4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

ЛП содержит в себе всю АВ (т.е. элементарные высказывания, рассматриваемые как величины, которые принимают два значения 1 и 0, все операции алгебры высказываний и все ее формулы).

В ней уже имеется расчленение высказываний на субъект и предикат.

Субъект (букв. – подлежащее, хотя оно может играть также роль дополнения) – *это то, о чем что-то утверждается в высказывании*.

Предикат (букв. – сказуемое, хотя оно может играть также роль определения) – *это, что утверждается о субъекте*.

В высказывании «Москва является столицей России»: «Москва» – это субъект, «*x* является столицей России» – предикат.

В высказывании «число 9 делится на число 3»: «число 9» и «число 3» – субъекты, «*x* делится на *y*» – предикат.

4.1. Символы логики предикатов. Понятие предиката. Логические операции

Пусть Ω – произвольное непустое множество, а x представляет собой произвольный предмет из этого множества. Тогда $F(x)$ – **неопределенное высказывание.** Оно становится определенным, когда x заменено определенным предметом из Ω.

Пример. Высказывание $F(x)$ = «x – простое число» на множестве $\mathbf{N}$ является неопределенным. Если x заменить некоторым числом, то оно становится определенным: «3 – простое число» ($F(3) = 1$), «4 – простое число» ($F(4) = 1$) и т.д.

$F(x)$ представляет собой функцию, определенную на множестве Ω и принимающую только два значения: 1 и 0.

Неопределенные высказывания о двух и более предметах $H(x, y)$, $G(x, y, z)$ и т.д. представляют собой функции двух, трех и т.д. переменных, соответственно. При этом переменные x, y, z определены на множестве Ω, а функция принимает значения 1 и 0.

Эти неопределенные высказывания, или функции одной или нескольких переменных, называются **логическими функциями**, или **предикатами**.

Все понятия, которые будут вводиться, относятся всегда к некоторому произвольному множеству Ω, которое называется **предметной областью**, или просто **областью**.

Алфавит логики предикатов

Малые латинские буквы конца алфавита *x, y, z*, …
(для обозначения **предметных переменных**, т.е. неопределенных элементов области)

Малые латинские буквы начала алфавита *a, b, c*, …
(для обозначения **предметных постоянных**, или **индивидуальных предметов**)

Из АВ

Заглавные латинские буквы *A, B, C*, …
(для обозначения простых высказываний)

$F(x)$, $G(x, y)$, $P(x_1, \ldots, x_n)$, …
(для обозначения **переменных предикатов**, т.е. функций, аргументы которых принимают значения из области Ω, а сами функции могут принимать только два значения: 1 и 0

Из АВ

Символы & (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\overline{}$ (инверсия),
$\to$ (импликация), $\sim$ (эквивалентность),

$\forall$(квантор всеобщности), $\exists$ (существований)
(для обозначения **операций**, с помощью которых формируются сложные высказывания)

Круглые скобки (для указания приоритета операций)

Множество всех элементов $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1 («истина»), называется **множеством истинности предиката $P(x)$**:

$$I_P = \{x \colon x \in \Omega, P(x) = 1\}.$$

Пример. Пусть предикат $P(x)$ = «x – простое число» и он определен на множестве **N.** Тогда I_P с множеством всех простых чисел.

Пусть предикат $F(x)$ – «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны» определен на множестве всех параллелограммов, а его I_P является множество всех ромбов.

Операции АВ над предикатами

Пусть на некотором множестве Ω определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Конъюнкцией двух предикатов *P*(*x*) и *Q*(*x*) называется новый предикат $(P(x)\ \&\ Q(x)) = 1$ при $x \in \Omega$: при которых каждый из предикатов принимает значение 1, и принимает значение 0 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката:

$$I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q.$$

Дизъюнкцией двух предикатов *P*(*x*) и *Q*(*x*) называется новый предикат $(P(x) \vee Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых каждый из предикатов принимает значение 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката:

$$I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q.$$

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P}(x)$, который принимает значение 1 при всех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 0, и принимает значение 0 при тех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1.

Область истинности предиката:

$$I_{\overline{P}} = \Omega \setminus I_P.$$

Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \to Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение 1, а $Q(x)$ – 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката:

$$I_{P \to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = (\Omega \setminus I_P) \cup I_Q.$$

4.2. Кванторы. Кванторные операции

1. Квантор всеобщности

Пусть $R(x)$ – вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента x некоторой области Ω. Тогда под выражением

$$\forall x R(x)$$

будет подразумеваться *высказывание истинное, когда $R(x)$ истинно для каждого элемента x области Ω и ложно в противном случае.*

Полученное сложное высказывание от x уже не зависит.

Соответствующее ему словесное выражение будет: «для всякого x $R(x)$ истинно».

Символ $\forall x$ называется **квантором всеобщности**.

2. **Квантор существования**

Пусть $R(x)$ – некоторый предикат. Определим формулу

$$\exists x R(x)$$

как истинную, если существует x в области Ω, для которого $R(x)$ истинно, и как ложную в противном случае.

Знак $\exists x$ называется **квантором существования**.

Кванторы $\exists x$ и $\forall x$ относятся к переменной x. При этом говорят, что **переменная x связана соответствующим квантором**.

Предметная переменная, не связанная никаким квантором, будет называться **свободной переменной**.

Приведем примеры использования кванторов

Пусть на множестве $\boldsymbol{N}$ задан предикат

$$P(x)\text{: «Число } x \text{ кратно 3».}$$

Тогда:

$$\forall x P(x)\text{: «Все натуральные числа кратны 3»;}$$

$$\exists x P(x) \text{ – «Существуют натуральные числа } x\text{, которые кратны 3».}$$

Очевидно, что $\forall x P(x) = 0$, а $\exists x P(x) = 1$.

4.3. Определение формулы логики предикатов

Определение формулы ЛП:

1° Каждое переменное высказывание есть формула ЛП.

2° Каждый переменный предикат есть формула ЛП.

3° Если α – формула ЛП, а x – предметная переменная, свободная в α, то $\forall x\alpha$ и $\exists x\alpha$ – формулы ЛП.

4° Если α и β – формулы ЛП, то $\overline{\alpha}$, $\alpha \& \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ – формулы ЛП.

5° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-4, в ЛП нет.

Формулы, определенные в п. 1° и 2°, называются **элементарными формулами ЛП.**

Примечание. П.п. 1 и 4 определения перенесены сюда из определения формулы АВ

Формулы ЛП называются **открытыми**, если они содержат свободные предметные переменные.

Формулы ЛП называются **замкнутыми** , если они не содержащие свободных предметных переменных.

Например, следующие формулы являются открытыми:

$$\exists x(P(x, y, z) \sim Q(x, y)),$$

$$\forall y \exists x(\mathrm{P}_1(x, y, z) \vee (P_2(x) \to P_3(x))).$$

В первой формуле не связаны предметные переменные y и z, а во второй – z.

Формулы

$$\forall x \exists y \forall z(P_1(x, y, z) \vee P_2(x, z)),$$

$$\forall x \exists y(P(x, y) \to (A \to G(y)))$$

являются замкнутыми.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛ

Логическое значение формулы ЛП зависит от предметной области Ω, на котором определены входящие в формулу предикаты.

Кроме этого, **для определения значения формулы ЛП** необходимо знание:

1) значений, входящих в формулу переменных высказываний;
2) значений свободных предметных переменных из множества Ω;
3) значений предикатных переменных.

Преобразование формулы ЛП в высказывание (а также само получаемое высказывание) называется **интерпретацией** этой формулы на множестве Ω.

Интерпретация замкнутой формулы

Интерпретация сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов, в результате чего формула превращается в конкретное высказывание (нульместный предикат).

П р и м е р . Дать интерпретации формуле $\forall x \exists y P(x, y)$.

Формула не имеет свободных переменных, следовательно, она замкнута.

Пусть Ω – множество всех мужчин, предикат $P(x, y)$ = «x есть отец y», определенный на Ω.

Тогда

$$\forall x \exists y P(x, y) = \text{«у каждого мужчины есть сын».}$$

Следовательно, в данной интерпретации формула ложна.

Пусть Ω – множество $\boldsymbol{N}$, а предикат $P(x, y)$ = «$x < y$», определенный на $\boldsymbol{N}^2$.

Тогда получим истинное высказывание $\forall x \exists y P(x, y)$ = «*Для любого натурального числа x существует большее по сравнению с ним натуральное число y*».

Интерпретация открытой формулы

Интерпретация состоит из двух этапов:

1) вместо всех предикатных переменных необходимо подставить конкретные предикаты, в результате чего формула превратится в конкретный предикат, зависящий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле;

2) каждой предметной переменной необходимо придать значение, от которого зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат (и, значит, вся исходная формула) превратится в конкретное высказывание (истинное или ложное).

П р и м е р. Дать интерпретацию формуле α:

$$\exists z(P(x, y, z) \to Q(x, y, z)) \to R.$$

Данная формула содержит свободные переменные x и y – она открыта.

Пусть Ω – множество N;

$$P(x, y, z) = «x \cdot y = z»;\ Q(x, y, z) = «x + y = z»;\ R = «2 = 4».$$

$$\exists z(P(x, y, z) \to Q(x, y, z)) = 1,$$

так как всегда можно найти такое натуральное число k, что $m \cdot n \neq k$ и $m + n \neq k$, при котором высказывания $m \cdot n = k$ и $m + n = k$ будут ложными, а высказывание $(m \cdot n = k) \to (m + n = k)$ – истинным).

Тогда

$$\exists z(P(x, y, z) \to Q(x, y, z)) \to R = 0.$$

так как посылка формулы истинна, а ее заключение ложно.

Если в данной интерпретации в качестве высказывания R взять истинное высказывание, то формула превратится в истинное высказывание.