АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ

Развитие математики во многом стимулируется математическими проблемами.

Хорошо поставленная математическая проблема, решение которой не удается найти, говорит о необходимости критического пересмотра существующих методов исследования, о недостаточности той совокупности знаний, к которой относится проблема, и, таким образом, способствует дальнейшему развитию этой области.

Каждый исторический период развития математики содержал проблемы, которые занимали умы лучших математиков того времени, чьи усилия привели к серьезному продвижению науки, а их имена вошли в золотой фонд математической культуры.

Для древнего периода – это три знаменитые задачи греческих математиков:

1) **об удвоении куба** (с помощью циркуля и линейки построить куб, объем которого в два раза превосходит объем заданного куба);
2) **трисекции угла** (теми же средствами разделить угол на три равные части);
3) **квадратуры круга** (таким же образом построить квадрат, площадь которого равна площади заданного круга).

Эти проблемы стали средством проникновения в новые области математики. В связи с этими проблемами были открыты конические сечения, некоторые кривые третьего и четвертого порядков и трансцендентная кривая, названная квадратиссой.

В средние века усилия математиков были направлены на **поиски решения в радикалах уравнений выше второй степени**, т.е. в возможности записи корней уравнения, исходя из его коэффициентов, применением лишь четырех арифметических операций и операции извлечения корня целой натуральной степени (радикальных операций, или радикалов).

В XVI веке итальянские математики Сципион дель Ферро (1465–1526), Николло Тартальи (1499–1557), Джероламо Кардана (1501–1576), Лодовико Феррари (1522–1565) нашли общие решения уравнений третьей и четвертой степеней.

Николло Тартальи

Джероламо Кардана

Лодовико Феррари

В XIX веке норвежский математик Нильс Хенрик Абель (1802–1829) доказал невозможность такого решения для уравнений выше четвертой степени, а французский математик Эварист Галуа (1811–1832) сформулировал необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти уравнения имели решения в радикалах.

Нильс Хенрик Абель

Эварист Галуа

Более общая проблема – поиск решения уравнений от нескольких переменных с целыми коэффициентами (так называемых диофантовых уравнений).

Важность поиска решений таких уравнений обусловлена, в частности, тем, что многие математические проблемы сводятся к решению конкретного диофантова уравнения, точнее к вопросу о существовании решения конкретно заданного диофантова уравнения.

Давид Гильберт
(1862–1943)

Проблему нахождения алгоритма, который бы позволил по произвольному диофантовому уравнению определить, имеет оно решение в целых числах или нет, знаменитый немецкий математик Давид Гильберт сформулировал в своем докладе «Математические проблемы», прочитанном на Международном математическом конгрессе в Париже в 1890 году, под номером 10 среди 23 других проблем. С тех пор были предприняты многочисленные попытки поиска такого алгоритма, оказавшиеся безуспешными. Возникло подозрение о неразрешимости этой проблемы (а также целого ряда других проблем, связанных с поиском соответствующего алгоритма).

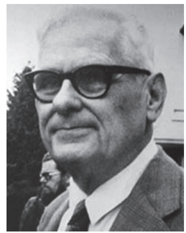
Однако, пользуясь только интуитивным представлением об алгоритме нельзя доказать отсутствие алгоритма решения конкретной математической задачи. Возниклп необходимость сделать понятие «алгоритм» точным математическим понятием. Для этого нужно было описать условия, которые присущи любому алгоритму, причем совокупность этих условий должна была быть «полной» в следующем смысле: если для конкретной математической проблемы окажется, что для ее решения не существует алгоритма, удовлетворяющего этой совокупности условий, то необходимо согласиться с тем, что проблема «алгоритмически неразрешима», т.е. **алгоритм его решения не будет найден и в будущем** (последнее нужно, чтобы исключить дальнейшие попытки поиска такого алгоритма).

Такие уточнения понятия «алгоритм» были сделаны в 1930-х годах в работах:

- Алана Тьюринга (машины Тьюринга),
- Эмиля Поста (машины Поста),
- Алноза Чёрча (λ-конверсии Черча),
- Андрея Андреевича Маркова (нормальные алгоритмы Маркова).

Алан Тьюринг
(1912–1954)

Эмиль Пост
(1897–1954)



Алнозо Чёрч
(1903–1995)

А.А. Марков
(1903–1979)

Соответствующие утверждения *об алгоритмической разрешимости математической проблемы только если для ее решения существует алгоритм* в смысле одного из этих утончений, носят названия тезис Тьюринга, тезис Чёрча и принцип нормализации Маркова.

Тезис Чёрча. *Каждая вычислимая функция частично рекурсивна.*

Тезис Тьюринга. *Всякий алгоритм* (*в интуитивном понимании этого слова*) *может быть реализован некоторой машиной Тьюринга*.

Принцип нормализации. *Всякий алгоритм в A вполне эквивалентен относительно A некоторому нормальному алгоритму над A*.

Очевидно, что эти высказывания не могут быть доказаны.

Опровергнуть эти тезисы можно только если будет получено описание, которое согласуется с интуитивным понятием алгоритма, но не принадлежит ни одному из названных выше классов алгоритмических моделей.

Все названные уточнения алгоритма эквиваленты в следующем смысле: *если существует алгоритм решения задачи по одному из этих описаний, то можно построить алгоритм решения той же задачи по любому из остальных описаний.*

Работы Тьюринга и его коллег перестроили здание современной математики. В ней появились новые, теперь уже достаточно развитые направления, связанные с исследование и классификацией алгоритмически неразрешимых проблем. Как оказалось, многие проблемы, алгоритмы решения которых долгие годы не давалось найти, алгоритмически неразрешимы.

В частности, такой оказалась и проблема существования решения произвольного диофантового уравнения. Это доказал в 1971 году российский математик Юрий Владимирович Матиясевич.

Рассмотрим некоторые из знаменитых математических проблем, которые столетиями будоражили умы лучших математиков мира.

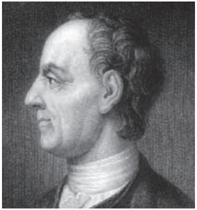
1. **«Великая теорема Ферма» об отсутствии решения в целых числах уравнения вида $x^n + y^n = z^n$, при $n > 2$.** Проблема возникла во второй половине XVII века при изучении научного наследия французского математика Пьера Ферма и оставалась нерешенной вплоть до недавнего времени, несмотря на усилия многих математиков. Решение было найдено в конце XX века английским математиком Эндю Уайлсом, который использовал для ее решения сложный аппарат теории чисел и теории эллиптических кривых.

Пьер де Ферма
(1601–1665)

Эндрю Джон Уайлс
(род. в 1953 г.)

2. Гипотеза Гольбаха о возможности разложения произвольного натурального числа, большего или равного шести, в виде суммы трех простых чисел (эта гипотеза до сих пор не доказана и не опровергнута). Эта гипотеза была сформулирована немецким математиком Христианом Гольдбахом в 1972 году в письме к Леонарду Эйлеру. В ответном письме Эйлер выдвинул встречную гипотезу о том, что каждое четное число, большее двух, есть сумма двух простых чисел. Из справедливости гипотезы Эйлера следует справедливость гипотезы Гольдбаха (достаточно из нечетного числа, большего шести, отнять число 4 и к полученному четному числу применить гипотезу Эйлера).

Христиан Гольдбах
(1690–1764)



Леонард Эйлер
(1707–1783)

В настоящее время гипотезу о возможности представления нечетных натуральных чисел, больших пяти, в виде суммы трех натуральных чисел принято называть *тернарной* (или *ослабленной*) *проблемой Гольдбаха*, а гипотезу Эйлера – *бинарной проблемой Гольдбаха*.

И.М. Виноградов
(1891–1983)

Тернарная проблема Гольбаха была доказана российским математиком Иваном Матвеевичем Виноградовым в 1937 году для достаточно больших (как установили ученики Виноградова, не превосходящих 106 846 168) нечетных чисел. Однако число 106 846 168 слишком велико (содержит около 7 млн цифр), чтобы тернарную проблему Гольдбаха считать полностью решенной: прямая проверка гипотезы для всех меньших чисел за реальное время невозможна даже с использованием современных компьютеров.

В 1997 году французский математик Жан-Марк Дезуйе, голландский математик Херман тэ Риле, американский математик Гоув Эффингер и российский математик Дмитрий Викторович Зиновьев в совместной работе доказали, что обобщенная гипотеза Римана влечет справедливость слабой проблемы Гольдбаха для чисел больших 10^{20}. Справедливость гипотезы для меньших, чем 10^{20}, чисел легко проверить на компьютере.

В 1937 году упомянутый выше Иван Матвеевич Виноградов доказал, что почти все четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел. Затем в 1995 году французский математик Оливье Рамаре установил, что любое целое число представимо в виде суммы не более чем шести простых чисел.

Наконец, в 1966 году китайский математик Чэнь Цзинжунь доказал, что любое достаточно большое четное число представимо в виде суммы двух простых чисел, либо в виде суммы простого числа и произведения двух простых чисел (например, $60 = 11 + 7 \times 7$).

3. **Проблема о нахождении закона распределения простых чисел на числовой последовательности** – одна из наиболее трудных проблем, также все еще не имеющая полного решения, несмотря на многочисленные усилия (крупный вклад в исследование этой проблемы внесли наши соотечественники П.Л. Чебышев, И.М. Виноградов, Ю.В. Линник, Н.Г. Чудаков, Л.Г. Шнирельман и мн. др.).

С XVIII века предпринимались попытки систематизировать важнейшие математические проблемы с целью направить усилия математиков на их решение. С этого же времени (по крайней мере по дошедшей до нас информации) стали поощрять ученых за решение конкретных математических проблем денежными премиями.

Первая такая премия в 125 тысяч ливров была учреждена Парижской Академией наук в 1725 году.

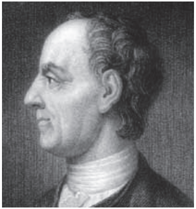
Среди наиболее известных имен, получивших эту премию:

- в 1734 году Даниил и Иоганн Бернулли (за исследование влияния солнечной атмосферы на орбиты планет);

Даниил Бернулли
(1700–1782)

Иоганн Бернулли
(1667–1748)

- в 1748 году Леонард Эйлер (за исследование «проблемы трех тел», в данном случае это Юпитер, Сатурн и солнце);
- в 1772 году Леонард Эйлер и Луи Лагранж за работы по той же проблеме;
- в 1765 году Луи Лагранж за исследование траекторий движения спутников Сатурна;
- в 1815 году Огюстен Коши за исследование уравнений, характеризующих распространение волн;



Леонард Эйлер
(1707–1783)

Луи Лагранж
(1736–1813)

Огюстен Коши
(1789–1857)

- в 1830 году Нильс Хенрик Абель (посмертно) и Карл Якоби за открытие (независимо друг от друга) эллиптических функций;
- в 1880 году Анри Пуанкаре за разработку теории автоморфных функций и установление связи между неевклидовой геометрией и зарождающейся в те годы теорией римановых поверхностей.

Нильс Хенрик Абель
(1802–1829)

Карл Якоби
(1804–1851)

Анри Пуанкаре
(1854–1912)

В 1746 году знаменитый французский математик Жан Лерон Даламбер за свой труд «Размышления об общей причине ветров (Reflexions sur la cause generate de vents)» получил премию, учрежденную Берлинской академией наук.

В 1823 году великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс за работу о конформном отображении одной поверхности на другую получил премию, учрежденную Датской академией наук.

Жан Лерон Даламбер
(1717–1783)

Карл Фридрих Гаусс
(1777–1855)

В 1906 году было оглашено завещание немецкого банкира еврейского происхождения и любителя математики Пауля Вольфскеля (Paul Wolfskehl), в котором он назначил премию в 100 тысяч золотых немецких марок за доказательство «Великой Теоремы Ферма».

Королевское общество наук Геттингена создало специальный комитет, который в 1907 году опубликовал условия получения премии. В частности, было предусмотрено, что если проблема имеет положительное решение, то претендент на премию должен дать описание условий, которым должны удовлетворять натуральные числа *n,* при которых уравнение имеет решение.

Как известно, проблема оставалась нерешенной вплоть до 1997 года. Премию Вольфскеля получил в 1997 году решивший эту проблему английский математик Эндрю Уайлс. На тот момент денежное ее содержание составило 75 тысяч немецких марок (примерно 37 тысяч долларов США).

23 «наиболее интересные», с точки зрения самого Гильберта, математические проблемы, «исследование которых может значительно стимулировать дальнейшее развитие науки» оказали исключительное влияние на математику XX столетия. К решению проблем Гильберта приложили свои усилия талантливые математики.

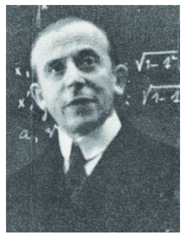
К настоящему времени почти все проблемы Гильберта решены. Нерешенными остаются 8-я, 12-я и 16-я проблемы.

Несмотря на достигнутые успехи в их решении, нерешенными можно считать и 4-ю и 6-ю проблемы.

В 4-й проблеме речь идет о построении геометрий, «близких» к обыкновенной евклидовой геометрии. Несмотря на большое количество работ в этом направлении проблема слишком расплывчато сформулирована, чтобы понять, ее решение получено или нет.

В 6-й проблеме речь идет об «аксиоматическом построении тех физических дисциплин, в которых математика играет ведущую роль: это в первую очередь теория вероятностей и механика, причем аксиоматическое построение физических дисциплин Гильберт предлагал провести по образцу аксиом геометрии. По этой проблеме большие успехи достигнуты в аксиоматическом изложении теории вероятностей (в работах Сергея Натановича Бернштейна и Рихарда Эндрю фон Мизеса, Андрея Николаевича Колмогорова).

С.Н. Бернштейн
(1880–1968)



Рихард Эндрю фон Мизес
(1883–1953)

А.Н. Колмогоров
(1903–1987)

Среди авторов решений проблем Гильберта много российских (советских) математиков:

- Лев Семенович Понтрягин и Анатолий Иванович Мальцев (вклад в решение 5-й проблемы);
- Александр Осипович Гельфонд (решение 7-й проблемы);

Л.С. Понтрягин (1908–1988)

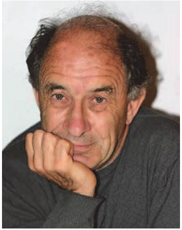
А.И. Мальцев (1883–1953)

А.О. Гельфонд (1906–1968)

- Иван Матвеевич Виноградов и Лев Генрихович Шнирельман (вклад в решение 8-й проблемы – гипотезы Гольдбаха);
- Владимир Игоревич Арнольд и Андрея Николаевича Колмогоров (13-я проблема);

И.М. Виноградов (1891–1983)

Л.Г. Шнирельман (1905–1938)



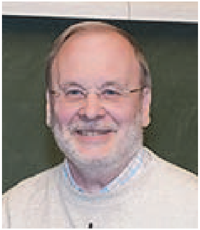
В.И. Арнольд (1937–2010)

А.Н. Колмогоров (1903–1987)

- Игорь Ростиславович Шафаревич (вклад в решение 12-й проблемы);
- Юрий Владимирович Матиясевич (10-я проблема);
- Владимир Леонидович Попов (решение 14-й проблемы);
- Иван Георгиевич Петровский (вклад в решение 16-й и 20-й проблем);

И.Р. Шафаревич (1923–2017)

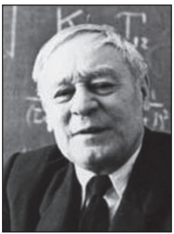
Ю.В. Матиясевич (род. в 1947 г.)



В.Л. Попов (род. в 1946 г.)

И.Г. Петровский (1903–1987)

- Борис Николаевич Делоне (вклад в решение 18-й проблемы);
- Сергей Натанович Бернштейн (19-я проблема и вклад в решение 20-й проблемы);
- Ольга Александровна Ладыженская и Нина Николаевна Уральцева (вклад в решение 20-й проблемы).



Б.Н. Делоне
(1890–1980)

С.Н. Бернштейн
(1880–1968)

О.А. Ладыженская
(1922–2004)

Н.Н. Уральцева
(род. в 1934 г.)

Кроме того, многие советские ученые принимали участие в разработке направления, вызванного (не очень определенно сформулированной) 23-й проблемой Гильберта: Л.С. Понтрягин, А.Г. Сигалов, О.А. Ладыженская и Н.Н. Уральцева, Л.А. Люетерник, М.М. Вайнберг, Л.Г. Шнирельман и др.

Работы казанского математика академика Академии наук Республики Татарстан Т.К. Сиразетдинова 1960-х годов по разработке теории оптимальных процессов с распределенными параметрами также можно рассматривать как вклад в решение этой проблемы Гильберта.

Пока не найдено решения 8-й проблемы, в которой вокруг гипотезы Римана о распределении комплексных нетривиальных нулей дзета-фукнции Римана объединены несколько проблем теории чисел, в частности, упомянутые проблема Гольдбаха и проблема поиска закона распределения простых чисел.

В 1930-х годах по инициативе канадского математика Джона Филдса (1863–1932) была учреждена золотая медаль для математиков за выдающиеся достижения, которая получила название «филдсовской медали» и теперь считается эквивалентом нобелевской премии в области математики.

Джон Филдс

Вручение медали сопровождается денежным призом (в настоящее время в размере 15 тысяч американских долларов), но в отличие от нобелевской премии ее присуждают один раз в четыре года, специально созданным для этой цели «филдсовским комитетом».

Церемония вручения премии происходит во время работы Международного математического конгресса, который также проводится один раз в четыре года.

Первое вручение премии состоялось в 1936 году на Международном математическом конгрессе в Осло, через четыре года после смерти Филдса.

Первоначально предполагалось, что на каждом Математическом конгрессе будут присуждаться по две премии, но со временем их количество выросло от трех до четырех, в зависимости от решения филдсовского комитета.

Премии присуждаются ученым, возраст которых на время присуждения премии не превосходит 40 лет, хотя в положении о филдсовской медали такое условие не оговаривается.

Последнее присуждение филдсовских премий произошло в 2018 году.

Среди филдсовских лауреатов есть и отечественные (и бывшие) ученые:

- В 1970 году за работы по топологии обладателем премии стал Сергей Петрович Новиков (1938 г.р.);
- в 1978 году – Григорий Александрович Маргулис (1946 г.р.) за исследования в области алгебры Ли (с 1991 года проживает в США);
- в 1990 году – Владимир Гершонович Дринфельд (1954 г.р.) за исследования в области алгебры Ли (в 1998 году эмигрировал в США);
- в 1994 году – Ефим Исаакович Зельманов за доказательство ослабленной гипотезы Бёрнсайда (в 1987 году уехал в США);
- в 1998 году – Максим Львович Концевич (1964 г.р.) за результаты, полученные для теории узлов и теории струн (на момент получения премии он уже имел французское гражданство);

- в 2002 году – Владимир Александрович Воеводский (1966–2017) за вклад в алгебраическую геометрию и основания математики (в 1990 году эмигрировал в США);

- в 2006 году – Григорий Яковлевич Перельман (1966 г.р.) за доказательство гипотезы Пункаре (от премии отказался) и Андрей Юрьевич Окуньков (1969 г.р.) за достижения, соединяющие теорию вероятностей, теорию представлений и алгебраическую геометрию (с 1996 г ода проживает в США);

- в 2010 году – Станислав Константинович Смирнов (1970 г.р.) за доказательство конформной инвариантности двумерной перколяции и модели Изинга в статистической физике (с 2003 года проживает в Швейцарии).

Наиболее близкой к нобелевской премии является абелевская премия по математике, названная так в честь норвежского математика Н.-Г. Абеля, учрежденная правительством Норвегии в 2002 году.

Начиная с 2003 года абелевская премия ежегодно присуждается выдающимся математикам современности без возрастных ограничений. Денежный размер премии сопоставим с размером Нобелевской премии и в долларовом эквиваленте составляет (на 2010 год) около одного миллиона долларов США.

Целью учредителей премии было не только поощрение математиков с мировым именем, но и популяризация современной математики.

Среди лауреатов абелевской премии такие выдающиеся математики, как:

- Жан-Пьер Серр (2003);
- Майкл Ф. Атья (2004);
- Джон Г. Томпсон (2007) и др.

Из наших соотечественников этой престижной премии были удостоены:

- в 2009 году Михаил Леонидович Громов (1943 г.р.) за вклад в геометрию (работающий теперь во Франции и США);
- в 2014 году Яков Григорьевич Синай (1935 г.р.) (с 1993 года проживает в США);
- в 2020 году – Григорий Александрович Маргулис (с 1991 года проживает в США).

В России первые престижные денежные премии за математические работы присуждались в Московском (премия имени Н.Д. Брашмана за лучшую работу в области математики) и Казанском университетах.

В 1895 году Казанским физико-математическим обществом под руководством профессора А.В. Васильева по случаю празднованию 100-летнего юбилея Н.И. Лобачевского была учреждена международная премия имени Н.И. Лобачевского, Первое присуждение премии состоялось в 1897 году.

В 1947 году Постановлением Совета Министров СССР вручение премии имени Н.И. Лобачевского была передана в ведение Академии наук СССР. Сначала были учреждены основная и поощрительная премии для советских ученых. В 1956 г. вышло новое Постановление СМ СССР, согласно которому учреждалась лишь одна премия с периодичностью в 3 года.

Среди награжденных премией имени Лобачевского в этот период такие выдающиеся математики, как:

- Александр Данилович Александров (1951);
- Павел Сергеевич Александров (1972);
- Борис Николаевич Делоне (1977);
- Сергей Петрович Новиков (1981);
- Андрей Николаевич Колмогоров (1986);
- Лев Семенович Понтрягин (1966);
- Владимир Игоревич Арнольд (1992);
- Григорий Александрович Маргулис (1996);
- Юрий Григорьевич Решетняк (2000).

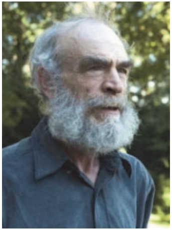
В ознаменование 200-летия со дня рождения Н.И. Лобачевского постановлением Кабинета Министров СССР была учреждена медаль имени Лобачевского, присуждаемая Ученым советом Казанского университета.

Согласно Положению о порядке присуждения медали, «медаль присуждается один раз в пять лет советским и зарубежным ученым за выдающиеся работы в области геометрии».

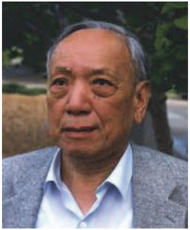
Первое присуждение медали состоялось в 1992 году. Она была присуждена профессору Казанского университета Александру Петровичу Нордену за создание метода нормализации и работы по теории неевклидовых пространств.

В 1997 году состоялось еще одно присуждение медали – Михаилу Леонидовичу Громову за цикл работ по теории погружений и белорусскому математику Борису Петровчиу Комракову за исследования по теории групп Ли и теории однородных пространств. Последнее присуждение медали состоялось в 2002 году. Медаль была присуждена профессору Нанькайском (Китай) и Калифорнийского университетов Шиинг-Шен Черну.


А.Н. Норден
(1904–1993)


М.Л Громов
(род. в 1943 г.)


Б.П. Комраков
(род. в 1948 г.)


Шиинг-Шен Черну
(1911–2004)

На рубеже двух тысячелетий Математический институт Клэя в Кембридже (США, Массачусетс) назначил миллионные (в долларах США) премии за решения «семи проблем тысячелетия» (the Millenium Prize Problems).

В число семи проблем тысячелетия вошли наиболее трудные и важные для последующего развития науки известные математические проблемы, на безуспешные поиски решений которых были направлены усилия многих математиков, работающих на рубеже этих двух тысячелетий. Эти семь проблем были выбраны Научным консультативным комитетом Института при участии ряда выдающихся математиков современности. Совет директоров Института назначил денежный приз в 7 миллионов долларов за их решения, по одному за каждую проблему.

24 мая 2000 года в Париже состоялось «Собрание тысячелетия», в котором известный английский математик Уильям Гауэрс (лауреат филдсовской премии 1998 года) прочел лекцию «О значении математики», а Джон Тэйт и Майкл Атья (он является еще и лауреатом филдсовской премии 1966 года) рассказали о самих проблемах.

Перечислим их:

1. Гипотеза Берча и Свиннертона-Дайера о множестве рациональных решений уравнений эллиптических кривых;

2. Гипотеза Ходжа из алгебраической геометрии об описании классов когомологий на комплексных проективных многообразиях, реализуемых алгебраическими подмногообразиями;

3. Проблема о существовании и гладкости решений уравнений Навье-Стокса, которые описывают движение вязкой жидкости;

4. Гипотеза Пуанкаре о гомеоморфности односвязных поверхностей сфере;

5. «*P* против *NP*» проблема (проблема о совпадении или различии классов сложности *P* и *NP*);

6. Гипотеза Римана о распределении нетривиальных нулей дзета-функции Римана (это – 8-я проблема Гильберта, тесно связанная с проблемой распределения простых чисел);

7. Проблема существования для любой простой компактной калибровочной группы *G* теории Янга-Миллса для пространства R^4 (проблема из области физики элементарных частиц).

Пятую из перечисленных проблем мы рассмотрим подробнее.

Введем сначала необходимые понятия.

Пусть A – некоторый (конечный) алфавит. Обозначим через A^* множество всех слов над алфавитом A.

Тогда **язык L над A** определяется как произвольное фиксированное подмножество A^*.

Например, если $A = \{0, 1\}$, то языками над A являются множество $\{0, 10, 100, 110, \ldots\}$ всех четных чисел, множество $\{10, 11, 101, 111, \ldots\}$ всех простых чисел в двоичной записи.

Машина Тьюринга распознает язык L, если начав работать над произвольным словом $P \in A^*$ (в ячейки ленты машины записываются по порядку символы слова P, а читающая головка обозревает крайний слева символ слова P в начальном состоянии q_1) она совершает допустимую остановку тогда и только тогда, когда слово P принадлежит языку L.

Машина Тьюринга распознает язык *L* за полиномиальное время, если существует полином $p(n)$ такой, что для любого слова P длины n (т.е. слово P содержит n символов языка A), машина Тьюринга распознает P за не более чем $p(n)$ машинных шагов.

При решении задач мы использовали только детерминированные машины Тьюринга. Существуют и недетерминированные машины.

Машина Тьюринга называется **детерминированной**, если каждой комбинации состояния и ленточного символа соответствует не более одного правила, и **недетерминированной** в противном случае.

После всех введенных понятий можем дать определение классам задач P и NP.

Класс *P* (от англ. polynomial) – множество языков, распознаваемых машинами Тьюринга за полиномиальное время.

Класс *NP* (от англ, non-deterministie polynomial) – множество языков, распознаваемых недетерминированными машинами Тьюринга за полиномиальное время.

Класс *NP* содержит такие фундаментальные задачи, как задача коммивояжера, проблема выполнимости булевых функций (для заданной булевой функции требуется определить, принимает она при некотором наборе значений аргументов значение «Истина»или нет).

Ни для одной из них на сегодняшний день не найдено полиномиального детерминированного алгоритма их решения, но они разрешимы за полиномиальное время на недетерминированных машинах Тьюринга.

Из определений классов P и NP видно, что $P \subset NP$. Равенство классов P и NP означало бы, что если существует недетерминированный алгоритм решения некоторой задачи за полиномиальное время, то существует и обычный (детерминированный) алгоритм решения этой задачи также за полиномиальное время.

Проблема $P = NP$ может быть сформулирована и по другому: *если положительный ответ на какой-то вопрос можно быстро проверить (за полиномиальное время), то правда ли, что ответ на этот вопрос можно быстро найти (за полиномиальное время и используя полиномиальную память)*?

Например, рассмотрим следующую задачу. Верно ли, что среди чисел $\{n_1, n_2, \ldots, n_m\}$ есть такие, что их сумма равна некоторому наперед заданному числу A?

В случае наличия положительного решения легко построить полиномиальный алгоритм проверки правильности найденного решения: достаточно выполнить несколько операция сложения чисел. Однако, до сих пор неизвестно, существует ли полиномиальный алгоритм поиска таких чисел. Решение можно найти, перебирая всевозможные суммы чисел, составленные из элементов этого множества (таких сумм 2^n), но снова остается открытым вопрос о существовании полиномиального алгоритма, позволяющего осуществить такой перебор.

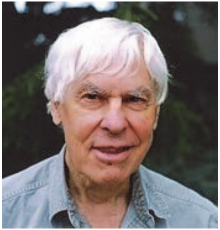
Г.Е. Перельман
(род. в 1966 г.)

Недавно петербургский математик Григорий Яковлевич Перельман получил решение одной из этих семи проблем – гипотезы Пуанкаре.

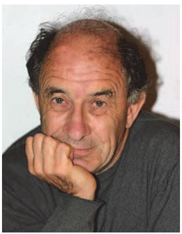
В 2002–2003 годах он опубликовал в Интернете три свои знаменитые статьи, в которых кратко изложил оригинальный метод доказательства гипотезы Пуанкаре.

В 2004–2006 годах проверкой результатов Перельмана занимались три независимые группы математиков, которые пришли к выводу, что гипотеза Пуанкаре полностью доказана.

Таким образом, на сегодняшний день нерешенными остаются шесть проблем тысячелетия.



Стивен Смейл
(род. в 1930 г.)



В.И. Арнольд
(1937–2010)

В конце прошлого столетия появился еще один список проблем, составленный выдающимся американским математиком, лауреатом Филдсовской премии Стивеном Смейлом, который был составлен Смейлом по просьбе академика Владимира Игоревича Арнольда, занимавшего тогда пост президента международного математического союза.

Список проблем Смейла содержит восемнадцать нерешенных математических проблем, которые, по мнению самого Смейла, могут быть решены в текущем столетии.

Список проблем Смейла, как и проблемы тысячелетия, среди прочих включал все еще нерешенные:

- 8-ю проблему Гильберта – гипотезу Римана;
- $P = NP$-проблему;
- проблему решения уравнений Навье-Стокса;
- гипотезу Пуанкаре (доказанную Григорием Перельманом);
- 16-ю проблему Гильберта о взаимном расположении ветвей действительной алгебраической кривой на плоскости и алгебраической поверхности в пространстве.

Ниже перечисляются проблемы Смейла в том порядке, в каком он их сам сформулировал:

1. Обобщённая гипотеза Римана, которая состоит из того же утверждения, что и гипотеза Римана, но для обобщенных дзета-функций, известных как L-функции Дирихле.

2. Гипотеза Пуанкаре (*доказана Г.Я. Перельманом*).

3. Равенство классов *P* и *NP*.

4. Оценка количества целочисленных корней полиномов от одной переменной,

5. Оценка вычислительной сложности решения полиномиальных диофантовых уравнений.

6. Конечность количества точек относительного равновесия внебесной механике.

7. Распределение точек на двумерной гиперсфере.

8. Расширение математической теории общего равновесия на экономическую теорию.

9. Полиномиальный алгоритм для определения допустимости систем линейных неравенств.

10. Закрывающая лемма Пага.

11. Является ли одномерная динамика гиперболичной в общем случае?

12. Централизаторы диффеоморфизмов.

13. 16-я проблема Гильберта.

14. Аттрактор Лоренца (решена Уориков Такером методами дискретной алгебры)

15. Существование и гладкость решения уравнений Навье-Стокса.

16. Проблема якобиана.

17. Решение систем алгебраических уравнений (частично решена К. Белтраном и Л.М. Мигелем)

18. Выяснение пределов искусственного и человеческого интеллектов.

В наше время на развитие многих направлений науки большое влияние оказывают те разделы математики, которые связаны с развитием компьютерных технологий. Мощные компьютеры позволяют получить решения многих задач, о которых еще совсем недавно можно было только мечтать. Но и эти компьютеры пока не могут решить эффективно (в плане затрат времени и памяти) ряд задач.

Может создаться впечатление, что дальнейшее развитие науки сможет позволить со временем сконструировать компьютеры, которые будут способны решить любые математические проблемы. Однако существование неразрешимых математических проблем, о которых говорилось в начале, говорит об обратном. Более того, многое из того, что способен установить человеческий разум, не сможет сделать никакой, даже самый умный компьютер будущего.

Рассмотрим следующий пример.

Рассмотрим множество Th(Z) всех предложений языка логики предикатов первого порядка, истинных в упорядоченной группе Z целых чисел.

Предложениями языка первого порядка в данном случае являются слова, составленные по правилам математической логики с использованием:

- кванторов всеобщности $\forall$ и существования $\exists$, навешиваемым к так называемым предметным переменным (в данном случае эти переменные над целыми числами и записи $\forall x$ и $\exists x$ соответственно интерпретируются как слова «для каждого целого числа x» и «существует такое целое число x»);
- логических символов & (конъюнкция, интерпретируется как союз «и»), $\vee$ (дизъюнкция, интерпретируется как союз «или»), $\to$ (импликация, интерпретируется как слова «если…, то»), $\neg$ (интерпретируется как отрицание того, что за этим знаком следует);
- нелогических (математических) символов + и – (соответственно операции сложения и вычитания целых чисел), < (отношение «меньше»);
- выделенных символов 0 и 1, которые соответствуют числам 0 и 1.

В предложении каждая переменная должна быть связана некоторым квантором (в противном случае истинность предложения будет зависеть от значения, которое принимает не связанная никаким квантором переменная). Например, предложение

$$\forall x \forall y \left(\exists z(z + z = x) \& (x < y) \& \neg \left(\exists u\big((x < u) \& (u < y)\big) \right) \right) \to (\exists v(v + v = y))$$

означает, что любое число, которое расположено непосредственно за произвольным четным числом (левая часть импликации) не является четным числом (правая часть импликации).

Множество Th(Z) называется теорией группы Z (поэтому используется такое обозначение). Так как приведенное выше предложение истинно на *Z,* оно входит в теорию Th(Z).

В 1929 году польский математик М. Прессбургер установил, что теория Th(Z) разрешима, то есть существует алгоритм, который позволяет распознавать истинность или ложность в Z любого предложения описанного выше вида. Это был первый пример содержательной разрешимой математической теории. Позднее были найдены новые разрешимые теории, интересные с содержательной точки зрения,

С математической точки зрения разрешимые теории «неинтересны»: от человека никаких мыслительных способностей не требуется – достаточно задать интересующий тебя вопрос механическому устройству, реализующему алгоритм распознавания истинности предложений языка теории, чтобы тут же получить требуемый ответ.

Но возникает вопрос о вычислительной сложности такой разрешающей процедуры: действительно ли мы сможем получить требуемый ответ «тут же», или для этого потребуется некоторое время ожидания, и если «да», то сколько?

Как выяснилось, для всех известных более-менее интересных примеров разрешимых теорий не существует алгоритмов, позволяющих получить ответы за реальное, приемлемое с практической точки зрения время.

Например, для теории Th(Z), как было установлено американскими математиками М.Дж. Фишером и М. Рабином, такой разрешающий алгоритм требует в среднем выполнения $2^{2^{kn}}$ машинных шагов, где n – количество символов предложения, а k – некоторое целое положительное число, большее единицы, *и эта оценка не может быть улучшена.*

Другими словами, для любого алгоритма распознавания предложений из Th(Z), найдется бесконечно много предложений, для которых этот алгоритм потребует выполнения не менее $2^{2^{kn}}$ количества действий, где n – количество символов, участвующих в составлении предложения.

Чтобы понять вычислительную сложность такого алгоритма вспомним известную задачу о количестве зерен на шахматной доске: *если класть на первую клетку шахматной доски одно зерно, а на каждую следующую клетку зерен в два раза больше*, то всего понадобится

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{63} = 2^{64} - 1$$

зерно, что составляет примерно 1,2 трлн т зерна (!).

Ясно, что на сегодняшний день такие теории нельзя рассматривать как «реально разрешимые». Существуют ли содержательные теории с разрешимыми за реальное время алгоритмами распознавания их истинных предложений? Ответ на этот вопрос неизвестен. Очевидно, что он тесно связан с разрешением описанной выше проблемы $P = NP$.