Лекция (17 марта 2020 года)

Задание:

1. **Изучить материал.**
2. **Составить письменный конспект.**

Содержание лекции

3.6. Непротиворечивость исчисления высказываний

Формулы ИВ можно *интерпретировать* как формулы АВ. Для этого свободные переменные ИВ будем трактовать как переменные АВ, т.е. переменные в содержательном смысле, принимающие значения 1 и 0 («истина» и «ложь»). Операции конъюнкция, дизъюнкция и отрицание определим так же, как в алгебре высказываний. Тогда любая формула при любых значениях переменных будет принимать одно из значений 1 или 0, вычисляемое по правилам АВ.

Произведем теперь в произвольной формуле ИВ α замену входящих в нее переменных высказываний формулами $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{I}$ ($\alpha_{ИВ}$). Теперь рассмотрим интерпретацию этой формулы в АВ, т.е. формулу $\alpha_{АВ}$, у которой переменные высказывания могут принимать значения 1 или 0. При этом присвоим значение 1 тем переменным высказываниям из $\alpha_{АВ}$, которые в $\alpha_{ИВ}$ были заменены формулой $\mathfrak{R}$, и, соответственно, 0, если они были заменены формулой $\mathfrak{I}$.

Теорема 3.6. *Если* $\alpha_{АВ}=1$ (*или* $\alpha_{АВ}=0$), *то при соответствующей замене в* $\alpha_{ИВ}$ *получим* $\vdash\alpha(\mathfrak{R},\mathfrak{I})\sim\mathfrak{R}$ (*или* $\vdash\alpha(\mathfrak{R},\mathfrak{I})\sim\mathfrak{I}$).□

Логическое исчисление называется *непротиворечивым*, если в нем не выводимы никакие две формулы, из которых одна является отрицанием другой.

Непротиворечивое исчисление – это такое исчисление, что, какова бы ни была формула α, никогда формулы α и $\overline{\alpha}$ не могут быть одновременно выведены из аксиом этого исчисления с помощью указанных в нем правил.

Если в исчислении обнаруживаются выводимые формулы вида α и $\overline{\alpha}$, т.е. имеет место

$$\vdash(\alpha\,\&\,\overline{\alpha}),$$

то такое *исчисление* называется *противоречивым*.

Множество формул Γ называется *противоречивым*, если $\Gamma\vdash\alpha\,\&\,\overline{\alpha}$.

Теорема 3.7. *Формула* φ *выводима из множества формул* Γ, т.е. $\Gamma\vdash\varphi$, *тогда и только тогда, когда множество* $\Gamma\cup\{\overline{\varphi}\}$ *– противоречиво*. □

Теорема 3.8 (теорема о непротиворечивости: исчисления высказываний). *Исчисление высказываний непротиворечиво.*

Доказательство. Выше было установлено, что каждую формулу ИВ одновременно можно рассматривать как формулу АВ. Покажем, что все формулы, выводимые в ИВ и рассмотренные как формулы АВ, являются тождественно истинными. В ИВ выводимыми считаются аксиомы, а также формулы, полученные из аксиом при помощи правил вывода. Следовательно, для доказательства теоремы нам нужно доказать тождественную истинность этих формул, рассмотренных как формулы АВ.

Все аксиом ИВ являются тождественно истинными формулами, если их рассматривать в АВ. Это легко непосредственно проверить, например, при помощи построения таблиц истинности.

Покажем теперь, что если формула $\alpha(A)$, содержащая переменное высказывание A, тождественно истинна, то формула $\alpha(\beta)$, полученная из $\alpha(A)$ с помощью операции подстановки, также тождественна истинна.

Действительно, $\alpha(A)$ при всех значениях переменных высказываний принимает значение 1. Тогда $\alpha(1)$ и $\alpha(0)$ имеют значение 1, каковы бы ни были значения других переменных высказываний. Но β при любых значениях переменных высказываний может принимать только значение 1 или 0. Отсюда следует, что $\alpha(\beta)$ всегда будет иметь значение 1.

Теперь докажем, что формулы, получаемые с помощью правила заключения из выводимых формул, также будут тождественно истинными в АВ, т.е. если $\alpha = 1$ и $(\alpha \to \beta) = 1$, то и $\beta = 1$. Очевидно, что при таких условиях β ни при каких значениях, входящих в нее переменных высказываний, не может принять значение 0. Следовательно, $\beta = 1$.

Итак, было доказано, что все аксиомы – тождественно истинные формулы и в результате применения к ним правил вывода получаются также тождественно истинные формулы. *Отсюда следует, что все выводимые формулы исчисления высказываний, рассматриваемые как формулы алгебры высказываний, являются тождественно истинными.* В таком случае ясно, что если формула α выводима в исчислении высказываний, то формула $\overline{\alpha}$ не может быть выведена, так как α – тождественно истинная формула, тогда $\overline{\alpha}$, наоборот, принимает значение 0 при всех значениях входящих переменных высказываний. Следовательно, исчисление высказываний является непротиворечивым исчислением. □

3.7. Полнота исчисления высказываний

Логическое исчисление называется *полным в широком смысле*, если в нем выводима любая тождественно истинная формула.

Теорема 3.9 (теорема о полноте ИВ в широком смысле). *Всякая тождественно истинная формула АВ выводима в ИВ.*

Доказательство. Пусть формула α содержит ровно n переменных высказываний: $\alpha = \alpha(A_1, A_2, ..., A_n)$.

Определим для нее по индукции формулу

$$\prod_{\delta_1,...,\delta_n = \Re,\Im} \alpha(\delta_1,...,\delta_n)\,. \tag{3.12}$$

Если $n = 1$, то $\prod_{\delta_1 = \Re,\Im} \alpha(\delta_1) = \alpha(\Re)\,\&\,\alpha(\Im)$.

Пусть α – произвольная тождественно истинная формула АВ. Рассмотрим следующую формулу:

$$\vdash \prod_{\delta_1,...,\delta_n = \Re,\Im} \alpha(\delta_1,...,\delta_n) \to \alpha(A_1, A_2, ..., A_n)\,. \tag{3.13}$$

Так как формула $\alpha = \alpha(A_1, A_2, ..., A_n)$ тождественно истинна, тогда любая подстановка формул $\Re, \Im$ вместо $A_1, A_2, ..., A_n$ в формулу α приводит к выводимой в ИВ формуле. Следовательно, в формуле

$$\prod_{\delta_1,...,\delta_n = \Re,\Im} \alpha(\delta_1,...,\delta_n),$$

являющейся посылкой в (3.13), все сомножители – вводимые формулы, а значит, и вся эта формула выводима. Применив теперь к (3.13) правило заключения, получим, что формула $\alpha(A_1, A_2, ..., A_n)$ выводима в ИВ. Таким образом, полнота в широком смысле исчисления высказываний доказана □

Полнота ИВ в широком смысле и его непротиворечивость дают возможность сопоставить два понятия «*выводимая в ИВ формула*» и «*тождественно истинная формула*». Следовательно, справедливо следующее следствие теоремы.

Следствие. *В ИВ верны утверждения:*

$\vdash (\alpha \& \beta) \sim (\beta \& \alpha)$,

$\vdash (\alpha \vee \beta) \sim (\beta \vee \alpha)$,

$\vdash ((\alpha \& \beta) \& \gamma) \sim (\alpha \& (\beta \& \gamma))$,

$\vdash ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \sim (\alpha \vee (\beta \vee \gamma))$,

$\vdash ((\alpha \& \beta) \vee \gamma) \sim ((\alpha \vee \beta) \& (\alpha \vee \gamma))$,

$\vdash ((\alpha \vee \beta) \& \gamma) \sim ((\alpha \& \beta) \vee (\alpha \& \gamma))$,

$\vdash (\alpha \to \beta) \sim (\overline{\alpha} \vee \beta)$,

$\vdash (\overline{\alpha \vee \beta}) \sim (\overline{\alpha} \& \overline{\beta})$,

$\vdash (\overline{\alpha \& \beta}) \sim (\overline{\alpha} \vee \overline{\beta})$.

Логическое исчисление называется *полным в узком смысле,* если присоединение к его аксиомам какой-нибудь невыводимой в нем формулы приводит к противоречию.

Теорема 3.10 (теорема о полноте ИВ в узком смысле). *ИВ полно в узком смысле.*

Доказательство проводится при использовании конъюнктивно нормальных форм. □

3.8. Независимость системы аксиом исчисления высказываний

Для всякого аксиоматического исчисления возникает вопрос о независимости его аксиом. Вопрос этот ставиться так: *можно ли какую-нибудь аксиому логического исчисления вывести из остальных его аксиом, применяя при этом правила вывода данного исчисления?*

Если для некоторого исчисления это возможно, то эту аксиому можно исключить из списка аксиом, и логическое исчисление при этом не измениться, т.е. класс выводимых формул останется без изменений.

Аксиома А логического исчисления независима от всех остальных аксиом данного исчисления, если она не может быть выведена из них.

Система аксиом логического исчисления независима, если каждая аксиома данного исчисления независима.

Теорема 3.11 (теорема о независимости системы аксиом исчисления высказываний). *Система аксиом ИВ независима*.

Доказательство. Для доказательства независимости аксиомы А исчисления высказываний будем интерпретировать переменные исчисления как переменные, принимающие два значения, которые будем обозначать буквами И и Л, где И играет роль истины, а Л – лжи.

Операции конъюнкцию, дизъюнкцию, импликацию и отрицание определим так, чтобы соблюдались следующие условия:

1) все аксиомы ИВ, кроме аксиомы А, при всех значениях переменных принимают значение И;

2) каждая формула ИВ, выводимая из совокупности всех отличных от А аксиом исчисления высказываний, также принимает значение И при всех значениях входящих переменных;

3) аксиома А исчисления высказываний принимает значение Л при некоторых значениях входящих в нее переменных.

Таким образом, для доказательства независимости аксиомы А от других аксиом ИВ достаточно провести такую интерпретацию. Действительно, если бы аксиома А была бы выводима из остальных аксиом ИВ, то согласно условию 2) она бы принимала значение И при всех значениях переменных, а это бы противоречило условию 3).

Пусть формулы, в которых вместо переменных подставлены некоторые их значения, также имеют смысл. Например, И & Л, И $\to A$ и т.д. Предположим также, что формулы, которые принимают одинаковые значения при всех заменах входящих в них переменных на значения И, Л, будут считаться равными $A = B$. Причем будем считать, что знак равенства связывает слабее логических связок конъюнкции, дизъюнкции и импликации.

Докажем независимость аксиомы А.II.1.

С этой целью определим все логические операции, кроме конъюнкции, как в АВ. Операцию конъюнкции определим равенством $A \mathbin{\&} B = B$.

Выпишем эту интерпретацию подробно:

И → И = И; Л → Л = И; Л → И = И; И → Л = Л;

И ∨ И = И; И ∨ Л = И; Л ∨ И = И; Л ∨ Л = Л;

$\overline{\text{И}}$ = Л; $\overline{\text{Л}}$ = И;

И & И = И; И & Л = Л; Л & И = И; Л & Л = Л.

Проверим выполнимость условий 1)–3).

Все операции в данной интерпретации, кроме конъюнкции, определены так же, как и в АВ, где они являются тождественно истинными формулами. Следовательно, аксиомы групп I, III, IV в данной интерпретации принимают значения И при всех значениях переменных.

Рассмотри аксиомы А.II.1, А.II.2, А.II.3.

Аксиомы А.II.2 и А.II.3 в данной интерпретации принимают вид $B \to B$ и $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to C))$. Эти формулы являются тождественно истинными в АВ. Поэтому в данной интерпретации они всегда принимают значение И.

Аксиома А.II.1 не равна тождественно И, так как в данной интерпретации она равносильна формуле $A \to B$, которая при A = И, B = Л принимает значение Л.

Остается доказать, что формулы, полученные путем использования правил вывода из формул, которые тождественно равны И, сами равны И. Но ранее было доказано, что правила подстановки и заключения, примененные к тождественно истинным формулам, приводят к тождественно истинным формулам. Следовательно, условие 2) выполнено.

Таким образом, независимость аксиомы А.II.1 доказана.

По аналогичной схеме доказывается независимость остальных аксиом исчисления высказываний групп II, III, IV □

3.9. Метод резолюций в исчислении высказываний

Метод резолюций является эффективным методом автоматического доказательства выводимости формул. Данный метод лежит в основе логического программирования.

Для обоснования метода рассмотрим необходимые определения и теоремы.

Пусть $D_1 = D_1' \vee A$ и $D_2 = D_2' \vee \overline{A}$ дизъюнкты (элементарные дизъюнкции).

Дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 по литере A* и обозначается $\mathrm{res}_A(D_1, D_2)$.

Резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 называется их резольвента по некоторой литере и обозначается через $\mathrm{res}(D_1, D_2)$.

Резольвента контрарных литер равна 0, т.е. $\mathrm{res}(A, \overline{A}) = 0$. Здесь нуль будет отождествляться с формулой $A \mathbin{\&} \overline{A} = 0$.

Если дизъюнкты D_1 и D_2 не содержат контрарных литер, то резольвент у них не существует.

Пример 3.6. Если $D_1 = \overline{A} \vee B \vee C$, $D_2 = A \vee \overline{B} \vee D$, то

$$\mathrm{res}_A(D_1, D_2) = B \vee C \vee \overline{B} \vee D,$$
$$\mathrm{res}_B(D_1, D_2) = \overline{A} \vee C \vee A \vee D,$$
$$\mathrm{res}_C(D_1, D_2) \text{ и } \mathrm{res}_D(D_1, D_2) \text{ не существуют.} \square$$

Теорема 3.12. *Если резольвента* res(D_1, D_2) *существует и не равна нулю, то* $D_1, D_2 \vdash$ res(D_1, D_2). □

Теорема 3.13. *Если резольвента* res(D_1, D_2) *равна нулю, то множество дизъюнктов* D_1 *и* D_2 *противоречиво, т.е.* $D_1, D_2 \vdash$. □

Пусть $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$ множество дизъюнктов. Последовательность формул $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ называется *резолютивным выводом из множества S*, если для каждой формулы φ_i ($i = 1, \ldots, n$) выполняется одно из следующих условий:

1) $\varphi_i \in S$;
2) существуют $j, k < i$ такие, что φ_i = res(φ_j, φ_k).

Теорема 3.14. (теорема о полноте метода резолюций). *Множество дизъюнктов S противоречиво в том и только в том случае, когда существует резолютивный вывод из S, заканчивающийся символом* 0. □

Метод резолюции можно использовать для проверки выводимости формулы φ из данного множества формул $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Действительно, условие

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi,$$

согласно Т. 3.7 равносильно условию

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \overline{\varphi} \vdash,$$

что в свою очередь равносильно условию

$$\psi \vdash, \text{ где } \psi = \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \varphi_n \,\&\, \overline{\varphi}.$$

Приведем формулу ψ к КНФ: $\psi = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \ldots \,\&\, D_m$, тогда

$$\psi \vdash \;\Leftrightarrow\; D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \ldots \,\&\, D_m \vdash \;\Leftrightarrow\; D_1, D_2, \ldots, D_m \vdash .$$

Таким образом, задача проверки выводимости $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$ сводится к проверке противоречивости множества дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \ldots, D_m\}$, что равносильно существованию резолютивного вывода 0 из S.

Пример 3.7. Проверить методом резолюций выводимость формулы $A \to (B \to F)$ из набора формул $A \to (B \to C)$, $(C \,\&\, D) \to E$, $\overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E})$, т.е.

$$A \to (B \to C), (C \,\&\, D) \to E, \overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E}) \vdash A \to (B \to F).$$

Согласно методу резолюций, для доказательства выводимости данной формулы из данного набора формул необходимо проверить на противоречивость множество формул:

$$S = \{(A \to (B \to C)),\ ((C \,\&\, D) \to E),\ (\overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E})), \overline{A \to (B \to F)}\}.$$

Приведем все формулы из S к КНФ:

$(A \to (B \to C)) = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C)$;

$((C \,\&\, D) \to E) = (\overline{(C \,\&\, D)} \vee E) = (\overline{C} \vee \overline{D} \vee E)$;

$(\overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E})) = (F \vee (D \,\&\, \overline{E})) = ((F \vee D) \,\&\, (F \vee \overline{E}))$;

$\overline{A \to (B \to F)} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee F} = (A \,\&\, B \,\&\, \overline{F})$.

Отсюда получаем множество дизъюнктов, который необходимо проверить на противоречие:

$$S' = \{\overline{A} \vee \overline{B} \vee C, \overline{C} \vee \overline{D} \vee E, F \vee D, F \vee \overline{E}, A, B, \overline{F}\}.$$

Построим резолютивный вывод из S':

1) $\mathrm{res}_A(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C,\ A) = \overline{B} \vee C$;

2) $\mathrm{res}_B(\overline{B} \vee C,\ B) = C$;

3) $\mathrm{res}_D(\overline{C} \vee \overline{D} \vee E,\ F \vee D) = \overline{C} \vee E \vee F$;

4) $\mathrm{res}_E(\overline{C} \vee E \vee F,\ F \vee \overline{E}) = \overline{C} \vee F$;

5) $\mathrm{res}_C(\overline{C} \vee F,\ C) = F$;

6) $\mathrm{res}_F(F,\ \overline{F}) = 0$.

Таким образом, по теореме о полноте метода резолюции (Т. 3.14) множество S противоречиво, а, значит, формула $A \to (B \to F)$ выводима из набора формул $A \to (B \to C)$, $(C \& D) \to E$, $\overline{F} \to (D \& \overline{E})$. □

Вопросы для самопроверки

1. *Какое логическое исчисление называется противоречивым?*
2. *Какое логическое исчисление называется непротиворечивым?*
3. *Противоречиво ли исчисление высказываний?*
4. *При выполнении какого условия множество формул Г называется противоречивым?*
5. *Докажите, что исчисление высказываний непротиворечиво.*
6. *Какое логическое исчисление называется полным в узком смысле?*
7. *Какое логическое исчисление называется полным в широком смысле?*
8. *Полно ли в узком смысле исчисление высказываний?*
9. *Полно ли в широком смысле исчисление высказываний?*
10. *Сформулируйте определение понятию «независимая система аксиом».*
11. *Является ли система аксиом исчисления высказываний независимой?*
12. *С помощью метода резолюций проверьте следующее соотношение:*

$$(\overline{A} \vee C), (C \to B), (B \to A) \vdash (A \to (B \to C))\ .$$