Лекция (24 марта 2020 года)

Задание:

1. **Изучить материал.**
2. **Составить письменный конспект.**

Можно также прослушать лекции 4.1-4.3 (гл. 4) онлайн-курса:

Зюзьков В.М. Математичсеская логика и теория алгоритмов

https://stepik.org/course/48679/syllabus

4. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

Алгебра высказываний не обладает достаточными выразительными возможностями. Так, например, следующее умозаключение: «Всякое целое число является рациональным. Число 2 – целое. Следовательно, 2 – рациональное число» нельзя точно выразить. Все эти утверждения с точки зрения АВ являются элементарными. Поэтому в рамках АВ невозможно вскрыть внутреннюю структуру утверждения и доказать его логичность.

Логика предикатов (далее – ЛП) представляет собой развитие алгебры высказываний. Она содержит в себе всю АВ, т.е. элементарные высказывания, рассматриваемые как величины, которые принимают два значения 1 и 0, все операции алгебры высказываний и, следовательно, все ее формулы. Но, помимо этого, ЛП вводит в рассмотрение высказывания, отнесенные к предметам. В ней уже имеется расчленение высказываний на субъект и предикат.

Субъект (букв. – подлежащее, хотя оно может играть также роль дополнения) – это то, о чем что-то утверждается в высказывании.

Предикат (букв. – сказуемое, хотя оно может играть также роль определения) – это, что утверждается о субъекте.

Например, в высказывании «Москва – столица России»: «Москва» – это субъект, «столица России» – предикат; в высказывании «число 9 делится на 3»: «число 9» – субъект, «делится на 3» – предикат.

4.1. Символы логики предикатов. Понятие предиката. Логические операции

Пусть Ω – некоторое множество предметов и a, b, c, d – какие-то определенные предметы этого множества. Тогда высказывания об этих предметах мы будем обозначать в виде

$$P(a), Q(b), R(c,d) \text{ и т.д.},$$

где $P(a)$ – высказывание о предмете a; $Q(b)$ – высказывание о предмете b; $R(c, d)$ – высказывание о предметах c и d.

П р и м е р 4.1. Пусть множество Ω представляет собой множество натуральных чисел, а буквы a, b, c, d – соответственно числа 5, 8, 3, 1. Тогда $P(a)$ может быть, например, высказыванием: «5 – простое число», $Q(b)$ – «8 – нечетное число», $R(c, d)$ – « 3 больше 1». □

Как и в АВ предложения в ЛП могут быть истинными или ложными. Но, в отличие от алгебры высказываний, значения 1 и 0 ставятся в соответствие определенным предметам или группам предметов.

П р и м е р 4.2. В рассмотренном выше примере $P(a)$ представляет собой истинное высказывание, поставленное в соответствие числу 5, т.е. $P(5) = 1$; $Q(8) = 0$; $R(3, 1) = 1$. □

Пусть Ω – произвольное непустое множество, а x представляет собой произвольный предмет из этого множества. Тогда $F(x)$ – *неопределенное высказывание*. Оно становится определенным, когда x заменено определенным предметом из Ω.

Пример 4.3. Если множество Ω – множество натуральных чисел, то $F(x)$ может обозначать: «x есть простое число». Это высказывание становится определенным, если x заменить некоторым числом, например: «3 – простое число», «4 – простое число» и т.д. □

Иначе говоря, $F(x)$ представляет собой функцию, определенную на множестве Ω и принимающую только два значения: 1 и 0. Таким же образом неопределенное высказывание о двух и более предметах $H(x, y)$, $G(x, y, z)$ и т.д. представляют собой функции двух, трех и т.д. переменных. При этом переменные x, y, z пробегают множество Ω, а функция принимает значения 1 и 0.

Эти неопределенные высказывания, или функции одной или нескольких переменных, называются *логическими функциями*, или *предикатами*.

Предикатами с одной переменной можно выразить *свойство предмета*, например: «x – квадрат». Предикатами с несколькими переменными можно выразить *отношения между предметами*, например «$x < y$».

Все понятия, которые будут вводиться, относятся всегда к некоторому произвольному множеству Ω, которое называется *предметной областью*, или просто *областью*. Элементы этой области будут обозначаться малыми латинскими буквами:

1) *предметные переменные* (неопределенные элементы области) будут обозначаться буквами конца латинского алфавита

$$x, y, z, u, x_1, x_2, \ldots;$$

2) *индивидуальные предметы*, или *предметные постоянные* – буквами начала латинского алфавита

$$a, b, c, a_1, a_2, \ldots$$

Переменные высказывания, т.е. переменные, принимающие значение 1 или 0, будут обозначаться большими латинскими буквами

$$A, B, C, \ldots, X, A_1, A_2, \ldots$$

Выражения

$$F(x), G(x, y), P(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

будут использоваться для обозначения *переменных предикатов*, т.е. функций, аргументы которых принимают значения из области Ω, а сами функции могут принимать только два значения: 1 и 0.

Высказывания, выражаемые большими латинскими буквами, как переменные, так и постоянные, а также выражения

$$F(a), G(a, b), \ldots$$

где F, G – предикаты, а a и b – индивидуальные предметы, будем называть *элементарными высказываниями*.

Множество всех элементов $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1 («истина»), называется *множеством истинности предиката* $P(x)$, т.е. множество истинности предиката $P(x)$ – это множество $I_P = \{x\colon x \in \Omega, P(x) = 1\}$.

Так, предикат $P(x)$ – «x – простое число» определен на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$, тогда множество истинности этого предиката (I_P) совпадает с множеством всех простых чисел. Предикат $F(x)$ – «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

Большие латинские буквы и символы предикатов как от индивидуальных предметов, так и от предметных переменных будут называться *элементарными формулами*. Из элементарных формул с помощью символов-связок можно составлять сложные. Символы предметов не являются формулами.

Предикаты, как и высказывания, принимают два значения 1 и 0 («истина» и «ложь»), поэтому к ним применимы все операции АВ.

Рассмотрим применение операций АВ к предикатам на примерах одноместных предикатов. Для многоместных кванторов операции определяются аналогичным образом.

Пусть на некотором множестве Ω определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x)\ \&\ Q(x))$, который принимает значение 1 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых каждый из предикатов принимает значение 1, и принимает значение 0 во всех остальных случаях. Областью истинности предиката $(P(x)\ \&\ Q(x))$ является общая часть областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, т.е. их пересечение $I_P \cap I_Q$.

Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \vee Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых каждый из предикатов принимает значение 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях. Областью истинности предиката $(P(x) \vee Q(x))$ является объединение областей истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, т.е. $I_P \cup I_Q$.

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P}(x)$, который принимает значение 1 при всех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 0, и принимает значение 0 при тех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1. Областью истинности предиката $\overline{P}(x)$ будет множество $I_{\overline{P}} = \Omega \setminus I_P$.

Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \to Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение 1, а $Q(x)$ – 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях. Областью истинности предиката $(P(x) \to Q(x))$ с учетом того, что имеет место равносильность $P(x) \to Q(x) \cong \overline{P}(x) \vee Q(x)$, является следующая область $I_{P\to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = (\Omega \setminus I_P) \cup I_Q$.

4.2. Кванторы. Кванторные операции

Кроме операций АВ в ЛП используются еще две операции, которые связаны с особенностями этой системы и выражают собой утверждения всеобщности и существования.

1. **Квантор всеобщности**. Пусть $R(x)$ – вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента x некоторой области Ω. Тогда под выражением

$$\forall x R(x)$$

будет подразумеваться *высказывание истинное, когда $R(x)$ истинно для каждого элемента x области Ω и ложно в противном случае*. Это высказывание уже не зависит от x. Соответствующее ему словесное выражение будет: «для всякого x $R(x)$ истинно».

Пусть теперь $\alpha(x)$ – формула ЛП. Она принимает определенное значение, если входящие в нее переменные предметы и переменные предикаты заменены вполне определенным образом. Формула $\alpha(x)$ может содержать и другие переменные кроме x. Тогда выражение $\alpha(x)$ при замене всех переменных, как предметов, так и предикатов, кроме x, представляет собой конкретный предикат, зависящий от x. А формула

$$\forall x \alpha(x)$$

становится вполне определенным высказыванием. Следовательно, эта формула полностью определяется заданием значений всех переменных, кроме x, и, значит, от x не зависит. Символ $\forall x$ называется *квантором всеобщности*.

2. **Квантор существования**. Пусть $R(x)$ – некоторый предикат. Определим формулу

$$\exists x R(x)$$

как истинную, если существует x в области Ω, для которого $R(x)$ истинно, и как ложную в противном случае. Тогда, если $\alpha(x)$ – определенная формула логики предикатов, то формула

$$\exists x \alpha(x)$$

также определена и от значения x не зависит. Знак $\exists x$ называется *квантором существования*.

Кванторы $\exists x$ и $\forall x$ относятся к переменной x. При этом говорят, что *переменная x связана соответствующим квантором*.

Предметная переменная, не связанная никаким квантором, будет называться *свободной переменной*.

Приведем примеры использования кванторов. Пусть на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ задан предикат $P(x)$: «Число x кратно 3». Используя кванторы, из данного предиката можно получить высказывания: $\forall x P(x)$ – «Все натуральные числа кратны 3»; $\exists x P(x)$ – «Существует натуральное число x, которое кратно 3». Очевидно, что первое высказывание ложно, а второе – истинно.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Пусть на множестве Ω определен двухместный предикат $P(x, y)$. Применение кванторной операции к предикату по переменной x ставит в соответствие этому предикату $P(x, y)$ с двумя свободными переменными x и y предикат $\forall x P(x, y)$ (или $\exists x P(x, y)$) с одной свободной переменной y. К полученным предикатам можно применить кванторные операции по переменной y, которые приведут к высказываниям следующих видов:

$$\forall y \forall x P(x, y),\ \exists y \forall x P(x, y),\ \forall y \exists x P(x, y),\ \exists y \exists x P(x, y).$$

Например, рассмотрим предикат $P(x, y)$: «y является делителем x», который определен на множестве натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Применение кванторах операций к предикату $P(x, y)$ приведет к восьми возможным высказываниям:

1. $\forall y \forall x P(x, y)$ – «Любое натуральное число y является делителем любого натурального числа x».
2. $\exists y \forall x P(x, y)$ – «Существует натуральное число y, которое является делителем всякого натурального числа x».
3. $\forall y \exists x P(x, y)$ – «Любое натуральное число y является делителем некоторого натурального числа x».
4. $\exists y \exists x P(x, y)$ – «Существует натуральное число y, которое является делителем некоторого натурального числа x».
5. $\forall x \forall y P(x, y)$ – «Любое натуральное число x делится без остатка на любое натуральное число y».
6. $\forall x \exists y P(x, y)$ – «Любое натуральное число x делится без остатка на некоторое натуральное число y».
7. $\exists x \exists y P(x, y)$ – «Некоторое натуральное число x делится без остатка на некоторое натуральное число y».
8. $\exists x \forall y P(x, y)$ – «Некоторое натуральное число x делится без остатка на любое натуральное число y».

Очевидно, что высказывания 1, 5 и 8 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6 и 7 истинны.

4.3. Определение формулы логики предикатов

Определение формулы ЛП представляет собой следующую рекурсию:

1° Каждое переменное высказывание есть формула ЛП.

2° Каждый переменный предикат есть формула ЛП.

3° Если α – формула ЛП, а x – предметная переменная, свободная в α, то $\forall x\alpha$ и $\exists x\alpha$ – формулы ЛП.

4° Если α и β – формулы ЛП, то $\overline{\alpha}$, $\alpha \,\&\, \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$ – формулы ЛП.

5° Никаких формул, кроме построенных по п. 1-4, в ЛП нет.

Формулы, определенные в п. 1° и 2°, называются *элементарными формулами ЛП.*

Формулы ЛП, которые содержат свободные предметные переменные, называются *открытыми*, остальные формулы (т.е., не содержащие свободных предметных переменных) – *замкнутыми*.

Например, следующие формулы являются открытыми:

$$\exists x(P(x, y, z) \sim Q(x, y)),$$
$$\forall y\exists x(\mathrm{P}_1(x, y, z) \vee (P_2(x) \to P_3(x))).$$

В первой формуле не связаны предметные переменные y и z, а во второй – z.

Формулы

$$\forall x\exists y\forall z(P_1(x, y, z) \vee P_2(x, z)),$$
$$\forall x\exists y(P(x, y) \to (A \to G(y)))$$

являются замкнутыми.

Логическое значение формулы ЛП зависит от предметной области Ω, на котором определены входящие в формулу предикаты. Кроме этого, для определения значения формулы ЛП необходимо знание:

1) значений, входящих в формулу переменных высказываний;

2) значений свободных предметных переменных из множества Ω;

3) значений предикатных переменных.

Преобразование формулы ЛП в высказывание (а также само получаемое высказывание) называется *интерпретацией этой формулы на множестве* Ω.

Если *формула ЛП замкнутая*, то ее интерпретация сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов, в результате чего формула превращается в конкретное высказывание (нульместный предикат).

Если *формула ЛП открытая*, то ее интерпретация состоит из двух этапов:

1) вместо всех предикатных переменных необходимо подставить конкретные предикаты, в результате чего формула превратится в конкретный предикат, зависящий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле;

2) каждой предметной переменной необходимо придать значение, от которого зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат (и, значит, вся исходная формула) превратится в конкретное высказывание (истинное или ложное).

Пример 4.5. Дать интерпретации формуле $\forall x\exists yP(x, y)$.

Данная формула не имеет свободных переменных. Поэтому для построения интерпретации данной формулы нам достаточно задать множество предметов x и y, а также определить предикат $P(x, y)$.

В качестве множества Ω возьмем множество всех мужчин, а вместо предикатной переменной $P(x, y)$ подставим конкретный предикат, определенный на Ω, «x есть отец y».

В данной интерпретации формула превратится в высказывание: «у каждого мужчины есть сын». Очевидно, что в данной интерпретации рассмотренная формула логики предикатов принимает значение 0.

Этой же формуле дадим другую интерпретацию. В качестве множества Ω возьмем множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$, а вместо предикатной переменной $P(x, y)$ подставим предикат «$x < y$», определенный на $\boldsymbol{N}^2$. Тогда получим истинное высказывание – «Для любого натурального числа x существует большее по сравнению с ним натуральное число y». □

Пример 4.6. Дать интерпретацию формуле α:

$$\exists z(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z)) \rightarrow R.$$

Данная формула содержит свободные переменные x и y.

В качестве множества Ω возьмем множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Вместо предикатных переменных $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ подставим трехместные предикаты «$x \cdot y = z$» и «$x + y = z$», соответственно, а вместо высказывания R подставим ложное высказывание «$2 = 4$».

Посмотрим, в какие высказывания может превращаться данный предикат при подстановке вместо его переменных x и y конкретных натуральных чисел. Очевидно, что формула $\exists z(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$, представляющая собой часть формулы α, является истинным высказыванием при любой подстановке вместо его предметных переменных x и y натуральных чисел (всегда можно найти такое натуральное число k, что $m \cdot n \neq k$ и $m + n \neq k$, при котором высказывания $m \cdot n = k$ и $m + n = k$ будут ложными, а высказывание $(m \cdot n = k) \rightarrow (m + n = k)$ – истинным). Тогда истинным будет также высказывание $\exists z(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$. А высказывание, в которое превращается формула α, будет ложным, так как посылка формулы истинна, а ее заключение ложно.

Очевидно, что если в данной интерпретации в качестве высказывания R взять истинное высказывание, то формула превратится в истинное высказывание. □