1. Простые проценты

1.1. Начисление простых процентов

Процентом данного числа называется одна сотая часть этого числа.
Например, 1% от числа N составляет 0,01N.
Введем следующие обозначения:
р – исходная сумма денег;
i – ставка процентов на фиксированный промежуток времени;
J = iP – сумма начисленных процентов;
S – наращённая сумма денег, которая вычисляется по формуле:

$$S = P + iP = P(1+i)$$

Если имеется n периодов времени, в каждом из которых исходная сумма P увеличивается на i%, то наращенная сумма S вычисляется по формуле:

$$S = P + iPn$$

или

$$S = P(1+in). \qquad (1.1)$$

Множитель $(1+in)$ называют коэффициентом наращения простых процентов.

Пример 1.1. Вкладчик положил в сберегательный банк, выплачивающий 5% годовых, 2000 руб. Какая сумма будет на его счету а) через 1 год? Б) через 3 года?
Решение. Согласно условию: P = 2000 руб; i = 0,05; а) n = 1 год; б) n = 3 года.
Наращенная сумма вклада: а) S = 2000(1+0,05) = 2100 руб. б) S = 2000(1+0,05*3) = 2000*1,15 = 2300 руб.

В формуле (1.1) число n периодов начисления процентов – целое число, и ставка процентов одна и та же на каждый период.

На практике вводится понятие базового промежутка времени, например 1 год и годовая процентная ставка i. При этом продолжительность финансовой операции может не равняться целому числу лет, тогда периоды начисления процентов n выражают дробным числом.
Например, если i годовая ставка, то за m кварталов начисление выполняется по формуле:

$$S = P(1+\frac{i}{4}m). \qquad (1.2)$$

За k месяцев:

$$S = P(1+\frac{i}{12}k). \qquad (1.3)$$

Начисление процентов за определенное количество дней может быть выполнено различными способами:
а) германская практика коммерческих банков в году считает 360 дней, в полном месяце30 дней, в неполном месяце точное количество дней. Способ называют обыкновенными процентами с приближенным числом дней ссуды и обозначают $\frac{360}{360}$.
б) французская практика коммерческих банков использует обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды, а длительность года 360 дней. Этот способ обозначают $\frac{365}{360}$.
в) английская практика использует точные проценты ($^{365}/_{365}$).
Количество дней в году берётся точным 365 (или 366) дней и точная длительность месяцев.
Замечание. Для вычисления продолжительности финансовой операции в днях можно пользоваться таблицей порядковых номеров дней в году. См. Приложение 1.

Пример 1.2. Ссуда в размере 200 тыс. руб. выдана 15.04.2013г. до 11.12.2013г. включительно. Ставка процентов банка составляла 15% годовых. Вычислите сумму, которую должен вернуть должник при различных методах определения срока начисления процентов.

Решение.

1. Определим точное число дней ссуды с помощью Приложения1. 15 апреля имеет порядковый номер 105; 11 декабря соответствует порядковый номер 345. Поэтому точное число дней ссуды равно: 345 – 105 = 240 дней.

Долг с начислением точных процентов с точным числом дней ссуды (английская практика $^{365}/_{365}$) будет рассчитан следующим образом:

$$S = 200000(1 + \frac{240}{365} 0{,}15) = 219726{,}03 \, руб$$

2. Вычислим приближенное число дней ссуды. Каждый полным месяц примем за 30 дней, всего 7 полных месяцев, 15 дней в апреле и 11 дней в декабре. Таким образом, всего дней:

$$7 \cdot 30 + 15 + 11 = 236 \, дней$$

При начислении обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды (германская практика $\frac{360}{360}$) получим сумму долга:

$$S = 200000(1 + \frac{236}{360} 0{,}15) = 219666{,}67 \, руб.$$

3. При начислении процентов с точным числом дней ссуды и длительностью года в 360дней (т.е. французская практика $\frac{365}{360}$) получим следующую сумму долга:

$$S = 200000(1 + \frac{240}{360} 0{,}15) = 219999{,}99 \approx 220000 \, руб.$$

Приведенный пример показывает, что способ начисления процентов влияет на сумму долга.

1.2. Математическое дисконтирование по простым процентам

Пусть требуется определить сумму P, которую нужно инвестировать в данный момент времени, чтобы через некоторый промежуток времени при известной ставке i% получить наращенную сумму S. Очевидно, что из формулы (1.1) следует

$$P = \frac{S}{1 + in} \qquad (1.4)$$

Эта операция и называется математическим дисконтированием, а множитель $\frac{1}{1 + in}$ называется дисконтным множителем.

Пример 1.3. Какую сумму инвестор должен внести сегодня под 20% годовых, чтобы через 150 дней накопить 200 тыс. руб. По договору начисляются простые проценты.
Решение. По условию: S = 200000 руб, i = 0,2, t = 150 дней.

$$P = \frac{S}{1 + \frac{t}{365} i} = \frac{200000}{1 + \frac{150}{365} 0{,}2} = 184810{,}9\, руб.$$

Ответ. Инвестор должен внести 184810,9 руб.

1.3. Банковский учет по простым процентам

Банковским (или коммерческим) учётом называется дисконтирование по учетной ставке суммы кредита, ссуды или при покупке ценных бумаг (например, векселей), при этом процентные деньги вычитаются из суммы долга в начале финансовой операции.
Размер дисконта, удерживаемого банком, равен D = S – Pи учетная ставка d на период вычисляется по формуле:

$$d = \frac{S - P}{S \cdot n}, \qquad (1.5)$$

где n – число периодов дисконтирования. Следовательно,

$$S - P = Snd. \quad (1.6)$$

Из (1.6) получаем величину P, которую получает заемщик (получатель ссуды) или владелец векселя при его продаже банку:

$$P = S(1 - nd). \quad (1.7)$$

Множитель ν = 1 – ndназывается дисконтным банковским множителем.

Пример 1.4.Определить, за сколько лет вклад в 10000 рублей удвоиться при ставке 80%.

Рассмотрим банковский учет на примере работы с векселями. Вексель – это ценная бумага, представляющая собой подписанное долговое обязательство уплатить определённую сумму денег (вернуть долг) в определенный срок.
Обозначим:
P_0 – номинальная стоимость векселя (величина долга)
i – ставка процентов по векселю;
n – срок, на который выдан вексель (в долях года)
d – учётная ставка процентов при досрочной продаже векселя;
S – стоимость векселя с процентами при погашении по истечении срока;
P – цена продажи при досрочной реализации векселя.
Очевидно, что

$$S = P_0(1 + ni) \quad (1.8)$$

При досрочной продаже векселя покупатель (например, банк) дисконтирует стоимость S по формуле:

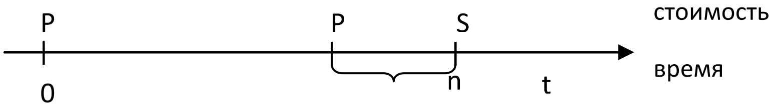
$$P = S(1 - td), \quad (1.9)$$

где t– интервал времени от момента продажи до погашения (в долях года).
Цену продажи векселя можно вычислить по единой формуле:

$$P = P_0(1 + ni)(1 - td). \quad (1.10)$$

Заметим, что $(1 - td) > 0$ и $t < \frac{1}{d}$.

Изменение стоимости векселя можно показать на временной оси:



Пример 1.5.Вексель 500тыс. руб. сроком на 3 года учтён в банке через один год. Определить цену продажи, если учетная ставка банка 8% годовых.
Решение. По условиюS = 500 тыс. руб. наступит через 3 года. Цену продажи вычислим по формуле (1.9), где t = 2 года:

$$P = 500000(1 - 2 \cdot 0{,}08) = 420000\,руб.$$

Ответ: банк выплатит владельцу векселя 420000руб.
Пример 1.6.Г-н А занял у г-на Б 5000 долларов под 40% годовых, выдав ему расписку (вексель) вернуть деньги с процентами через 90 дней. Г-н Б продал вексель через 30 дней г-ну С со скидкой 30%. Определить цену продажи или сколько получил г-н Б за вексель.
Решение. Стоимость векселя – это долг г-на А:

$$S = 5000(1 + 0{,}4\frac{90}{360}) = 5500\,долларов$$

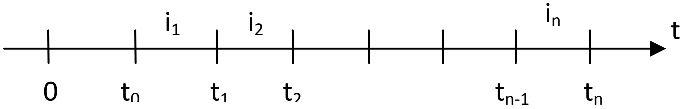
Цена продажи:

$$P = 5500(1 - 0{,}3\frac{60}{360}) = 5225\,долларов$$

Ответ: Г-н Б получит 5225 долларов, г-н С получит 5500 долларов. То есть г-н Б заработает за 30 дней 225 долларов, а г-н С заработает за 60 дней 275 долларов.

1.4. Переменные процентные ставки

При заключении финансовых соглашений может предусматриваться изменение процентных ставок через определённые промежутки времени. Пусть, например, отрезок времени $[t_0,t_n]$ разбит на части, на каждой из которых фиксируется ставка процентов:



Приращение суммы денег P за весь промежуток времени составит:

$$J = i_1 P(t_1 - t_0) + i_2 P(t_2 - t_1) + \ldots + i_n P(t_n - t_{n-1}) =$$

$$= P\sum_{k=1}^{n} i_k (t_k - t_{k-1}). \qquad (1.11)$$

Наращенная сумма будет вычисляться по формуле:

$$S = P + P\sum_{i=1}^{n} i_k (t_k - t_{k-1}) = P[1 + \sum_{k=1}^{n} i_k (t_k - t_{k-1})] \qquad (1.12)$$

И, таким образом, множитель наращения при переменных ставках простых процентов имеет вид

$$\mu = 1 + \sum_{k=1}^{n} i_k (t_k - t_{k-1}) \qquad (1.13)$$

Пример 1.7. Определите наращенную за год сумму для вклада 100 тыс. руб, если банк по договору предлагает следующие условия: за первый квартал процентная ставка равна 10% годовых, за каждый следующий квартал ставка возрастает на 1,5%.

Решение. По условию P = 100000 руб., за 1-й квартал i_1= 10%, за 2-й i_2= 11,5%, за 3-й i_3= 13%, за 4-й i_4= 14,5%

Наращенная сумма за год вычисляется по формуле (1.12):

$$S = 100000(1 + 0{,}1 \cdot 0{,}25 + 0{,}115 \cdot 0{,}25 + 0{,}13 \cdot$$

$$\cdot 0{,}25 + 0{,}145 \cdot 0{,}25) = 100000 \cdot 1{,}1225 =$$

$$= 112250\, руб.$$

Ответ. Наращенная сумма за год составит 112250 руб.

Пример 1.8. В начале года ставка процентов по вкладам составляла 18% годовых. Через 3 месяца ставка была уменьшена до 15%, еще через 5 месяцев до 12% годовых.
а) Вычислите сумму процентов, начисленную на вклад 50 тыс. руб. за год.;
б) Какую сумму нужно положить на счет, чтобы через год получить 50 тыс. руб.?
Решение. Ставка i_1 = 18% действует 3 месяца; i_2 = 15% - 5 месяцев; i_3 = 12% - 4 месяца.
а) Сумма процентов за год вычисляется по формуле (4.1):

$$J = 50000\,(0{,}18 \cdot \frac{3}{12} + 0{,}15 \cdot \frac{5}{12} + 0{,}12 \cdot \frac{4}{12}) =$$

$$= 50000 \cdot 0{,}1475 = 7375\ руб.$$

б) Чтобы ответить на этот вопрос нужно выполнить дисконтирование суммы 50 тыс. руб, то есть применить формулу:

$$P = \frac{S}{\mu},$$ где S = 50 тыс. руб.

множитель μ наращения согласно формуле (1.13) в этом упражнении равняется 1,1475.
Поэтому

$$P = \frac{50000}{1{,}1475} = 43573\,руб.$$

Ответ. а) 7375 руб.; б) 43573 руб.

1.5. Реинвестирование под простые проценты

Реинвестированием называют такую операцию, когда наращённая сумма по истечении некоторого времени вновь вкладывается вместе с начисленными процентами. То есть проценты начисляются на суммы, наращенные в предыдущем периоде.
Пусть P – первоначальная сумма;

i_1–ставка процентов на промежутке времени $t \in (t_0, t_1)$;

i_2–ставка процентов $t \in (t_1, t_2)$;

…

I_k–ставка процентов $t \in (t_k, t_{k-1})$;

…

k = 1, 2, …,n.

Наращенная сумма кконцу первого промежутка составит:

$$S_1 = P[1 + i_1(t_1 - t_0)].$$

К концу второго промежутка наращенная сумма будет равна:

$$S_2 = S_1[1 + i_2(t_2 - t_1)] = P[1 + i_1(t_1 - t_o)] \cdot [1 + i_2(t_2 - t_1)].$$

Таким образом, наращенная сумма за nразличных периодов начисления определится по формуле:

$$S = P[1 + i_1(t_1 - t_o)] \cdot [1 + i_2(t_2 - t_1)] \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot [1 + i_k(t_k - t_{k-1})] \cdot \ldots \cdot [1 + i_n(t_n - t_{n-1})].$$

Для краткости формулы введем символ произведения $\prod_{k=1}^{n}$,и тогда множитель наращения будет иметь вид:

$$\mu(t) = \prod_{k=1}^{n} [1 + i_k(t_k - t_{k-1})] \qquad (1.14)$$

И формула для вычисления наращённой суммы запишется в виде

$$S = P \prod_{k=1}^{n} [1 + i_k(t_k - t_{k-1})] \qquad (1.15)$$

Пример 1.9. В течение года ежеквартально банк устанавливает годовые ставки процентов: 9%, 10%, 11%, 12%. Определите годовой множитель наращения при последовательном реинвестировании суммы вклада 100 тыс. руб., и какова будет итоговая сумма?

Решение. $P = 100 тыс.руб.,$

$$t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

$$i_1 = 0{,}09, i_2 = 0{,}1, i_3 = 0{,}11, i_4 = 0{,}12.$$

Годовой множитель наращения равен:

$$\mu = (1 + 0{,}25 \cdot 0{,}09)(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}1)(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}11)$$
$$(1 + 0{,}25 \cdot 0{,}12) = 1{,}1091907.$$

Сумма вклада будет равна 110919,07 руб.

1. Вопросы для самоконтроля

1. Напишите формулу для вычисления наращенной суммы при начислении простых процентов.
2. Чем отличаются точные проценты от обыкновенных?
3. Назовите способы начисления простых процентов в зависимости от числа дней финансовой операции.
4. Напишите формулу для вычисления множителя наращения при переменных простых ставках процентов.
5. Какая финансовая операция называется реинвестированием?
6. Какой вид имеет множитель наращения при реинвестировании?
7. В чем состоит смысл математического дисконтирования?
8. Что представляет собой банковский учет?
9. Как можно связать учетную ставку и ставку наращения по простым процентам?
10. Запишите формулу банковского дисконтного множителя.