Лекция (14 апреля 2020 года)

Задание:

1. **Изучить материал.**
2. **Составить письменный конспект.**
3. **Ответить на вопросы в конце конспекта.**

Обозначения:

АВ – алгебра высказываний

ЛП – логика предикатов

$A(x)$, $F(x)$, $G(x, y)$ и т.д. (заглавные латинские буквы (F, G и т.д.) и скобки, внутри которых указаны предметы (строчные латинские буквы – x, y, z и т.д.) – предикаты (т.е. высказывания с выделением предметов)

A, B, H (заглавные латинские буквы) – переменные высказывания (т.е. высказывания без выделения предметов)

α, β (греческие строчные буквы) – некоторые формулы ЛП (используются, когда нам нужно знать только то, что данное выражение есть формула, а ее структура при этом не имеет значения).

4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ (продолжение)

4.6. Проблема разрешимости в логике предикатов

Каждая формула ЛП представляет собой определенное утверждение, истинное или ложное, когда оно относится к определенной предметной области Ω, и предикаты, в нее входящие, заменены индивидуальными предикатами, определенными на Ω.

Если формула ЛП истинна для некоторой предметной области Ω и некоторых предикатов, на ней определенных, то она называется *выполнимой*.

Если формула ЛП истинна для данной предметной области Ω и для всех предикатов, определенных на Ω, то она называется *тождественно истинной для предметной области Ω*.

Если формула ЛП истинна для всякой предметной области Ω и для всяких предикатов, то она называется *общезначимой* (или *тождественно истинной*, или *просто истинной*).

Формула ЛП называется *ложной*, или *невыполнимой*, если ни для какой предметной области ни при каких заменах предикатов она не является истинной.

Если формула α тождественно истинна, то формула $\overline{\alpha}$ ложна, и наоборот.

Постановка проблемы разрешимости для ЛП аналогична постановке этой проблемы для АВ. Она ставится следующим образом: *указать единственный эффективный способ (алгоритм) для определения по произвольной формуле, выполнима она или нет.*

Решение вопроса о выполнимости влечет за собой и решение вопроса об истинности любой формулы. Действительно, если формула α истинна, то формула $\overline{\alpha}$ невыполнима, и наоборот. Поэтому, проверив выполнимость или невыполнимость α и $\overline{\alpha}$, можно определить тождественную истинность α.

Проблема разрешения для ЛП является обобщением проблемы разрешения для АВ, так как все формулы АВ входят в состав формул ЛП. Однако в то время как решение проблемы разрешения для АВ никаких трудностей не представляет (*мы знаем, что значения формул АВ вычислить несложно, например, с помощью построения таблицы истинности*), проблема разрешения для ЛП оказалась связанной с серьезными трудностями.

Только в 30-х гг. XX в. в математической логике после точного определения понятия алгоритма появилась возможность доказать, что *проблема разрешимости для ЛП неразрешима*, т.е. искомый в этой проблеме алгоритм невозможен. Это впервые было доказано А. Черчем.

Для некоторых частных типов формул, однако, проблема разрешимости решается. Рассмотрим наиболее важный тип формул, для которых решение проблемы разрешимости может быть осуществлено.

Проблема разрешимости для формул ЛП, определенных на конечных множествах

Если формула ЛП рассматривается на конечном множестве, то вместо ее предикатных переменных могут подставляться конкретные предикаты, определенные на этом конечном множестве.

Действительно, на произвольном конечном множестве, содержащем ровно n элементов x_1, x_2, …, x_n, формулы $\forall x Q(x)$ и $\exists x Q(x)$ равносильны, соответственно, формулам:

$$\forall x Q(x) = Q(x_1)\,\&\,Q(x_2)\,\&\ldots Q(x_n);$$

$$\exists x Q(x) = Q(x_1) \vee Q(x_2) \vee \ldots \vee Q(x_n).$$

Таким образом, операции связывания кванторами на конечных множествах заменяются конъюнкцией или дизъюнкцией, а задача о выполнимости или тождественной истинности формулы ЛП на конечном множестве сводятся к задаче о выполнимости или общезначимости некоторой формулы АВ. Мы уже ранее установили, что проблема разрешимости для АВ эффективно решается.

Пример 4.9. Проверить выполнимость (или тождественную истинность) формулы $\forall y \exists x(\overline{P(x,y)}\,\&\,P(y,y))$ на конечном двухэлементном множестве $\{a, b\}$.

На этом множестве рассматриваемая формула равносильна формуле:

$$\exists x[\overline{P(x,a)}\,\&\,P(a,a)]\,\&\,\exists x[\overline{P(x,b)}\,\&\,P(b,b)],$$

которая, в свою очередь, равносильна следующей формуле

$$[(\overline{P(a,a)}\,\&\,P(a,a)) \vee (\overline{P(b,a)}\,\&\,P(a,a))]\,\&$$
$$\&[(\overline{P(a,b)}\,\&\,P(b,b)) \vee (\overline{P(b,b)}\,\&\,P(b,b))].$$

Один двухместный неопределенный предикат $P(x, y)$ исходной формулы был заменен четырьмя высказываниями об индивидуальных предметах a и b: $A_1 = P(a, a)$, $A_2 = P(a, b)$, $A_3 = P(b, a)$, $A_4 = P(b, b)$. Так что последняя формула есть по сути формула АВ:

$$[(\overline{A_1}\,\&\,A_1) \vee (\overline{A_3}\,\&\,A_1)]\,\&\,[(\overline{A_2}\,\&\,A_4) \vee (\overline{A_4}\,\&\,A_4)],$$

которая, очевидно, равносильна формуле

$$(\overline{A_3}\,\&\,A_1\,\&\,\overline{A_2}\,\&\,A_4).$$

Данная формула не является общезначимой, но она выполнима в АВ: она превращается в истинное высказывание, если $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 1$.

Применительно к исходной формуле ЛП это означает, что она не тождественно истинна, но выполнима: она превратится в выполнимый предикат, если вместо предиката $P(x, y)$ в формулу подставить такой конкретный двухместных предикат, который при одинаковых значениях его предметных переменных x и y превращается в истинное высказывание, а при разных – в ложные.

Проблема разрешимости для формул, зависящих от одной предметной переменной

Теорема 4.5. *Если формула ЛП, содержащая только предикаты от одной переменной, выполнима на некоторой предметной области Ω, то она выполнима на предметной области Ω', содержащей не более 2^n элементов, где n – число предикатов, входящих в рассматриваемую формулу.*

Следствие. *Если формула α, содержащая только предикаты, зависящие от одной переменной, является тождественно истинной для всякой области, не превышающей 2^n элементов, где n – число предикатов в α, то формула α общезначимая* (*т.е. истинна для любой области*).

Представленная теорема позволяет решать проблему разрешимости для формул, содержащих только предикаты, зависящие от одной переменной. Из следствия видно, что для того, чтобы установить, является ли формула α общезначимой или нет, достаточно проверить, является ли она тождественно истинной на всякой области, содержащей не более чем 2^n элемента.

Заметим, что достаточно проверить, является ли данная формула α тождественно истинной на области, состоящей ровно из 2^n элемента. Это следует из того, что для формул рассматриваемого типа имеет место следующее: *если формула α тождественно истинна на некоторой области, то она тождественно истинна на всякой ее части.*

Таким образом, задача о решении проблемы разрешимости для формул, зависящих только от одной предметной переменной, сводится к задаче о решении проблемы разрешимости для формул, определенных на конечных множествах, разрешимость которой показана выше.

Очевидно, на области, содержащей ровно 2^n элемента:

$$\forall x\beta(x) = \beta(x_1)\,\&\,\beta(x_2)\,\&\,...\,\&\,\beta(x_{2^n});$$

$$\exists x\beta(x) = \beta(x_1) \vee \beta(x_2) \vee ... \vee \beta(x_{2^n}).$$

В таком случае произвольная формула α, отнесенная к области $\{x_1, x_2, ..., x_{2^n}\}$, равносильна формуле α', в которой все кванторы заменены операциями конъюнкции и дизъюнкции. Если в α входили только предикаты $P_1, .., P_n$, зависящие от одной переменной, то α' представляет собой формулу, образованную только операциями АВ над выражениями $P_i(x_j)$, где $1 \le i \le n$, $1 \le j \le 2^n$. Так как предикаты $P_i(x)$ произвольны, то выражения $P_i(x_j)$ представляют собой произвольные высказывания. Формулу α' тогда можно рассматривать как формулу АВ, у которой $P_i(x_j)$ являются простыми высказываниями. Тогда вопрос о общезначимости формулы α на области $\{x_1, x_2, ..., x_{2^n}\}$ оказывается эквивалентным вопросу о тождественной истинности α' как формулы АВ с переменными высказываниями $A_i(x_j)$.

Проблема разрешения для замкнутых формул, содержащих в ПНФ кванторы одного типа

Как было определено выше, формула ЛП является замкнутой, если она не содержит свободных предметных переменных.

Теорема 4.6. *Если замкнутая формула ЛП в ПНФ содержит только кванторы существования, число которых равно n, и тождественно истинна на любой области, состоящей из одного элемента, то она общезначима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности формула ЛП в ПНФ имеет вид:

$$\beta = \exists x_1 \exists x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1(x_1), P_2(x_2), Q_1(x_1, x_2), Q_2(x_1, x_2)), \tag{4.11}$$

где формула α не содержит кванторов; A_1 и A_2 – переменные высказывания; P_1, P_2 и Q_1, Q_2 – одноместные и двухместные предикаты, соответственно.

По условию теоремы на любой предметной области $M=\{a\}$, содержащей только один элемент a, данная формула тождественно истинна, т.е.

$$\alpha(A_1, A_2, P_1(a), P_2(a), Q_1(a,a), Q_2(a,a)) = 1. \qquad (4.12)$$

Формула (4.12), очевидно, является формулой АВ.

Предположим, что формула (4.11) не является общезначимой. Тогда существует такая предметная область M_1 и принимает значение «ложь» интерпретация данной формулы:

$$\exists x_1 \exists x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1,x_2), Q_2^0(x_1,x_2)) = 0. \qquad (4.13)$$

Рассмотрим отрицание формулы (4.13):

$$\overline{\exists x_1 \exists x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1,x_2), Q_2^0(x_1,x_2))} =$$
$$= \forall x_1 \forall x_2 \overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1,x_2), Q_2^0(x_1,x_2))} = 1.$$

Отсюда следует, что формула

$$\overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1,x_2), Q_2^0(x_1,x_2))} \qquad (4.14)$$

тождественно истинна, независимо от выбора предметных переменных из области M_1.

Возьмем из области M_1 какой-нибудь элемент x_0 и подставим его в формулу (4.14) вместе всех предметных переменных. Тогда

$$\overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(a_0), P_2^0(a_0), Q_1^0(a_0,a_0), Q_2^0(a_0,a_0))} = 1.$$

Следовательно,

$$\alpha(A_1, A_2, P_1^0(a_0), P_2^0(a_0), Q_1^0(a_0,a_0), Q_2^0(a_0,a_0)) = 0,$$

а это противоречит тождественной истинности формулы (4.12). □

Теорема 4.7. *Если замкнутая формула ЛП в ПНФ содержит только кванторы всеобщности, число которых равно n, и тождественно истинна на всяком множестве, содержащем не более чем n элементов, то она общезначима.*

Доказательство. Пусть для определенности формула ЛП в ПНФ имеет вид:

$$\beta = \forall x_1 \forall x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1(x_1), P_2(x_2), Q_1(x_1,x_2), Q_2(x_1,x_2)), \qquad (4.15)$$

где формула α не содержит кванторов; A_1 и A_2 – переменные высказывания; P_1, P_2 и Q_1, Q_2 – одноместные и двухместные предикаты, соответственно.

Предположим, что формула (4.15) не является общезначимой. Тогда существует предметная область M_1 с числом элементов, большим 2, на которой интерпретация данной формулы принимает значение «ложь»:

$$\forall x_1 \forall x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1,x_2), Q_2^0(x_1,x_2)) = 0. \qquad (4.16)$$

Отсюда

$$\overline{\forall x_1 \forall x_2 \alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1,x_2), Q_2^0(x_1,x_2))} =$$
$$= \exists x_1 \exists x_2 \overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1,x_2), Q_2^0(x_1,x_2))} = 1.$$

Таким образом, существует набор предметных переменных x_1^0, x_2^0 из области M_1, при котором формула

$$\overline{\alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1,x_2), Q_2^0(x_1,x_2))} = 1,$$

а формула

$$\alpha(A_1, A_2, P_1^0(x_1), P_2^0(x_2), Q_1^0(x_1, x_2), Q_2^0(x_1, x_2)) = 0.$$

Следовательно, из области M_1 можно выделить область M_2, содержащую не более 2 элементов, на которой данная формула не является тождественно истинной, а это противоречит условию теоремы. □

Вопросы для самопроверки:

1. *Сформулируйте проблему разрешения для логики предикатов.*
2. *Какая формула в логике предикатов называется выполнимой?*
3. *Какая формула в логике предикатов называется тождественно истинной для некоторой области* Ω*?*
4. *Какая формула в логике предикатов называется общезначимыми?*
5. *Какая формула в логике предикатов называется невыполнимой* (*или тождественно ложной*)*?*
6. *Разрешима ли проблема разрешимости в общем случае для логики предикатов?*
7. *В чем суть алгоритма решения проблемы разрешения для формул логики предикатов, определенных на конечных множествах.*
8. *В чем суть алгоритма решения проблемы разрешения для логики предикатов, зависящих от одной предметной переменной.*
9. *В чем суть алгоритма решения проблемы разрешения для замкнутых формул логики предикатов, содержащих в предваренной нормальной форме кванторы одного типа.*