Тема 6. Алгоритмы на графах

6.10. Эйлеровы пути

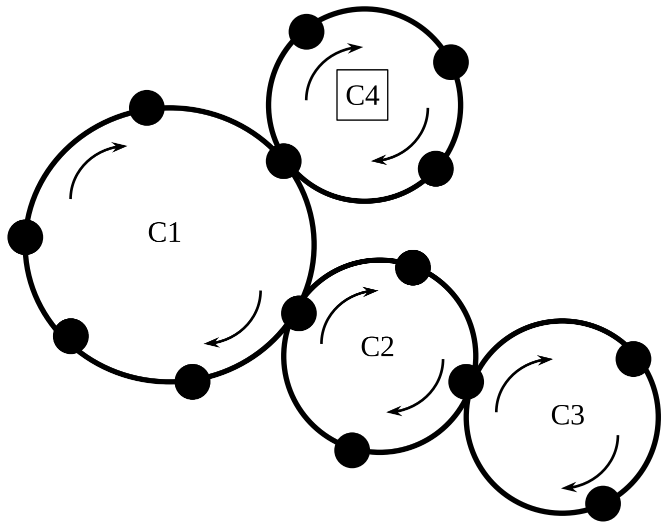
Произвольный путь, проходящий по каждому ребру графа в точности по одному разу (в одной и той же вершине графа можно бывать многократно), называется *эйлеровым путем*. Эйлеров путь, который начинается и завершается в одной и той же вершине, называется *эйлеровым циклом*. Графы, содержащие эйлеровы циклы называются *эйлеровыми графами*.

Неориентированный граф $G = (V, E)$ имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда он связный и степень каждой вершины четная (степень вершины есть число инцидентных ей ребер).

Необходимость этих условий очевидна. В несвязном графе каждый цикл принадлежит какой-либо его связной компоненте, т. е. не проходит через все ребра графа. Исключением является случай, когда все связные компоненты, кроме одной, являются изолированными вершинами. Рассмотрим необходимость четности степеней всех вершин. Пусть некоторая вершина v появляется в эйлеровом цикле k раз. Это означает, что цикл приходит в эту вершину по k инцидентным ей ребрам и выходит из нее по другим k инцидентным ребрам, т. е. степень этой вершины составляет $2k$. Поскольку цикл эйлеров, нет никаких других инцидентных вершине v ребер, по которым цикл не проходит.

Достаточность условий существования эйлерова цикла является следствием анализа процедуры его построения. Построение эйлерова цикла начинается с произвольной вершины v графа. От этой вершины строится путь по ребрам графа до тех пор, пока это возможно. Инцидентные некоторой вершине ребра, еще не вошедшие в путь, назовем свободными ребрами данной вершины. Пусть в некоторый момент после добавления нового ребра к строящемуся пути мы приходим в вершину u. Число свободных ребер в вершине u уменьшается на единицу, т. е. становится нечетным. Поскольку степень вершины u четная, то у данной вершины существует хотя бы одно свободное ребро, по которому можно продолжить построение пути. После ухода из вершины u число ее свободных ребер уменьшается еще на единицу и вновь становится четным. Что касается исходной вершины v, то после начала процесса число ее свободных ребер нечетно и остается нечетным до тех пор, пока мы не вернемся в эту вершину. Таким образом, процесс построения пути может закончиться только в той вершине, из которой он начинался, т. е. получится цикл.

Если полученный цикл C_1 не проходит через все рёбра графа, то обязательно существует (поскольку граф связный) хотя бы одна принадлежащая полученному циклу вершина w с четным числом свободных ребер. Начиная с этой вершины, можно построить цикл C_2, начинающийся и завершающийся в вершине w. Для объединения циклов C_1 и C_2 в один цикл необходимо разделить цикл C_1 на два участка относительно вершины w: первый участок с началом в вершине v и концом в вершине w и второй участок с началом в вершине w и концом в вершине v. В полученный разрыв включается цикл C_2. В результате получается цикл, начинающийся и заканчивающийся в вершине v, но включающий в себя большее число ребер. Если и этот цикл не проходит через все ребра графа, то такой процесс расширения цикла повторяется до получения эйлерова цикла.


C4
C1
C2
C3

Построение эйлерова цикла для связного неориентированного графа $G = (V, E)$ без вершин нечетной степени представлен алгоритмом 6.20. Предполагается, что граф задан структурой смежности. Пусть в качестве произвольной начальной вершины выбрана вершина $v = v_0$. Цикл **while** строит путь с началом в вершине v_0, помещая вершины этого пути в стек *SC* и удаляя из графа включенные в путь ребра. В результате удалений ребер структура смежности графа будет содержать информацию только о свободных ребрах, еще не включенных в цикл. Процесс построения пути продолжается до тех пор, пока есть возможность удлинения пути, т. е. пока $\mathrm{Adj}(v) \neq \varnothing$. Когда достигается вершина v, для которой $\mathrm{Adj}(v) = \varnothing$, это означает, что у вершины v нет свободных ребер для продолжения построения пути. В этом случае $v = v_0$, т. е. построен цикл, вершины которого находятся в стеке *SC*, а его ребра удалены из графа. Вершина $v = v_0$ переносится в стек *SE*. Затем среди вершин полученного цикла необходимо найти вершину, у которой есть свободные ребра. Для этого очередной исследуемой вершиной v становится верхний элемент стека *SC*. Если у этой вершины нет свободных ребер, т. е. $\mathrm{Adj}(v) = \varnothing$, она переносится из стека *SC* в стек *SE*. Если же для этой вершины $\mathrm{Adj}(v) \neq \varnothing$, то процесс построения пути повторяется и в стек *SC* помещается полученный цикл с началом и концом в этой вершине. Процесс продолжается до тех пор, пока стек *SC* не станет пустым. Это означает, что в графе не осталось непройденных ребер и получен эйлеров цикл, который содержится в стеке *SE*.

$SC \leftarrow \varnothing$ // SC – стек для хранения циклов

$SE \leftarrow \varnothing$ // SE – стек для хранения эйлерова цикла

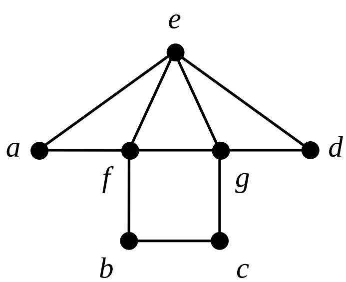
$v \leftarrow$ произвольная вершина графа

$SC \Leftarrow v$

$$
\textbf{while}\ \ SC \neq \varnothing\ \ \textbf{do}
\begin{cases}
v \leftarrow top(SC) \\
//\ top(SC) - \text{верхний элемент стека } SC \\
\textbf{if}\ \ \mathrm{Adj}(v) \neq \varnothing \\
\quad \textbf{then} \begin{cases}
u \leftarrow \mathrm{Adj}(v) \\
SC \Leftarrow u \\
//\ \text{удаление ребра } (v, u) \text{ из графа} \\
\mathrm{Adj}(v) \leftarrow \mathrm{Adj}(v) - \{u\} \\
\mathrm{Adj}(u) \leftarrow \mathrm{Adj}(u) - \{v\} \\
v \leftarrow u
\end{cases} \\
\quad \textbf{else} \begin{cases}
v \Leftarrow SC \\
SE \Leftarrow v
\end{cases}
\end{cases}
$$

Алгоритм 6.20. Построение эйлерова цикла

Эйлеров граф, заданный структурой смежности, и найденный алгоритмом эйлеров цикл представлены на рис. 6.11. Построение цикла начинается с вершины *a*. Первым найденным в графе циклом является цикл *a*, *e*, *d*, *g*, *c*, *b*, *f*, *a*, вершины которого хранятся в стеке *SC*. Затем вершина *a* переносится из стека *SC* в стек *SE* и ищется вершина из этого цикла, имеющая свободные ребра. Такой вершиной является вершина *f*, начиная с которой строится следующий цикл *f*, *e*, *g*, *f*, который добавляется в стек *SC*. В результате получается более длинный цикл *a*, *e*, *d*, *g*, *c*, *b*, *f*, *e*, *g*, *f*, *a* (конечная вершина *a* находится в стеке *SE*). Вершина *f* переносится из стека *SC* в стек *SE* и в полученном цикле ищется вершина со свободными ребрами. В процессе такого поиска все вершины, не имеющие свободных ребер, переносятся из стека *SC* в стек *SE*. Поскольку в рассматриваемом графе больше нет вершин со свободными ребрами, процесс завершается, а полученный цикл в стеке *SE* является эйлеровым.

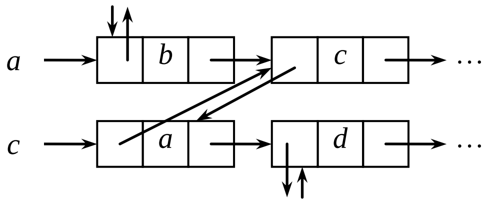


v	Adj(v)
a	e, f
b	c, f
c	b, g
d	e, g
e	a, d, f, g
f	a, b, e, g
g	c, d, e, f

Эйлеров цикл: *a*, *e*, *d*, *g*, *c*, *b*, *f*, *e*, *g*, *f*, *a*

Рис. 6.11. Эйлеров цикл в графе, заданном структурой смежности

Вычислительная сложность алгоритма определяется числом итераций цикла **while**. Каждая итерация либо помещает вершину в стек *SC* и удаляет ребро из графа, либо переносит вершину из стека *SC* в стек *SE*. Если структуру смежности реализовать таким образом, что списки смежности представляют собой двусвязные списки, причем узел с вершиной *w* из списка Adj(*v*) содержит указатель на узел с вершиной *v* в списке Adj(*w*), тогда удалить ребро можно за фиксированное время. Таким образом, сложность алгоритма есть $O(|V| + |E|)$.



Следует отметить, что рассмотренный алгоритм может обрабатывать только эйлеровы графы, поскольку не проверяет необходимые и достаточные условия существования эйлерова цикла.

Эйлеров путь, не являющийся циклом, существует в графе тогда и только тогда, когда граф связный и содержит не более чем две вершины нечетной степени. Вершины нечетной степени являются началом и концом эйлерова пути, поскольку из начальной вершины путь лишний раз выходит, а в конечную вершину лишний раз приходит.

В ориентированном графе существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда граф связный и входящая степень каждой вершины равна ее исходящей степени. Доказательство необходимости и достаточности условий практически такое же, что и для неориентированных графов, только вместо четности степеней вершин рассматриваются входящие и исходящие степени.