

## Тема 6. Алгоритмы на графах

### 6.4. Остовные деревья

*Остовное дерево* (остов, каркас, стягивающее дерево) произвольного неориентированного связного графа  $G = (V, E)$  есть суграф графа  $G$ , представляющий собой дерево  $T = (V, E_T)$ , где  $E_T \subseteq E$ , т. е. подграф, содержащий все вершины графа  $G$ . Если граф  $G$  несвязный, то множество, состоящее из остовных деревьев каждой связной компоненты, называется остовным лесом. Каждое дерево с  $n$  вершинами имеет в точности  $n - 1$  ребер. Поэтому деревья можно считать минимально связными графами. Удаление любого ребра преобразует дерево в несвязный граф.

Для построения остовного дерева (леса) неориентированного графа  $G$  последовательно просматриваются ребра графа, оставляя те, которые не образуют циклов с уже выбранными. Очевидно, что для графа  $G$  можно построить множество остовных деревьев. Причем с увеличением числа вершин число остовных деревьев растет экспоненциально (полный граф с  $n$  вершинами имеет  $n^{n-2}$  остовных деревьев). Простейшим способом построения остовных деревьев является использование процедур поиска в глубину (*DFS*-дерево) и ширину (*BFS*-дерево).

### 6.4.1. DFS-дерево

*DFS-дерево* – это остовное дерево  $T = (V, E_T)$ , которое получается в результате поиска в глубину по неориентированному графу  $G = (V, E)$ ,  $E_T \subseteq E$ . При этом ребра графа разбиваются на два множества:  $E_T$  – множество *ребер дерева* и  $E_B$  – множество ребер, не вошедших в остовное дерево, называемых *обратными ребрами*, так как они ведут назад в пройденные ранее вершины. Поиск в глубину вводит ориентацию на ребра графа  $G$  в соответствии с направлением прохождения, т. е. получается ориентированное остовное дерево. Если в *DFS*-дереве имеется путь из вершины  $v$  в вершину  $w$ , то  $v$  – предок  $w$ , а  $w$  – потомок  $v$ . Поскольку инцидентные вершине ребра графа могут выбираться при поиске в глубину в произвольном порядке, *DFS*-дерево для заданного графа не единственное. Построение остовного дерева способом поиска в глубину представлено алгоритмом 6.3.

В алгоритме каждой вершине  $v \in V$  сопоставлен элемент  $num(v)$ . Эти элементы служат для постепенной нумерации вершин числами от 1 до  $|V|$  по мере их прохождения. Начальное значение  $num(v) = 0$  для всех  $v \in V$  показывает, что ни одна вершина не пройдена. Когда вершина  $v$  посещается в первый раз,  $num(v)$  присваивается ненулевое значение. Рекурсивная процедура  $DFS(v, u)$  реализует поиск в глубину в графе  $G = (V, E)$ , содержащем  $v$ , и строит *DFS*-дерево  $T = (V, E_T)$ ,  $E_T \subseteq E$ ; вершина  $u$  является отцом вершины  $v$  в дереве. Граф представляется структурой смежности. Элементы множества  $E_T$  – ребра дерева, а элементы множества  $E_B$  – обратные ребра. Если граф  $G$  несвязный, то  $T$  будет остовным лесом. Вершина, с которой начинается поиск, считается корнем соответствующего дерева.

```

for  $x \in V$  do  $num(x) \leftarrow 0$  // инициализация
 $i \leftarrow 0$ 
 $E_T \leftarrow \emptyset$  //  $E_T$  – множество ребер
 $E_B \leftarrow \emptyset$  //  $E_B$  – множество обратных ребер
for  $x \in V$  do if  $num(x) = 0$  then  $DFST(x, 0)$ 

```

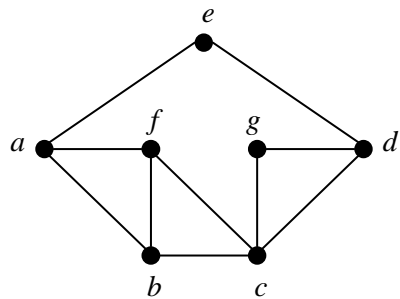
```

procedure  $DFST(v, u)$ 
   $i \leftarrow i + 1$ 
   $num(v) \leftarrow i$ 
  for  $w \in Adj(v)$  do
    if  $num(w) = 0$ 
      then  $\begin{cases} // (v, w) - \text{ребро дерева} \\ E_T \leftarrow E_T \cup \{(v, w)\} \\ DFST(w, v) \end{cases}$ 
    else if  $num(w) < num(v)$  and  $w \neq u$ 
      then  $\begin{cases} // (v, w) - \text{обратное ребро} \\ E_B \leftarrow E_B \cup \{(v, w)\} \end{cases}$ 
  return

```

Алгоритм 6.3. Построение остовного дерева поиском в глубину

$DFS$ -дерево для неориентированного графа (см. рис. 6.2) представлено на рис. 6.3, *a*. Ребра дерева изображены сплошными линиями, обратные ребра – пунктирными. Числа около ребер указывают порядок включения ребер в множества  $E_T$  и  $E_B$ .



$v$	$\text{Adj}(v)$
$a$	$b, e, f$
$b$	$a, c, f$
$c$	$b, d, f, g$
$d$	$c, e, g$
$e$	$a, d$
$f$	$a, b, c$
$g$	$c, d$

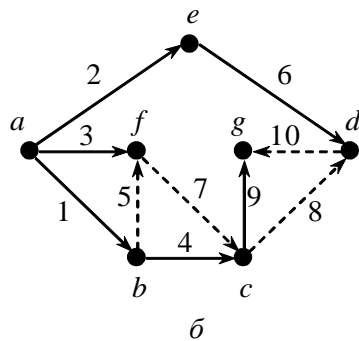
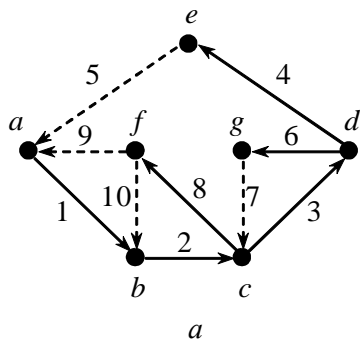


Рис. 6.3. Остовные деревья для графа на рис. 6.2  
 $a$  –  $DFS$ -дерево;  $\bar{b}$  –  $BFS$ -дерево

Необходимо обратить внимание, что если  $num(w) = 0$ , то  $(v, w)$  – ребро дерева. Если же  $num(w) \neq 0$ , то условием того, что  $(v, w)$  будет обратным ребром, является соотношение  $num(w) < num(v)$  и  $w \neq u$ . Таким образом, нумерация вершин важна для выделения обратных ребер. В случае, если не требуется явное формирование множества  $E_B$  обратных ребер, нумерации вершин не требуется, достаточно только отличать уже пройденные вершины от еще не пройденных. Поэтому вместо  $num(v)$  можно использовать элементы типа  $nw(v)$ , как в алгоритме поиска в глубину (см. алгоритм 6.1). Нет необходимости также в хранении в элементе  $u$  отца вершины  $v$ . Таким образом, более простая версия алгоритма будет формировать только множество  $E_T$  ребер дерева.

Временная сложность алгоритма определяется сложностью поиска в глубину, т. е.  $O(|V| + |E|)$ .

### 6.4.2. *BFS-дерево*

*BFS-дерево* – это остовное дерево  $T = (V, E_T)$ , которое получается в результате поиска в ширину по неориентированному графу  $G = (V, E)$ ,  $E_T \subseteq E$ . При этом ребра графа разбиваются на два множества:  $E_T$  – множество *ребер дерева* и  $E_C$  – множество ребер, не вошедших в остовное дерево, которые можно назвать *поперечными ребрами*, так как они соединяют вершины, не являющиеся в дереве ни предками, ни потомками друг друга. Поиск в ширину вводит ориентацию на ребра графа  $G$  в соответствии с направлением прохождения, т. е. получается ориентированное остовное дерево. Если граф  $G = (V, E)$  несвязный, то  $T = (V, E_T)$  будет остовным лесом. Построение *BFS-дерева* способом поиска в ширину представлено алгоритмом 6.4.

```

for  $x \in V$  do  $num(x) \leftarrow 0$  // инициализация
 $i \leftarrow 0$ 
 $E_T \leftarrow \emptyset$  //  $E_T$  – множество ребер дерева
 $E_C \leftarrow \emptyset$  //  $E_C$  – множество поперечных ребер
for  $x \in V$  do if  $num(x) = 0$  then  $BFST(x)$ 

```

```

procedure  $BFST(u)$ 

```

```

 $Q \leftarrow \emptyset$  // очередь  $Q$  пуста

```

```

 $Q \leftarrow u$ 

```

```

 $i \leftarrow i + 1$ 

```

```

 $num(u) \leftarrow i$ 

```

```

while  $Q \neq \emptyset$  do {
     $v \leftarrow Q$ 
    for  $w \in Adj(v)$  do
        if  $num(w) = 0$ 
            then {
                //  $(v, w)$  – ребро дерева
                 $Q \leftarrow w$ 
                 $i \leftarrow i + 1$ 
                 $num(w) \leftarrow i$ 
                 $E_T \leftarrow E_T \cup \{(v, w)\}$ 
            }
            else if  $num(w) > num(v)$ 
                then {
                    //  $(v, w)$  – поперечное ребро
                     $E_C \leftarrow E_C \cup \{(v, w)\}$ 
                }
}

```

```

return

```

Алгоритм 6.4. Построение остовного дерева поиском в ширину

Критерием распознавания поперечных ребер является соотношение  $num(w) > num(v)$ . Если  $num(w) < num(v)$ , это означает, что все инцидентные вершине  $w$  ребра уже исследованы и классифицированы.

*BFS*-дерево для неориентированного графа (см. рис. 6.2) представлено на рис. 6.3, б. Ребра дерева изображены сплошными линиями, поперечные ребра – пунктирными. Числа около ребер дерева указывают порядок включения ребер в множества  $E_T$  и  $E_C$ .

Временная сложность алгоритма определяется сложностью поиска в ширину, т. е.  $O(|V| + |E|)$ .