Лабораторная работа №1 «Численное дифференцирование»

Производная функции есть предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении к нулю приращения независимой переменной

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

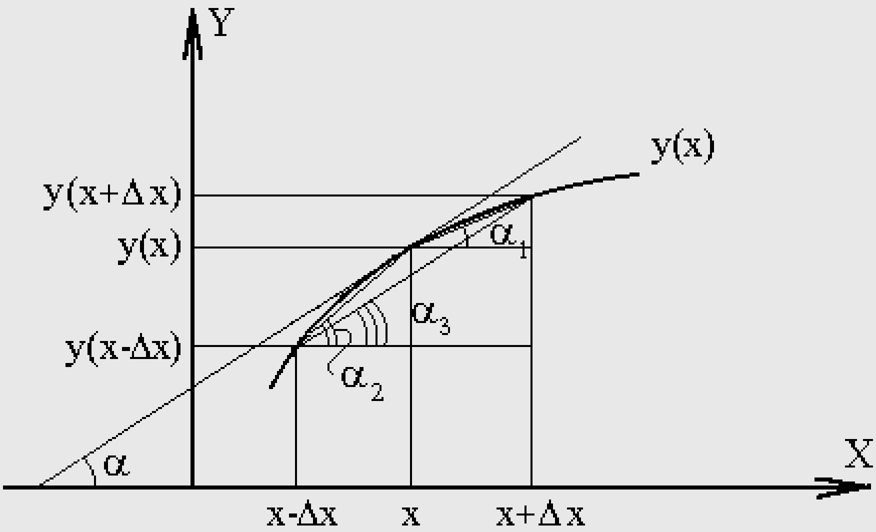
При численном нахождении производной заменим отношение бесконечно малых приращений функций и аргумента $\frac{dy}{dx}$ отношением конечных разностей. Очевидно, что чем меньше будет приращение аргумента, тем точнее численное значение производной.

Первая производная. Двухточечные методы.

Для двухточечных методов при вычислении производных используется значение функции в двух точках. Приращение аргумента задается тремя способами, откладывая Δx = h вправо, влево и в обе стороны от исследуемой точки. Соответственно получается три двухточечных метода численного дифференцирования:

метод 1	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}$
метод 2	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x) - y(x-\Delta x)}{\Delta x}$
метод 3	$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x+\Delta x) - y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

Суть указанных методов проиллюстрирована на рисунке. Численное значение тангенса угла α образованного касательной к графику *y(x)* и осью абсцисс, показывает точное значение производной(геометрический смысл производной). Тангенсы углов α_1, α_2, α_3 соответствуют приближенным значениям производных, определенных методами 1,2,3 соответственно (подумайте почему?).



Пример. Вычислить точное и приближенное (тремя методами) значения производной функции y=x*x в точке x=1 с шагом h=1 и h=0.001.

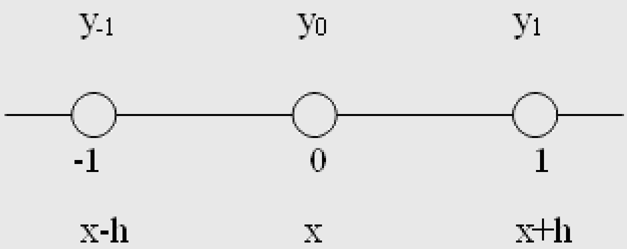
Этапы решения задачи приведены в таблице.

Таблица

N	*Этап программирования*	*Выполнение*
1.	*Постановка задачи*	Вычислить точное и приближенное (тремя методами) значения производной функции y=x*x в точке x=1 с шагом h=1 и h=0.001.
2.	*Математическое описание*	Аналитическое решение: y'=2x , y'(1)=2, Численное решение для шага: h=1 $y_1'=\frac{y(1+1)-y(1)}{1}=\frac{4-1}{1}=3,$ $y_2'=\frac{y(1)-y(1-1)}{1}=\frac{1-0}{1}=1,$ $y_3'=\frac{y(1+1)-y(1-1)}{1*2}=\frac{4-0}{2}=2,$, для шага h=0.001 $y_1'=\frac{1.001*1.001-1*1}{0.001}=2.001,$ $y_2'=\frac{1*1-0.999*0.999}{0.001}=1.999,$ $y_3'=\frac{1.001*1.001-0.999*0.999}{0.001*2}=2.$

3.	*Разработка структограммы*	*Выполнить самостоятельно*
4.	*Написание программы*	*Выполнить самостоятельно*
5.	*Отладка и получени результатов*	*Выполнить самостоятельно*

Вычисление первых производных по трёхточечным схемам.



Расчетные формулы для указанной трехточечной схемы имеют вид:

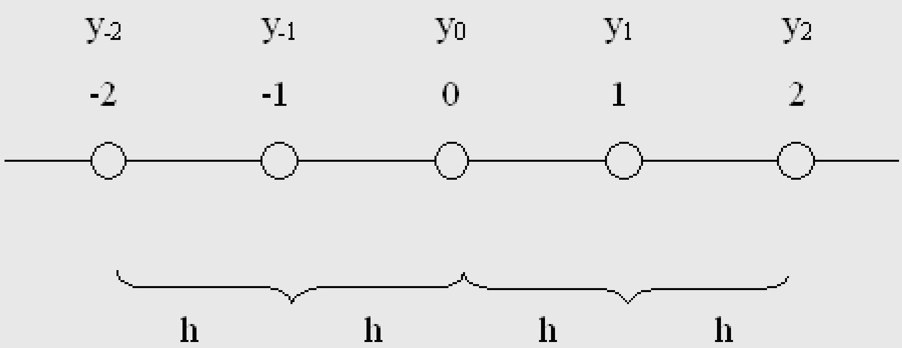
$$y'_{-1} = \frac{1}{2*h}(-3*y_{-1}+4*y_0-y_1);$$

$$y'_0 = \frac{1}{2*h}(-y_{-1}+0*y_0+y_1);$$

$$y'_1 = \frac{1}{2*h}(y_{-1}-4*y_0+3*y_1).$$

Вычисление производных второго порядка.

Вторая производная вычисляется как первая производная от первой производной. Для следующей пятиточечной схемы



расчетная формула имеет вид:

Лабораторная работа №1 «Численное дифференцирование»

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \approx \frac{y_1 - y_{-1}}{2*h} = \frac{\frac{y_2 - y_0}{2*h} - \frac{y_0 - y_{-2}}{2*h}}{2*h} = \frac{y_2 - 2*y_0 + y_{-2}}{(2*h)^2} =$$

$$= \left\{ \text{при } \tilde{h} = 2h \right\} = \frac{y_1 - 2*y_0 + y_{-1}}{\tilde{h}^2}$$

Пример. Написать программу для нахождения второй производной функции y = 2 * x^4

в точке x=1 с шагом h=0.01, сравнить с точным значением.

Таблица

N	*Технологическая операция*	*Выполнение*
1.	*Постановка задачи*	Написать программу для нахождения второй производной функции y = 2 * x^4 в точке x=1 с шагом h=0.01, сравнить с точным значением.
2.	*Математическое описание*	Аналитическое значение $y'' = 24 * x^2; y''(1) = 24$. Приближенное значение $y'' \approx \frac{y(1.01) - 2*y(1) + y(0.99)}{0.01 \cdot 0.01} = 24.0004$
3.	*Разработка структограммы*	Описание x,y,h x=1; h=0.01 $\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y(x+h) - 2*y(x) + y(x-h)}{h^2}$ Вывод $\frac{d^2y}{dx^2}$
4.	*Написание программы*	**Program P7;** **Var x,ddy,h:real;** **Function y(x:real):real;** **begin** **y:=2*sqr(sqr(x));**

		end;
		
		begin
		
		x:=1;h:=0.01;
		
		ddy:=(y(x+h)-2*y(x)+y(x-h))/h/h;
		
		writeln(ddy);
		
		end.

5.	*Отладка и получение результатов*	*Выполнить сомостоятельно.*

Вычисление производных третьего порядка.

Производные третьего порядка вычисляются как первая производная от производной второго порядка. Для рассмотренной пятиточечной схемы расчетная формула имеет вид

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \approx \frac{y''_1 - y''_{-1}}{2*h} = \frac{\dfrac{y_0 - 2*y_1 + y_2}{h^2} - \dfrac{y_{-2} - 2*y_{-1} + y_0}{h^2}}{2*h} = \frac{y_2 - 2*y_1 + 2*y_{-1} - y_{-2}}{2*h^3}$$

Лабораторная работа 2.

Численное дифференцирование

1. Для функции заданной в таблице №1 (по варианту) вычислить значение производной в произвольной точке $x=x_0$ аналитически и численно тремя методами для пяти значений приращения аргумента Δx=1; 0.2; 0.1; 0.01; 0.001. Результаты расчета вывести на экран и распечатать в виде таблицы

   Таблица вывода результатов расчета

Δx	y(x)	y'(x)	$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$	$\frac{y(x)-y(x-\Delta x)}{\Delta x}$	$\frac{y(x+\Delta x)-y(x-\Delta x)}{2\Delta x}$
1					
0.2					
0.1					
0.01					
0.001					

2. Построить графики функций $y'(x_0) = F(\Delta x)$. Варианты функций приведены в таблице.

Лабораторная работа №1 «Численное дифференцирование»

Таблица №1

Варианты функций

Вар.	Вид функции	Вар.	Вид функции
1	$x(t)=Ae^{-at}\sin(\omega t+b)$	14	$y=ctg^{m}(ax)$
2	$x(t)=Ae^{at}\cos(\omega t+b)$	15	$y(x)=(e^{ax}-e^{-ax})^{n}$
3	$y(x)=\ln\dfrac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$	16	$x(t)=t^{at}$
4	$yu(t)=\cos^2(at+b)$	17	$y(x)=(ax)^{\sin(bx)}$
5	$yu(t)=\sin^2(at+b)$	18	$y(x)=arctg^{n}\dfrac{b+ax}{b_1+a_1x}$
6	$s(\varphi)=\sqrt{a+\cos^2(\varphi^{n})}$	19	$S(t)=\sqrt{A-2a^{t^{n}}}$
7	$q(t)=(a-bt^{n})^{n}$	20	$y(x)=ctg^{n}(\arcsin\ln\dfrac{a+bx}{c+dx})$
8	$y(x)=x^{n}\cos(ax)$	21	$R(\varphi)=\arccos^{m}(a+b\varphi^{n})$
9	$y(x)=\dfrac{\sin(bx)}{x^{m}}$	22	$r(\varphi)=c^{\sin(a\varphi+b)}$
10	$x(t)=\dfrac{a}{\sqrt[n]{t}}-\dfrac{b}{\sqrt[m]{t}}$	23	$y(x)=\ln(tg^{n}(ax+b))$
11	$R(\varphi)=\dfrac{\sin^{n}(\varphi)}{\cos^{m}(\varphi)}$	24	$vu(t)=\log_a(t^{n}+b^{m})^{k}$
12	$S(\varphi)=B\cos^{n}(a\varphi+b)$	25	$S(\varphi)=A\sin^{n}(a\varphi+b)$
13	$y=tg^{ax}(x/a)$	26	$X(t)=\lg(at^{n}+b)$

Примечание. Значение параметров a, b, c, d, m, n, A, B выбрать самостоятельно.

Содержание отчета:

1. Название, цель работы и задание.
2. Математическое описание, алгоритм (структограмма) и текст программы.
3. Таблица результатов расчета, четыре графика зависимости $y'(x_0) = F(\Delta x)$ для трехчисленных методов и точного значения интеграла, выводы по работе.