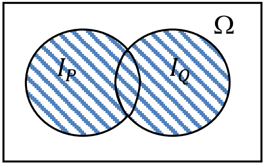
Так как $I_P = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $I_Q = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$, имеем:

$$I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q = \{6, 12, \ldots, 6n, \ldots\}.$$

**Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$** называется новый предикат $(P(x) \vee Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых каждый из предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ принимает значение 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката:

$$I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q.$$




Пример 3.5. Пусть даны предикаты, определенные на множестве **N** (натуральных чисел):

$P(x)$: «$x$ – четное число» и $Q(x)$: «$x$ кратно 3».

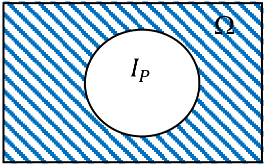
Так как $I_P = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $I_Q = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$, имеем:

$$I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 3, 4, 6, \ldots, 2n, 3n, \ldots\}.$$

**Отрицанием предиката $P(x)$** называется новый предикат $\overline{P}(x)$, который принимает значение 1 при всех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 0, и принимает значение 0 при тех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1.

Область истинности предиката:

$$I_{\overline{P}} = CI_P = \Omega \setminus I_P.$$




Пример 3.6. Пусть дан предикат, определенный на множестве **N** (натуральных чисел):

$P(x)$: «$x$ – четное число».

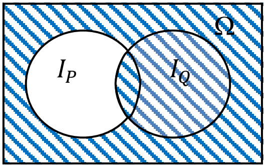
Так как $I_P = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, имеем:

$$I_{\overline{P}} = \mathbf{N} \setminus I_P = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}.$$

**Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$** называется новый предикат $(P(x) \to Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение 1, а $Q(x)$ – 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката:

$$I_{P \to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q = (\Omega \setminus I_P) \cup I_Q.$$




Пример 3.7. Пусть даны предикаты, определенные на множестве **N** (натуральных чисел):

$P(x)$: «$x$ – четное число» и $Q(x)$: «$x$ кратно 3».

Так как $I_P = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$, $I_Q = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$, имеем:

$$I_{P \to Q} = (\mathbf{N} \setminus I_P) \cup I_Q = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\} \cup \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$$

## Кванторные операции

### 1. Квантор всеобщности

Пусть $R(x)$ – вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента $x$ некоторой области $\Omega$. Тогда под выражением

$$\forall x R(x)$$

будет подразумеваться *высказывание истинное, когда* $R(x)$ *истинно* ***для каждого элемента x*** *области* $\Omega$ *и ложно в противном случае*.

Полученное сложное высказывание от $x$ уже не зависит.

Соответствующее ему словесное выражение будет: «для всякого $x$ $R(x)$ истинно».

Символ $\forall$ называется **квантором всеобщности**.

2. **Квантор существования**

Пусть $R(x)$ – некоторый предикат. Определим формулу

$$\exists x R(x)$$

как истинную, если **существует *x*** в области $\Omega$, для которого $R(x)$ истинно, и как ложную в противном случае.

Знак $\exists$ называется **квантором существования**.

Записи вида $\exists x$ и $\forall x$ говорят, что **переменная *x* связана соответствующим квантором**.

Предметная переменная, не связанная никаким квантором, будет называться **свободной переменной**.

## Приведем примеры использования кванторов

Пусть на множестве $\boldsymbol{N}$ задан предикат

$$P(x)\text{: «Число } x \text{ кратно 3».}$$

Тогда:

$$\forall x P(x)\text{: «Все натуральные числа кратны 3»;}$$

$$\exists x P(x) \text{ – «Существуют натуральные числа } x\text{, которые кратны 3».}$$

Очевидно, что $\forall x P(x) = 0$, а $\exists x P(x) = 1$.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам.

Пусть на множестве $\Omega$ определен двухместный предикат $P(x, y)$. Применение кванторной операции к предикату по переменной $x$ ставит в соответствие этому предикату $P(x, y)$ с двумя свободными переменными $x$ и $y$ предикат $\forall x P(x, y)$ (или $\exists x P(x, y)$) с одной свободной переменной $y$. К полученным предикатам можно применить кванторные операции по переменной $y$, которые приведут к высказываниям следующих видов:

$$\forall y \forall x P(x, y),\ \exists y \forall x P(x, y),\ \forall y \exists x P(x, y),\ \exists y \exists x P(x, y).$$

Пример 4.4. Рассмотрим предикат $P(x, y)$ = «$y$ является делителем $x$», который определен на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$. Применение кванторах операций к предикату $P(x, y)$ приведет к восьми возможным высказываниям:

$\forall y \forall x P(x, y)$ – «Любое натуральное число $y$ является делителем любого натурального числа $x$».

$\exists y \forall x P(x, y)$ – «Существует натуральное число $y$, которое является делителем всякого натурального числа $x$».

$\forall y \exists x P(x, y)$ – «Любое натуральное число $y$ является делителем некоторого натурального числа $x$».

$\exists y \exists x P(x, y)$ – «Существует натуральное число $y$, которое является делителем некоторого натурального числа $x$».

$\forall x \forall y P(x, y)$ – «Любое натуральное число $x$ делится без остатка на любое натуральное число $y$».

$\forall x \exists y P(x, y)$ – «Любое натуральное число $x$ делится без остатка на некоторое натуральное число $y$».

$\exists x \exists y P(x, y)$ – «Некоторое натуральное число $x$ делится без остатка на некоторое натуральное число $y$».

$\exists x \forall y P(x, y)$ – «Некоторое натуральное число $x$ делится без остатка на любое натуральное число $y$».

Очевидно, что высказывания 1, 5 и 8 ложны, а 2, 3, 4, 6 и 7 – истинны.

# 4.3. Символы логики предикатов

## Алфавит логики предикатов

- **Малые латинские буквы конца алфавита *x*, *y*, *z*, …**
  (для обозначения **предметных переменных**, т.е. неопределенных элементов области)
- **Малые латинские буквы начала алфавита *a*, *b*, *c*, …**
  (для обозначения **предметных постоянных**, или **индивидуальных предметов**)
- **Заглавные латинские буквы *A*, *B*, *C*, …**
  (для обозначения простых высказываний)

  Из АВ
- **$F(x)$, $G(x, y)$, $P(x_1, …, x_n)$, …**
  (для обозначения **переменных предикатов**, т.е. функций, аргументы которых принимают значения из области $\Omega$, а сами функции могут принимать только два значения: 1 и 0
- **Символы & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\overline{\phantom{x}}$ (инверсия), $\to$ (импликация), $\sim$ (эквивалентность), $\forall$(квантор всеобщности), $\exists$ (существований)**
  (для обозначения **операций**, с помощью которых формируются сложные высказывания)

  час-тично из АВ
- **Скобки** (для указания приоритета операций), **запятые** (для разделения предметов)

## 4.4. Определение формулы логики предикатов

**Определение формулы ЛП**:

**1°** Каждое переменное высказывание есть формула ЛП.

2° Каждый переменный предикат есть формула ЛП.

3° Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ЛП, в которую предметная переменная $x$ входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ЛП, причем перемена $x$ в них входит связано.

**4°** Если $\alpha$ и $\beta$ – формулы ЛП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \,\&\, \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ЛП.

**5°** Если $\alpha$ – формула ЛП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ЛП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.

6° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-5, в ЛП нет.

Формулы, определенные в п. 1° и 2°, называются **элементарными формулами ЛП.**

Пример 4.5. Пусть $P(x)$ и $Q(x, y)$ – одноместный и двухместный предикаты, соответственно, а $A$, $B$ – переменные высказывания, то формулами будут слова:

$$A, \ P(x), \qquad (P(x)\&Q(x)), \qquad (\forall x P(x) \to \exists x Q(x,y)), \qquad \left(\overline{Q(x,y)} \vee B\right)$$

Не является формулами выраженияо:

$$\forall x Q(x,y) \to P(x),$$

так как здесь нарушено условие п. 3, так как в формулу $\forall x Q(x,y)$ переменная $x$ входит связанно, а в формулу $P(x)$ переменная $x$ входит свободно;

$$\forall x, y(Q(x,y) \to P(x)),$$

так как определение записи $\forall x, y$ в ЛП нет. Получается, что операция связывания квантором $\forall$ по переменной $x$ была применена к выражению

$$, y(Q(x,y) \to P(x)),$$

которое очевидно не является формулой ЛП.

Из определения формулы логики предикатов ясно, что **всякая формула АВ является формулой ЛП**.

Формулы ЛП называются **открытыми**, если они содержат свободные предметные переменные.

Формулы ЛП называются **замкнутыми**, если они не содержащие свободных предметных переменных.

Например, следующие формулы являются открытыми:

$$\exists x(P(x, y, z) \sim Q(x, y)),$$

$$\forall y \exists x(P_1(x, y, z) \vee (P_2(x) \rightarrow P_3(x))).$$

В первой формуле не связаны предметные переменные $y$ и $z$, а во второй – $z$.

Формулы

$$\forall x \exists y \forall z \left(P_1(x, y, z) \vee P_2(x, z)\right),$$

$$\forall x \exists y \left(P(x, y) \rightarrow (A \rightarrow G(y))\right)$$

являются замкнутыми.

## 4.5. Интерпретация формул

**Логическое значение формулы ЛП зависит от предметной области $\Omega$,** на котором определены входящие в формулу предикаты.

Кроме этого, **для определения значения формулы ЛП** необходимо знание:

1) значений, входящих в формулу переменных высказываний;
2) значений свободных предметных переменных из множества $\Omega$;
3) значений предикатных переменных.

Преобразование формулы ЛП в высказывание (а также само получаемое высказывание) называется **интерпретацией** этой формулы на множестве $\Omega$.

### Интерпретация замкнутой формулы

Интерпретация сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов, в результате чего формула превращается в конкретное высказывание (нульместный предикат).

Пример 4.6. Дать интерпретации формуле $\forall x \exists y P(x, y)$.

Формула не имеет свободных переменных, следовательно, она замкнута.

Пусть $\Omega$ – множество всех мужчин, предикат $P(x, y)$ = «$x$ есть отец $y$», определенный на $\Omega$.

Тогда

$$\forall x \exists y P(x, y) = \text{«каждого мужчины есть сын»}.$$

Следовательно, в данной интерпретации формула ложна.

Пусть $\Omega$ – множество $\boldsymbol{N}$, а предикат $P(x, y)$ = «$x < y$», определенный на $\boldsymbol{N}^2$.

Тогда получим истинное высказывание $\forall x \exists y P(x, y)$ = «*Для любого натурального числа существует большее по сравнению с ним натуральное число*».

### Интерпретация открытой формулы

Интерпретация состоит из двух этапов:

1) вместо всех предикатных переменных необходимо подставить конкретные предикаты, в результате чего формула превратится в конкретный предикат, зависящий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле;

2) каждой предметной переменной необходимо придать значение, от которого зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат (и, значит, вся исходная формула) превратится в конкретное высказывание (истинное или ложное).

Пример 4.7. Дать интерпретацию формуле $\alpha$:

$$\exists z\big(P(x, y, z) \to Q(x, y, z)\big) \to A.$$

Данная формула содержит свободные переменные $x$ и $y$ – она открыта.

Пусть $\Omega$ – множество $\boldsymbol{N}$;

$$P(x, y, z) = «x \cdot y = z»;\ Q(x, y, z) = «x + y = z»;\ A = «2 = 4».$$

$$\exists z\big(P(x, y, z) \to Q(x, y, z)\big) = 1,$$

так как всегда можно найти такое натуральное число $k$, что $m \cdot n \neq k$ и $m + n \neq k$, при котором высказывания $m \cdot n = k$ и $m + n = k$ будут ложными, а высказывание $(m \cdot n = k) \to (m + n = k)$ – истинным).

Тогда

$$\exists z\big(P(x, y, z) \to Q(x, y, z)\big) \to A = 0.$$

так как посылка формулы истинна, а ее заключение ложно.

Если в данной интерпретации в качестве высказывания $A$ взять истинное высказывание (например, $A = «2 = 2»$), то формула превратится в истинное высказывание.

## 4.6. Равносильные формулы логики предикатов

Две формулы $\alpha$ и $\beta$, отнесенные к некоторой предметной области $\Omega$, которые при всех заменах переменных предикатов, переменных высказываний и свободных предметных переменных соответственно индивидуальными предикатами, определенными на $\Omega$, индивидуальными высказываниями и индивидуальными предметами из $\Omega$ принимают одинаковые значения 1 или 0, называются **равносильными на области $\Omega$.**

Пример 4.8. На области $\Omega$, содержащей только один предмет, равносильными будут формулы: $F(x)$, $\forall x F(x)$, $\exists x F(x)$.

Две формулы, равносильные на любых предметных областях $\Omega$, называются **просто равносильными**.

Как и в АВ, равносильные формулы могут быть заменены одна другой.

Так как ЛП является расширением АВ, все законы равносильности последней истинны и в этой системе.

**Основные равносильности алгебры высказываний**

| | | |
|---|---|---|
| $A = A$ | (1.1) | закон тождества |
| $A \,\&\, \overline{A} = 0$ | (1.2) | закон непротиворечия |
| $A \vee \bar{A} = 1$ | (1.3) | закон исключенного третьего |
| $A = \bar{\bar{A}}$ | (1.4) | закон двойного отрицания |
| $A \vee A = A$<br>$A \,\&\, A = A$ | (1.5)<br>(1.5*) | законы идемпотентности |
| $A \vee B = B \vee A$<br>$A \,\&\, B = B \,\&\, A$ | (1.6)<br>(1.6*) | законы коммутативности |
| $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$<br>$A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C$ | (1.7)<br>(1.7*) | законы ассоциативности |
| $A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$<br>$A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$ | (1.8)<br>(1.8*) | законы дистрибутивности |
| $A \vee (A \,\&\, B) = A$<br>$A \,\&\, (A \vee B) = A$ | (1.9)<br>(1.9*) | законы поглощения |
| $\overline{A \vee B} = \bar{A} \,\&\, \bar{B}$<br>$\overline{A \,\&\, B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ | (1.10)<br>(1.10*) | законы де Моргана |

| | | |
|---|---|---|
| $\bar{0} = 1$<br>$\bar{1} = 0$ | (1.11)<br>(1.11*) | отрицание лжи<br>отрицание истины |
| $A \vee 0 = A$<br>$A \vee 1 = 1$ | (1.12)<br>(1.12*) | прибавление 0<br>прибавление 1 |
| $A \mathbin{\&} 0 = 0$<br>$A \mathbin{\&} 1 = A$ | (1.13)<br>(1.13*) | умножение на 0<br>умножение на 1 |
| $A \to B = (\bar{A} \vee B)$<br>$A \sim B = (A \to B) \mathbin{\&} (B \to A)$ | (1.14)<br>(1.14*) | исключение импликации |
| $A \vee (\bar{A} \mathbin{\&} B) = A \vee B$<br>$A \mathbin{\&} (\bar{A} \vee B) = A \mathbin{\&} B$ | (1.15)<br>(1.15*) | |
| $\bar{A} \vee (A \mathbin{\&} B) = \bar{A} \vee B$<br>$\bar{A} \mathbin{\&} (A \vee B) = \bar{A} \mathbin{\&} B$ | (1.16)<br>(1.16*) | |

Согласно перечисленным законам равносильными будут, например, следующие формулы ЛП:

$$F(x) \to G(y,z) = \left(\overline{F(x)} \vee G(y,z)\right)$$
$$P(x) \mathbin{\&} (Q(z) \vee A) = (P(x) \mathbin{\&} Q(z)) \vee (P(x) \mathbin{\&} A)$$

К ним добавляются равносильности, связанные с кванторами:

$$\overline{\forall x\alpha(x)} = \exists y\overline{\alpha(y)}\,; \tag{4.1}$$

$$\overline{\exists x\alpha(x)} = \forall y\overline{\alpha(y)}\,. \tag{4.2}$$

Пример 4.8. Преобразовать формулу $\overline{\exists x(A(x)\to\forall yB(y))}$.

$$\overline{\exists x(A(x)\to\forall yB(y))} \overset{(4.2)}{=} \forall x\overline{(A(x)\to\forall yB(y))} \overset{(1.14)}{=}$$

$$=\forall x\overline{(\overline{A(x)}\vee\forall yB(y))} \overset{(1.10),(1.4)}{=} \forall x(A(x)\,\&\,\overline{\forall yB(y)}) \overset{(4.1)}{=}$$

$$=\forall x(A(x)\,\&\,\exists y\overline{B(y)}).$$

Использованные формулы:

| | |
|---|---|
| $A = \bar{\bar{A}}$ | (1.4) |
| $\overline{A \vee B} = \bar{A}\,\&\,\bar{B}$ | (1.10) |
| $A \to B = (\bar{A} \vee B)$ | (1.14) |

**Теорема 4.1.** *Имеют место следующие равносильности:*

$$\forall x\alpha(x) \vee \beta = \forall x\big(\alpha(x) \vee \beta\big)\,; \tag{4.3}$$

$$\forall x\alpha(x)\ \&\ \beta = \forall x\big(\alpha(x)\ \&\ \beta\big)\,; \tag{4.4}$$

$$\exists x\alpha(x)\ \&\ \beta = \exists x\big(\alpha(x)\ \&\ \beta\big)\,; \tag{4.5}$$

$$\exists x\alpha(x) \vee \beta = \exists x\big(\alpha(x) \vee \beta\big), \tag{4.6}$$

где формула $\beta$ не содержит свободной переменной $x$, а в формуле $\alpha$, переменная $x$ связана соответствующим квантором.

**Теорема 4.2.** *Имеют место следующие равносильности:*

$$\forall x\alpha(x)\ \&\ \forall x\beta(x) = \forall x\big(\alpha(x)\ \&\ \beta(x)\big)\,; \tag{4.7}$$

$$\exists x\big(\alpha(x) \vee \beta(x)\big) = \exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x)\,. \tag{4.8}$$

В заключение отметим, что:

$$\forall x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \neq \forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x)$$

$$\exists x(\alpha(x) \& \beta(x)) \neq \exists x\alpha(x) \& \exists x\beta(x).$$

Однако справедливы следующие равносильности:

$$\begin{aligned} &\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x) = \forall x\alpha(x) \vee \forall y\beta(y) = \\ &= \forall x(\alpha(x) \vee \forall y\beta(y)) = \forall x\forall y(\alpha(x) \vee \beta(y)); \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} &\exists x\alpha(x) \,\&\, \exists x\beta(x) = \exists x\alpha(x) \,\&\, \exists y\beta(y) = \\ &= \exists x(\alpha(x) \,\&\, \forall y\beta(y)) = \exists x\exists y(\alpha(x) \,\&\, \beta(y)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Пример 4.9. Преобразовать формулу $\forall x\exists yP(x,y) \vee \overline{\exists x\forall yQ(x,y)}$

$$\forall x\exists yP(x,y) \vee \overline{\exists x\forall yQ(x,y)} \overset{(4.1),(4,2)}{=} \forall x\exists yP(x,y) \vee \forall x\exists y\overline{Q(x,y)} =$$

$$\forall x\exists yP(x,y) \vee \forall z\exists y\overline{Q(z,y)} \overset{(4.9)}{=} \forall x\left(\exists yP(x,y) \vee \forall z\exists y\overline{Q(z,y)}\right) \overset{(4.9)}{=}$$

$$= \forall x\forall z\left(\exists yP(x,y) \vee \exists y\overline{Q(z,y)}\right) \overset{(4.8)}{=} \forall x\forall z\exists y\left(P(x,y) \vee \overline{Q(z,y)}\right).$$

## 4.7. Приведенные и нормальные формулы

**Приведенными формулами** называются формулы, в которых используются только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем знак отрицания относится только к элементарным предикатам и высказываниям.

**Теорема 4.3.** *Для каждой формулы существует равносильная ей приведенная формула.* □

Приведенная формула, равносильная формуле $\alpha$, называется *приведенной формой* формулы $\alpha$.

Для облегчения анализа сложных формул ЛП рекомендуется приводить их к нормальной форме. Если в АВ приняты две нормальные формы (ДНФ – дизъюнктивная и КНФ – конъюнктивная), то в ЛП – одна предваренная нормальная форма (ПНФ), суть которой сводится к разделению формулы на две части: кванторную и безкванторную.

Приведенная форма формулы $\alpha$ называется **предваренной нормальной формой (ПНФ)** формулы $\alpha$, если она не содержит кванторов или если при образовании ее из элементарных формул операции связывания квантором следуют за всеми операциями алгебры высказываний.

В записи ПНФ кванторы, если они есть, предшествуют всем остальным логическим символам. Например, приведенная формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

нормальна, если $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не содержит кванторов (!).

**Теорема 4.4.** *Для каждой формулы существует равносильная ей ПНФ.*

Пример 4.10. Преобразовать к ПНФ формулу

$$\overline{\exists x(A(x) \to \forall y B(y))}.$$

$$\overline{\exists x\big(A(x) \to \forall y B(y)\big)} \overset{(4.2)}{=} \forall x\big(\overline{A(x) \to \forall y B(y)}\big) \overset{(1.14)}{=}$$

$$=\forall x\left(\overline{\overline{A(x)} \vee \forall y B(y)}\right) \overset{(1.4),(1.10)}{=} \forall x\big(A(x) \& \overline{\forall y B(y)}\big) \overset{(4.1)}{=}$$

$$= \forall x\big(A(x) \& \exists y \overline{B(y)}\big) \overset{(4.5)}{=} \forall x \exists y\big(A(x) \& \overline{B(y)}\big).$$

Использованные формулы:

| | |
|---|---|
| $A = \bar{\bar{A}}$ | (1.4) |
| $\overline{A \vee B} = \bar{A} \,\&\, \bar{B}$ | (1.10) |
| $A \to B = (\bar{A} \vee B)$ | (1.14) |
| $\overline{\forall x \alpha(x)} = \exists x \overline{\alpha(x)}$ | (4.1) |
| $\overline{\exists x \alpha(x)} = \forall x \overline{\alpha(x)}$ | (4.2) |
| $\exists x \alpha(x) \,\&\, \beta = \exists x(\alpha(x) \,\&\, \beta)$ | (4.5) |

## 3.7. Выполнимость и общезначимость формул

Формула логики предикатов называется **выполнимой**, если она истинна для некоторой области $\Omega$ и некоторых предикатов, на ней определенных.

Формула логики предикатов называется **тождественно истинной для области $\Omega$**, если она истинна для данной области $\Omega$ и для всех предикатов, определенных на $\Omega$.

Формула логики предикатов называется **общезначимой** (или **тождественно истинной**, или просто **истинной**), если она истинна для всякой области $\Omega$ и для всяких предикатов.

Формула называется **ложной**, или **невыполнимой**, если ни для какой области ни при каких заменах предикатов не является истинной.

Пример 4.11. Доказать, что формула $\exists xP(X)$ выполнима.

Для доказательства выполнимости формулы достаточно найти такую ее интерпретацию (т.е. задать область $\Omega$ и некоторый предикат, на ней определенный), которая принимает значение 1.

В качестве области $\Omega$ рассмотрим множество натуральных чисел $\mathbf{N}$, а предикат $P(x)$ = «$x$ – четное число». Интерпретация данной формулы принимает значение 1.

Следовательно, формула $\exists xP(X)$ является выполнимой.

Пример 4.12. Доказать, что формула $\forall x \exists y P(x, y)$ выполнима, но не общезначима.

Пусть $\Omega = \mathbf{N}$ (множество натуральных чисел). Определим предикат так:

$$P\ (x,\ y) = «x < y».$$

Тогда данная интерпретация формулы $\forall x \exists y P(x, y)$ будет тождественно истинная (действительно, для любого натурального числа существует большее него натуральное число), и, следовательно, сама формула – выполнима в этой области.

При этом, если рассматривать предикат $P\ (x,\ y) = «x < y»$ в конечной области, например $\Omega = \{0, 1, 2\ , \ldots, 9\}$, то формула превратиться в ложную. А этот факт можно рассматривать как «контрпример» при доказательстве того, что данная формула не общезначима.

Пример 4.13. Доказать, что формула $\exists x \exists y \left( P(x) \& \overline{P(y)} \right)$ выполнима, но не общезначима.

Пусть $\Omega = \mathbf{N}$, а $P(x)$ = «$x$ – *четное число*». Так как, действительно, на множестве натуральных чисел существуют такие пары чисел, из которых одно четное (что даст нам истинность $P(x)$), а другое – нечетное (что даст нам истинность $\overline{P(y)}$), следовательно, на множестве натуральных чисел формула $\exists x \exists y \left( P(x) \& \overline{P(y)} \right)$ выполнима.

Однако, если предикат $P(x)$ = «$x$ – *четное число*» рассматривать на множестве $\Omega$, совпадающим с множеством нечетных натуральных чисел, то интерпретация формулы принимает значение ложь. Следовательно, формула $\exists x \exists y \left( P(x) \& \overline{P(y)} \right)$ не является общезначимой.

Пример 4.14. Доказать (общезначимость) тождественную истинность формулы $\forall x\left(P(x) \vee \overline{P(x)}\right)$.

Данная формула будет тождественно истинной в любой области, так как по законам алгебры высказываний $P(x) \vee \overline{P(x)} = 1$. Значит она является общезначимой.

Пример 4.15. Доказать невыполнимость формулы

$$\forall x\left(P(x) \& \overline{P(x)}\right).$$

Данная формула будет тождественно ложна в любой области, так как по законам алгебры высказываний $P(x) \& \overline{P(x)} = 0$. Значит, она является невыполнимой.

Пример 4.16. Доказать общезначимость формулы

$$\overline{\exists x P(x)} \to \overline{\forall x P(x)}$$

Доказывать будем *от противного*. Предположим, что в некоторой области $\Omega$ и для некоторых определенных на ней предикатов формула ложна:

$$\overline{\exists x P(x)} \to \overline{\forall x P(x)} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \overline{\exists x P(x)} = 1; \\ \overline{\forall x P(x)} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x P(x) = 0; \\ \forall x P(x) = 1. \end{cases}$$

Одновременное выполнение последних этих двух условий невозможно, следовательно, получили противоречие, следовательно, формула $\overline{\exists x P(x)} \to \overline{\forall x P(x)}$ тождественно истинна, или общезначима.

Пример 4.17. Доказать общезначимость формулы

$$\forall x\left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right) \to \left(\overline{\exists x P(x) \& \forall x Q(x)}\right).$$

$$\forall x\left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right) \to \left(\overline{\exists x P(x) \& \forall x Q(x)}\right) \overset{(1.14)}{=}$$

$$= \overline{\forall x\left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right)} \vee \left(\overline{\exists x P(x) \& \forall x Q(x)}\right) \overset{(1.14)}{=}$$

$$= \overline{\forall x\left(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}\right)} \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \overset{(4.1)}{=}$$

$$= \exists x\left(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}\right) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \overset{(1.10)}{=}$$

$$= \exists x\left(\overline{\overline{P(x)}} \,\&\, \overline{\overline{Q(x)}}\right) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \overset{(1.4),(1.6)}{=}$$

$$= \exists x\left(P(x) \,\&\, Q(x)\right) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \overset{(4.8)}{=}$$

$$= \exists x\left(\left(P(x) \,\&\, Q(x)\right) \vee \overline{Q(x)}\right) \vee \overline{\exists x P(x)} \overset{(1.16)}{=}$$

$$= \exists x\left(P(x) \vee \overline{Q(x)}\right) \vee \overline{\exists x P(x)} \overset{(4.8),(1.6)}{=}$$

$$= \exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \overset{(1.3)}{=}$$

$$= 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} = 1.$$

## 4.6. Проблема разрешимости в логике предикатов

Постановка проблемы разрешимости для ЛП аналогична постановке этой проблемы для АВ. Она ставится следующим образом: *указать единственный эффективный способ (алгоритм) для определения по произвольной формуле, выполнима она или нет.*

Решение вопроса о выполнимости влечет за собой и решение вопроса об истинности любой формулы. Действительно, если формула $\alpha$ истинна, то формула $\overline{\alpha}$ невыполнима, и наоборот. Поэтому, проверив выполнимость или невыполнимость $\alpha$ и $\overline{\alpha}$, можно определить тождественную истинность $\alpha$.

Проблема разрешения для ЛП является обобщением проблемы разрешения для АВ, так как все формулы АВ входят в состав формул ЛП. Однако в то время как решение проблемы разрешения для АВ никаких трудностей не представляет (*мы знаем, что значения формул АВ вычислить несложно, например, с помощью построения таблицы истинности*), проблема разрешения для ЛП оказалась связанной с серьезными трудностями.

Только в 30-х гг. XX в. в математической логике после точного определения понятия алгоритма появилась возможность доказать, что *проблема разрешимости для ЛП неразрешима*, т.е. искомый в этой проблеме алгоритм невозможен. Это впервые было доказано А. Чёрчем.

Для некоторых частных типов формул, однако, проблема разрешимости решается. Рассмотрим наиболее важный тип формул, для которых решение проблемы разрешимости может быть осуществлено.

### Проблема разрешимости для формул ЛП, определенных на конечных множествах

Если формула ЛП рассматривается на конечном множестве, то вместо ее предикатных переменных могут подставляться конкретные предикаты, определенные на этом конечном множестве.

Действительно, на произвольном конечном множестве, содержащем ровно $n$ элементов $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, формулы $\forall xQ(x)$ и $\exists xQ(x)$ равносильны, соответственно, формулам:

$$\forall xQ(x) = Q(x_1) \,\&\, Q(x_2) \,\&\, ...Q(x_n);$$

$$\exists xQ(x) = Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee ... \vee Q(x_n).$$

Таким образом, операции связывания кванторами на конечных множествах заменяются конъюнкцией или дизъюнкцией, а задача о выполнимости или тождественной истинности формулы ЛП на конечном множестве сводятся к задаче о выполнимости или общезначимости некоторой формулы АВ. Мы уже ранее установили, что проблема разрешимости для АВ эффективно решается.

Пример 4.18. Проверить выполнимость (или тождественную истинность) формулы $\forall y \exists x(\overline{P(x,y)} \,\&\, P(y,y))$ на конечном двухэлементном множестве $\{a, b\}$.

На этом множестве рассматриваемая формула равносильна формуле:

$$\exists x[\overline{P(x,a)} \,\&\, P(a,a)] \,\&\, \exists x[\overline{P(x,b)} \,\&\, P(b,b)],$$

которая, в свою очередь, равносильна следующей формуле

$$[(\overline{P(a,a)} \,\&\, P(a,a)) \vee (\overline{P(b,a)} \,\&\, P(a,a))] \,\&$$
$$\&[(\overline{P(a,b)} \,\&\, P(b,b)) \vee (\overline{P(b,b)} \,\&\, P(b,b))].$$

Один двухместный неопределенный предикат $P(x, y)$ исходной формулы был заменен четырьмя высказываниями об индивидуальных предметах $a$ и $b$: $A_1 = P(a, a)$, $A_2 = P(a, b)$, $A_3 = P(b, a)$, $A_4 = P(b, b)$. Так что последняя формула есть по сути формула АВ:

$$[(\overline{A_1} \,\&\, A_1) \vee (\overline{A_3} \,\&\, A_1)] \,\&\, [(\overline{A_2} \,\&\, A_4) \vee (\overline{A_4} \,\&\, A_4)],$$

которая, очевидно, равносильна формуле

$$(\overline{A_3} \,\&\, A_1 \,\&\, \overline{A_2} \,\&\, A_4).$$

Данная формула не является общезначимой, но она выполнима в АВ: она превращается в истинное высказывание, если $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 1$.

Применительно к исходной формуле ЛП это означает, что она не тождественно истинна, но выполнима: она превратится в выполнимый предикат, если вместо предиката $P(x, y)$ в формулу подставить такой конкретный двухместных предикат, который при одинаковых значениях его предметных переменных $x$ и $y$ превращается в истинное высказывание, а при разных – в ложные.

## Проблема разрешимости для формул, зависящих от одной предметной переменной

**Теорема 4.5.** *Если формула ЛП, содержащая только предикаты от одной переменной, выполнима на некоторой предметной области* $\Omega$, *то она выполнима на предметной области* $\Omega'$ , *содержащей не более* $2^n$ *элементов, где* $n$ *– число предикатов, входящих в рассматриваемую формулу.*

**Следствие.** *Если формула* $\alpha$, *содержащая только предикаты, зависящие от одной переменной, является тождественно истинной для всякой области, не превышающей* $2^n$ *элементов, где* $n$ *– число предикатов в* $\alpha$, *то формула* $\alpha$ *общезначимая* (*т.е. истинна для любой области*).

Представленная теорема позволяет решать проблему разрешимости для формул, содержащих только предикаты, зависящие от одной переменной. Из следствия видно, что для того, чтобы установить, является ли формула $\alpha$ общезначимой или нет, достаточно проверить, является ли она тождественно истинной на всякой области, содержащей не более чем $2^n$ элемента.

Заметим, что достаточно проверить, является ли данная формула $\alpha$ тождественно истинной на области, состоящей ровно из $2^n$ элемента. Это следует из того, что для формул рассматриваемого типа имеет место следующее: *если формула $\alpha$ тождественно истинна на некоторой области, то она тождественно истинна на всякой ее части.*

Таким образом, задача о решении проблемы разрешимости для формул, зависящих только от одной предметной переменной, сводится к задаче о решении проблемы разрешимости для формул, определенных на конечных множествах, разрешимость которой показана выше.

Очевидно, на области, содержащей ровно $2^n$ элемента:

$$\forall x\beta(x) = \beta(x_1)\,\&\,\beta(x_2)\,\&\ldots\&\,\beta(x_{2^n});$$

$$\exists x\beta(x) = \beta(x_1) \vee \beta(x_2) \vee \ldots \vee \beta(x_{2^n}).$$

В таком случае произвольная формула $\alpha$, отнесенная к области $\{x_1, x_2, ..., x_{2^n}\}$, равносильна формуле $\alpha'$, в которой все кванторы заменены операциями конъюнкции и дизъюнкции.

**Проблема разрешения для замкнутых формул, содержащих в ПНФ кванторы одного типа**

Как было определено выше, формула ЛП является замкнутой, если она не содержит свободных предметных переменных.

**Теорема 4.6.** *Если замкнутая формула ЛП в ПНФ содержит только кванторы существования, число которых равно n, и тождественно истинна на любой области, состоящей из одного элемента, то она общезначима.*

Доказательство. Пусть для определенности формула ЛП в ПНФ имеет вид:

$$\beta = \exists x_1 \exists x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1(x_1), P_2(x_2), Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2)), \quad (4.11)$$

где формула $\alpha$ не содержит кванторов; $A_1$ и $A_2$ – переменные высказывания; $P_1$, $P_2$ и $Q_1$, $Q_2$ – одноместные и двухместные предикаты, соответственно.

По условию теоремы на любой предметной области $M = \{a\}$, содержащей только один элемент $a$, данная формула тождественно истинна, т.е.

$$\alpha(A_1, A_2, P_1(a), P_2(a), Q_1(a,a), Q_2(a,a)) = 1. \qquad (4.12)$$

Формула (4.12), очевидно, является формулой АВ.

Предположим, что формула (4.11) не является общезначимой. Тогда существует такая предметная область $M_1$ и принимает значение «ложь» интерпретация данной формулы:

$$\exists x_1 \exists x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1, x_2), Q_2^0(x_1, x_2)) = 0. \qquad (4.13)$$

Рассмотрим отрицание формулы (4.13):

$$\overline{\exists x_1 \exists x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1, x_2), Q_2^0(x_1, x_2))} =$$
$$= \forall x_1 \forall x_2 \overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1, x_2), Q_2^0(x_1, x_2))} = 1.$$

Отсюда следует, что формула

$$\overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1, x_2), Q_2^0(x_1, x_2))} \qquad (4.14)$$

тождественно истинна, независимо от выбора предметных переменных из области $M_1$.

Возьмем из области $M_1$ какой-нибудь элемент $a_0$ и подставим его в формулу (4.14) вместе всех предметных переменных. Тогда

$$\overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(a_0), P_2^0(a_0), Q_1^0(a_0, a_0), Q_2^0(a_0, a_0))} = 1.$$

Следовательно,

$$\alpha(A_1, A_2, P_1^0(a_0), P_2^0(a_0), Q_1^0(a_0, a_0), Q_2^0(a_0, a_0)) = 0,$$

а это противоречит тождественной истинности формулы (4.12). □

**Теорема 4.7.** *Если замкнутая формула ЛП в ПНФ содержит только кванторы всеобщности, число которых равно n, и тождественно истинна на всяком множестве, содержащем не более чем n элементов, то она общезначима.*

Доказательство. Пусть для определенности формула ЛП в ПНФ имеет вид:

$$\beta = \forall x_1 \forall x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1(x_1), P_2(x_2), Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2)), \qquad (4.15)$$

где формула $\alpha$ не содержит кванторов; $A_1$ и $A_2$ – переменные высказывания; $P_1$, $P_2$ и $Q_1$, $Q_2$ – одноместные и двухместные предикаты, соответственно.

Предположим, что формула (4.15) не является общезначимой. Тогда существует предметная область $M_1$ с числом элементов, большим 2, на которой интерпретация данной формулы принимает значение «ложь»:

$$\forall x_1 \forall x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1, x_2), Q_2^0(x_1, x_2)) = 0. \qquad (4.16)$$

Отсюда

$$\overline{\forall x_1 \forall x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1, x_2), Q_2^0(x_1, x_2))} =$$
$$= \exists x_1 \exists x_2 \overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1, x_2), Q_2^0(x_1, x_2))} = 1.$$

Таким образом, существует набор предметных переменных $a_1^0, a_2^0$ из области $M_1$, при котором формула

$$\overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(a_1^0), P_2^0(a_2^0), Q_1^0(a_1^0, a_2^0), Q_2^0(a_1^0, a_2^0))} = 1,$$

а формула

$$\alpha(A_1, A_2, P_1^0(a_1^0), P_2^0(a_2^0), Q_1^0(a_1^0, a_2^0), Q_2^0(a_1^0, a_2^0)) = 0.$$

Следовательно, из области $M_1$ можно выделить область $M_2$, содержащую не более 2 элементов, на которой данная формула не является тождественно истинной, а это противоречит условию теоремы. □