4.4. Равносильные формулы логики предикатов

Две формулы α и β, отнесенные к некоторой предметной области Ω, которые при всех заменах переменных предикатов, переменных высказываний и свободных предметных переменных соответственно индивидуальными предикатами, определенными на Ω, индивидуальными высказываниями и индивидуальными предметами из Ω принимают одинаковые значения 1 или 0, называются **равносильными на области Ω.**

Две формулы, равносильные на любых предметных областях Ω, называются **просто равносильными**.

Как и в АВ, равносильные формулы могут быть заменены одна другой.

Так как ЛП является расширением АВ, все законы равносильности последней истинны и в этой системе.

К ним добавляются равносильности, связанные с кванторами:

$$\overline{\forall x \alpha(x)} = \exists y \overline{\alpha(y)}\,; \tag{4.1}$$

$$\overline{\exists x \alpha(x)} = \forall y \overline{\alpha(y)}\,. \tag{4.2}$$

П р и м е р . Преобразовать формулу $\overline{\exists x(A(x) \to \forall y B(y))}$.

$$\overline{\exists x(A(x) \to \forall y B(y))} \overset{(4.2)}{=}$$

$$= \forall x \overline{(A(x) \to \forall y B(y))} \overset{(2.21)}{=}$$

$$= \forall x \overline{(\overline{A(x)} \vee \forall y B(y))} \overset{(2.10),(2.1)}{=}$$

$$= \forall x (A(x) \,\&\, \overline{\forall y B(y)}) \overset{(4.1)}{=}$$

$$= \forall x (A(x) \,\&\, \exists y \overline{B(y)}).$$

Формулы:

(2.1) $\overline{\overline{X}} = X$

(2.10) $(X \vee X) = X$

(2.21) $\overline{X} \vee (X \,\&\, Y) = (\overline{X} \vee Y)$

(4.1) $\overline{\forall x \alpha(x)} = \exists y \overline{\alpha(y)}$

(4.2) $\overline{\exists x \alpha(x)} = \forall y \overline{\alpha(y)}$

Теорема 4.1. *Имеют место следующие равносильности:*

$$\forall x\alpha(x)\vee\beta=\forall x\big(\alpha(x)\vee\beta\big)\,; \qquad (4.3)$$

$$\forall x\alpha(x)\,\&\,\beta=\forall x\big(\alpha(x)\,\&\,\beta\big)\,; \qquad (4.4)$$

$$\exists x\alpha(x)\,\&\,\beta=\exists x\big(\alpha(x)\,\&\,\beta\big); \qquad (4.5)$$

$$\exists x\alpha(x)\vee\beta=\exists x\big(\alpha(x)\vee\beta\big), \qquad (4.6)$$

где формула β не содержит свободной переменной x, а в формуле α, переменная x связана соответствующим квантором.

Теорема 4.2. *Имеют место следующие равносильности:*

$$\forall x\alpha(x)\,\&\,\forall x\beta(x)=\forall x\big(\alpha(x)\,\&\,\beta(x)\big)\,; \qquad (4.7)$$

$$\exists x\big(\alpha(x)\vee\beta(x)\big)=\exists x\alpha(x)\vee\exists x\beta(x)\,. \qquad (4.8)$$

В заключение отметим, что:

$$\forall x(\alpha(x)\vee\beta(x)) \neq \forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x)$$

$$\exists x(\alpha(x)\&\beta(x)) \neq \exists x\alpha(x)\&\exists x\beta(x).$$

Однако справедливы следующие равносильности:

$$\begin{aligned}&\forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x)=\forall x\alpha(x)\vee\forall y\beta(y)=\\&=\forall x(\alpha(x)\vee\forall y\beta(y))=\forall x\forall y(\alpha(x)\vee\beta(y));\end{aligned}\tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}&\exists x\alpha(x)\,\&\,\exists x\beta(x)=\exists x\alpha(x)\,\&\,\exists y\beta(y)=\\&=\exists x(\alpha(x)\,\&\,\forall y\beta(y))=\exists x\exists y(\alpha(x)\,\&\,\beta(y)).\end{aligned}\tag{4.10}$$

4.5. Приведенные и нормальные формулы

Приведенными формулами называются формулы, в которых используются только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, причем знак отрицания относится только к элементарным предикатам и высказываниям.

Теорема 4.3. *Для каждой формулы существует равносильная ей приведенная формула.* □

Приведенная формула, равносильная формуле α, называется *приведенной формой* формулы α.

Для облегчения анализа сложных суждений формулы ЛП рекомендуется приводить их к нормальной форме. Если в АВ приняты две нормальные формы (ДНФ – дизъюнктивная и КНФ – конъюнктивная), то в ЛП – одна предваренная нормальная форма (ПНФ), суть которой сводится к разделению формулы на две части: кванторную и безкванторную.

Приведенная форма формулы α называется **предваренной нормальной формой (ПНФ)** формулы α, если она не содержит кванторов или если при образовании ее из элементарных формул операции связывания квантором следуют за всеми операциями алгебры высказываний.

В записи ПНФ кванторы, если они есть, предшествуют всем остальным логическим символам. Например, приведенная формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

нормальна, если $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не содержит кванторов (!).

Теорема 4.4. *Для каждой формулы существует равносильная ей ПНФ.*

Пример. Преобразовать формулу $\overline{\exists x(A(x)\to\forall yB(y))}$ к ПНФ.

$$\overline{\exists x(A(x)\to\forall xB(x))} \overset{(4.2)}{=} \forall x\overline{(A(x)\to\forall xB(x))} \overset{(2.27)}{=}$$

$$= \forall x\overline{(\overline{A(x)}\vee\forall xB(x))} \overset{(2.8),(2.1)}{=} \forall x(A(x)\,\&\,\overline{\forall xB(x)}) \overset{(4.1)}{=} \forall x(A(x)\,\&\,\exists x\overline{B(x)}) =$$

$$= \forall x(A(x)\,\&\,\exists y\overline{B(y)}) = \forall x\exists y(A(x)\,\&\,\overline{B(y)}).$$

Формулы:

(2.1) $\overline{\overline{X}} = X$

(2.8) $\overline{(X\vee Y)} = \overline{X}\,\&\,\overline{Y}$

(2.27) $(X\to Y) = (\overline{X}\vee Y)$

(4.1) $\overline{\forall x\alpha(x)} = \exists y\overline{\alpha(y)}$

(4.2) $\overline{\exists x\alpha(x)} = \forall y\overline{\alpha(y)}$