Численное дифференцирование

<u>Производная функции</u> есть предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении к нулю приращения независимой переменной

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

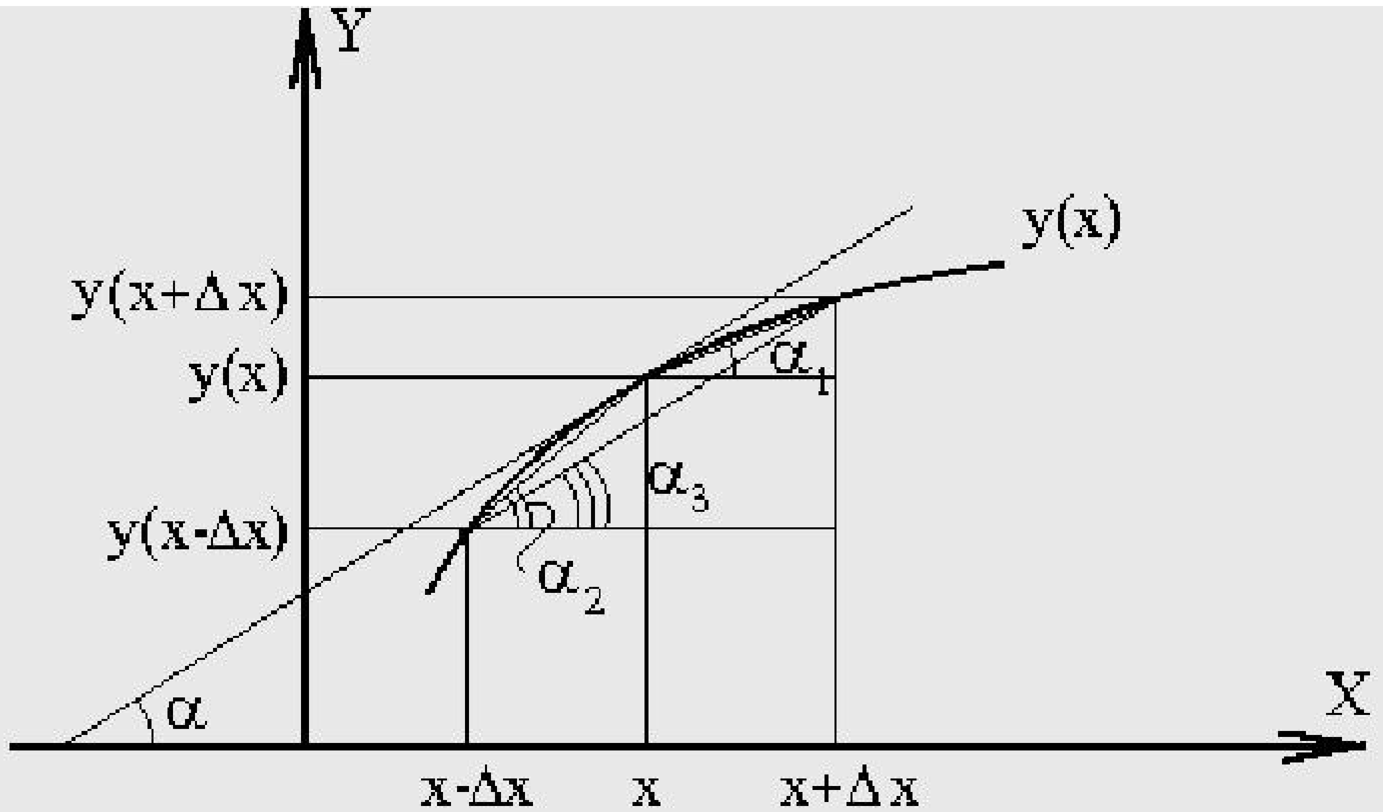
При численном нахождении производной заменим отношение бесконечно малых приращений функций и аргумента $\frac{dy}{dx}$ отношением конечных разностей. Очевидно, что чем меньше будет приращение аргумента, тем точнее численное значение производной.

Первая производная. Двухточечные методы.

Для двухточечных методов при вычислении производных используется значение функции в двух точках. Приращение аргумента задается тремя способами, откладывая $\Delta x = h$ вправо, влево и в обе стороны от исследуемой точки. Соответственно получается три двухточечных метода численного дифференцирования:

метод 1	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$
метод 2	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}$
метод 3	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

Суть указанных методов проиллюстрирована на рисунке. Численное значение тангенса угла α образованного касательной к графику *y(x)* и осью абсцисс, показывает точное значение производной(геометрический смысл производной). Тангенсы углов α_1, α_2, α_3 соответствуют приближенным значениям производных, определенных методами 1,2,3 соответственно (подумайте почему?).



Пример. Вычислить точное и приближенное (тремя методами) значения производной функции y=x*x в точке x=1 с шагом h=1 и h=0.001.

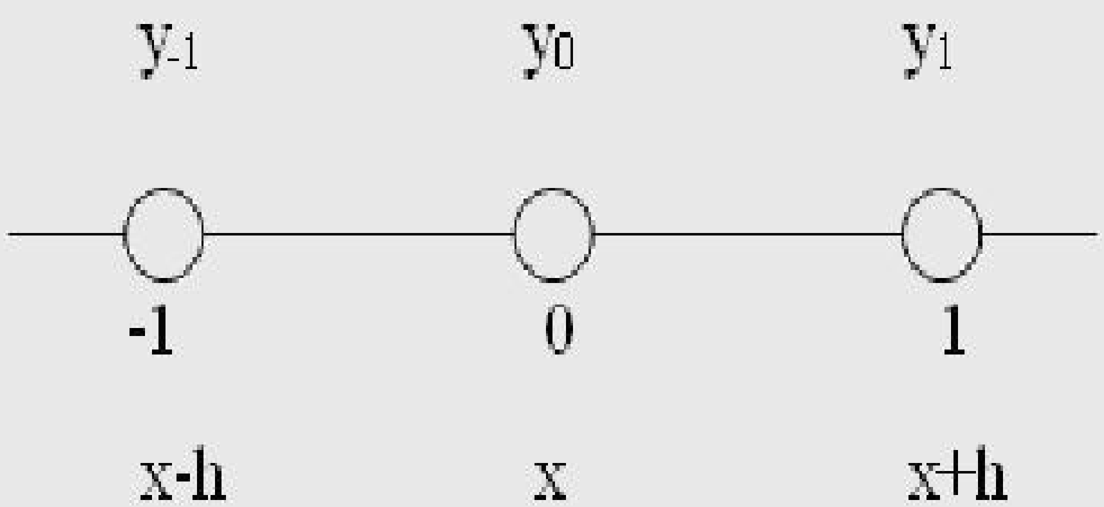
Этапы решения задачи приведены в таблице.

Таблица

N	*Этап программирования*	*Выполнение*
1.	*Постановка задачи*	Вычислить точное и приближенное (тремя методами) значения производной функции y=x*x в точке x=1 с шагом h=1 и h=0.001.
2.	*Математическое описание*	Аналитическое решение: y'=2x , y'(1)=2, Численное решение для шага: h=1 $y_1' = \frac{y(1+1)-y(1)}{1} = \frac{4-1}{1} = 3,$ $y_2' = \frac{y(1)-y(1-1)}{1} = \frac{1-0}{1} = 1,$ $y_3' = \frac{y(1+1)-y(1-1)}{1*2} = \frac{4-0}{2} = 2,$, для шага h=0.001 $y_1' = \frac{1.001*1.001-1*1}{0.001} = 2.001,$ $y_2' = \frac{1*1-0.999*0.999}{0.001} = 1.999,$ $y_3' = \frac{1.001*1.001-0.999*0.999}{0.001*2} = 2.$

3.	*Разработка структограммы*	*Выполнить самостоятельно*
4.	*Написание программы*	*Выполнить самостоятельно*
5.	*Отладка и получени результатов*	*Выполнить самостоятельно*

Вычисление первых производных по трёхточечным схемам.



Расчетные формулы для указанной трехточечной схемы имеют вид:

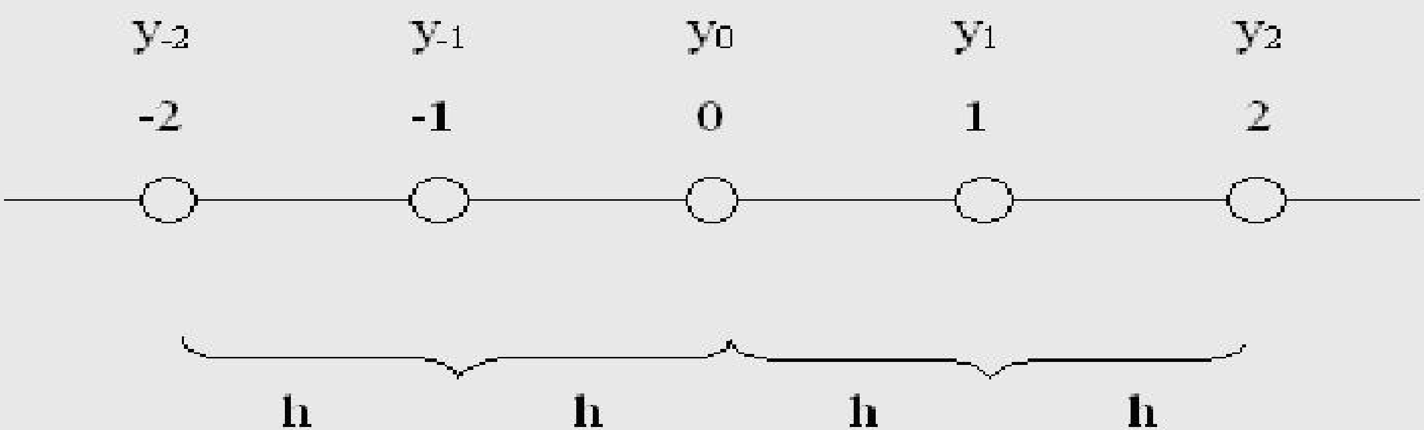
$$y'_{-1} = \frac{1}{2*h}(-3*y_{-1} + 4*y_0 - y_1);$$

$$y'_0 = \frac{1}{2*h}(-y_{-1} + 0*y_0 + y_1);$$

$$y'_1 = \frac{1}{2*h}(y_{-1} - 4*y_0 + 3*y_1).$$

Вычисление производных второго порядка.

Вторая производная вычисляется как первая производная от первой производной
Для следующей пятиточечной схемы



расчетная формула имеет вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2*h} = \frac{\dfrac{y_2 - y_0}{2*h} - \dfrac{y_0 - y_{-2}}{2*h}}{2*h} = \frac{y_2 - 2*y_0 + y_{-2}}{(2*h)^2} =$$

$$= \left\{\text{при } \tilde{h} = 2h\right\} = \frac{y_1 - 2*y_0 + y_{-1}}{\tilde{h}^2}$$

Пример. Написать программу для нахождения второй производной функции $y = 2 * x^4$

в точке $x=1$ с шагом $h=0.01$, сравнить с точным значением.

N	*Технологическая операция*	*Выполнение*
1.	*Постановка задачи*	Написать программу для нахождения второй производной функции $y = 2 * x^4$ в точке x=1 с шагом h=0.01, сравнить с точным значением.
2.	*Математическое описание*	Аналитическое значение $y''_{точ} = 24 * x^2; y''(1)_{точ} = 24$. Приближенное значение $y'' \approx \dfrac{y(1.01) - 2 * y(1) + y(0.99)}{0.01 \cdot 0.01} = 24.0004$
3.	*Разработка структограммы*	Описание x,y,h x=1; h=0.01 $\dfrac{d^2y}{dx^2} \approx \dfrac{y(x+h) - 2 * y(x) + y(x-h)}{h^2}$ Вывод $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

4.	*Написание программы*	**Program P7;**
		Var x,ddy,h:real;
		Function y(x:real):real;
		begin
		y:=2*sqr(sqr(x));
		end;
		begin
		x:=1;h:=0.01;
		ddy:=(y(x+h)-2*y(x)+y(x-h))/h/h;
		writeln(ddy);
		end.

5.	*Отладка и получение результатов*	*Выполнить сомостоятельно.*

Вычисление производных третьего порядка.

Производные третьего порядка вычисляются как первая производная от производной второго порядка. Для рассмотренной пятиточечной схемы расчетная формула имеет вид

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \approx \frac{y''_1 - y''_{-1}}{2*h} = \frac{\dfrac{y_0 - 2*y_1 + y_2}{h^2} - \dfrac{y_{-2} - 2*y_{-1} + y_0}{h^2}}{2*h} = \frac{y_2 - 2*y_1 + 2*y_{-1} - y_{-2}}{2*h^3}$$

Численное дифференцирование

1. Для функции заданной в таблице №1 (по варианту) вычислить значение производной в произвольной точке $x=x_0$ аналитически и численно тремя методами для пяти значений приращения аргумента $\Delta x=1$; 0.2; 0.1; 0.01; 0.001. Результаты расчета вывести на экран и распечатать в виде таблицы

Таблица вывода результатов расчета

Δx	y(x)	y'(x)	$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$	$\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}$	$\frac{y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$
1					
0.2					
0.1					
0.01					
0.001					

Варианты функций

Вар.	Вид функции	Вар.	Вид функции
1	$x(t)=Ae^{-at}\sin(\omega t+b)$	14	$y=ctg^{m}(ax)$
2	$x(t)=Ae^{at}\cos(\omega t+b)$	15	$y(x)=(e^{ax}-e^{-ax})^{n}$
3	$y(x)=\ln\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$	16	$x(t)=t^{at}$
4	$yu(t)=\cos^2(at+b)$	17	$y(x)=(ax)^{\sin(bx)}$
5	$yu(t)=\sin^2(at+b)$	18	$y(x)=arctg^{n}\dfrac{b+ax}{b_1+a_1x}$
6	$s(\varphi)=\sqrt{a+\cos^2(\varphi^{n})}$	19	$S(t)=\sqrt{A-2a^{t^{n}}}$

7	$q(t)=(a-bt^n)^n$	20	$y(x)=ctg^n(\arcsin \ln \frac{a+bx}{c+dx})$
8	$y(x)=x^n\cos(ax)$	21	$R(\varphi)=\arccos^m(a+b\varphi^n)$
9	$y(x)=\frac{\sin(bx)}{x^m}$	22	$r(\varphi)=c^{\sin(a\varphi+b)}$
10	$x(t)=\frac{a}{\sqrt[n]{t}}-\frac{b}{\sqrt[m]{t}}$	23	$y(x)=\ln(tg^n(ax+b))$
11	$R(\varphi)=\frac{\sin^n(\varphi)}{\cos^m(\varphi)}$	24	$vu(t)=\log_a(t^n+b^m)^k$
12	$S(\varphi)=B\cos^n(a\varphi+b)$	25	$S(\varphi)=A\sin^n(a\varphi+b)$
13	$y=tg^{ax}(\ x/a\ )$	26	$X(t)=\lg(at^n+b)$