Тема 6. Алгоритмы на графах

Множество разнообразных задач теоретического и прикладного характера естественно формулируется в терминах неориентированных или ориентированных графов. Обычно решение задачи включает анализ графа или проверку его на наличие определенных свойств. Графы, соответствующие реальным задачам, часто громоздки и сложны. Поэтому большое практическое значение имеет разработка эффективных алгоритмов на графах и знание основных способов машинного представления графов.

Граф будем обозначать $G = (V, E)$, где V – множество вершин графа, E – множество ребер графа. Будем использовать символы $|V|$ и $|E|$ для обозначения соответственно числа вершин и числа ребер в графе.

6.1. Представления графов

Выбор соответствующей структуры данных для представления графов оказывает существенное влияние на эффективность алгоритмов. Рассмотрим наиболее распространенные способы представления графов и их основные достоинства и недостатки.

Матрица смежности. Матрица смежности графа $G = (V, E)$ есть матрица $A = [a_{ij}]$ размера $|V| \times |V|$, в которой $a_{ij} = 1$, если $(v_i, v_j) \in E$, т. е. в G существует ребро, соединяющее вершины v_i и v_j, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Матрица смежности для ориентированного графа (рис. 6.1, *а*) представлена на рис. 6.1, *б*.

Необходимо отметить, что в неориентированном графе ребро (v_i, v_j) идет как от v_i к v_j, так и от v_j к v_i. Поэтому матрица смежности такого графа всегда является симметричной.

Основным достоинством матрицы смежности является то, что время, необходимое для определения наличия некоторого ребра, фиксировано и не зависит от $|V|$ и $|E|$. Поэтому такое представление удобно для тех алгоритмов, в которых часто нужно знать, есть ли в графе данное ребро или нет.

Недостаток заключается в том, что независимо от числа ребер матрица занимает память объема $|V|^2$. На практике это неудобство можно иногда уменьшить, храня целую строку (столбец) матрицы в одном машинном слове. Если машинное слово имеет длину l двоичных разрядов, то каждая строка матрицы требует $\lceil |V| / l \rceil$ слов. Если каждая строка начинается с нового слова, то для хранения матрицы требуется $|V| \cdot \lceil |V| / l \rceil$ слов. Поскольку у неориентированного графа матрица смежности симметрична, то для ее представления достаточно хранить только верхний или нижний треугольник. В результате экономится почти 50 % памяти, однако время вычислений может при этом увеличиться, так как каждое обращение к a_{ij} должно быть заменено (для верхнего треугольника) следующим: «**if** $i > j$ **then** a_{ji} **else** a_{ij}».

Большинство алгоритмов, использующих представление графа его матрицей смежности, требуют времени $O(|V|^2)$. Даже начальное заполнение матрицы требует времени $O(|V|^2)$.

Матрица инциденций. Матрица инциденций графа $G = (V, E)$ есть матрица $B = [b_{ij}]$ размера $|V| \times |E|$ (строки соответствуют вершинам графа, а столбцы – ребрам). Для ориентированного графа $b_{ij} = 1$, если дуга e_j инцидентна вершине v_i и исходит из нее; $b_{ij} = -1$, если дуга e_j инцидентна вершине v_i и заходит в нее; $b_{ij} = 0$, если дуга e_j не инцидентна вершине v_i. Если имеется петля, т. е. дуга e_j вида (v_i, v_i), то для обозначения b_{ij} используется какой-нибудь дополнительный символ (например, 2). В случае неориентированного графа $b_{ij} = 1$, если ребро e_j инцидентно вершине v_i; $b_{ij} = 0$ в противном случае. Матрица инциденций ориентированного графа (рис. 6.1, *а*) представлена на рис. 6.1, *в*. Очевидно, что всякий столбец матрицы содержит точно два ненулевых элемента.

С алгоритмической точки зрения матрица инциденций является одним из худших способов представления графа. Это связано с тем, что требуется $|V| \cdot |E|$ ячеек памяти, причем большинство этих ячеек занято нулями. Неудобен также доступ к информации, например, для определения, существует ли дуга (v_i, v_j), требуется в худшем случае перебор всех столбцов матрицы, т. е. $|E|$ шагов.

Матрица весов. Матрица весов используется для представления взвешенного графа, т. е. графа, в котором ребру (i, j) сопоставлено число w_{ij}, называемое весом ребра. Матрица весов есть матрица $W = [w_{ij}]$, где w_{ij} – вес ребра, соединяющего вершины i и j. Веса несуществующих ребер обычно полагают равными ∞ или 0 в зависимости от приложений. Когда вес несуществующего ребра равен 0, матрица весов является простым обобщением матрицы смежности.

Список ребер. Для разреженных графов (когда $|E|$ меньше $|V|^2$) более экономичным в отношении памяти может оказаться метод представления графа списком ребер, где каждое ребро представляется парой вершин. Список ребер можно реализовать двумя массивами: $g = (g_1, g_2, \ldots, g_{|E|})$ и $h = (h_1, h_2, \ldots, h_{|E|})$. Каждый элемент в массивах есть метка вершины, а i-е ребро графа выходит из вершины g_i и входит в вершину h_i. Список ребер ориентированного графа (рис. 6.1, *а*) представлен на рис. 6.1, *г*. Ясно, что объем памяти в этом случае составляет порядка $2|E|$.

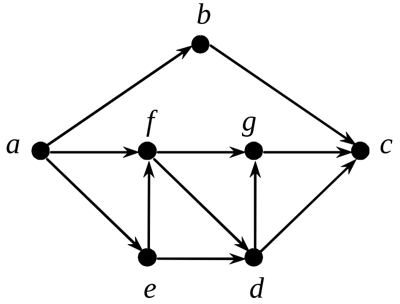
Неудобством такого представления является большое число шагов (порядка $|E|$ в худшем случае), необходимое для получения множества вершин, к которым ведут ребра из данной вершины. Ситуацию можно значительно улучшить, упорядочив множество пар лексикографически и применяя бинарный поиск.

Структура смежности. При представлении графа структурой смежности каждой вершине $v \in V$ сопоставляется $\mathrm{Adj}(v)$ – список всех вершин, смежных с вершиной v (список смежности). В большинстве алгоритмов относительный порядок вершин в $\mathrm{Adj}(v)$ не важен, поэтому $\mathrm{Adj}(v)$ удобно считать мультимножеством (множеством, если граф простой) вершин, смежных с v. Структура смежности ориентированного графа на рис. 6.1, *а* изображена на рис. 6.1, *д*.

Если для хранения метки вершины использовать одно машинное слово, то структура смежности ориентированного графа требует порядка $|V| + |E|$ слов. Если граф неориентированный, нужно порядка $|V| + 2|E|$ слов, так как каждое ребро встречается дважды. Многие алгоритмы, использующие представление графа структурой смежности, требуют время вычислений $O(|V| + |E|)$.

В простейшем случае структура смежности может быть удобно реализована массивом из $|V|$ односвязных списков, где каждый список содержит смежные вершины. Поле данных содержит метку одной из смежных вершин, а поле указателя указывает следующую смежную вершину.

Во многих задачах на графах выбор представления является решающим для эффективности алгоритмов. Переход от одного представления к другому относительно прост и может быть выполнен за $O(|V|^2)$ операций. Поэтому, если решение задачи на графе обязательно требует числа операций, по крайней мере пропорционального $|V|^2$, то время ее решения не зависит от представления графа, так как оно может быть изменено за $O(|V|^2)$ операций.



а

	a	b	c	d	e	f	g
a	0	1	0	0	1	1	0
b	0	0	1	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	1
e	0	0	0	1	0	1	0
f	0	0	0	1	0	0	1
g	0	0	1	0	0	0	0

б

	(a,b)	(a,e)	(a,f)	(b,c)	(d,c)	(d,g)	(e,d)	(e,f)	(f,d)	(f,g)	(g,c)
a	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	−1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	−1	−1	0	0	0	0	0	−1
d	0	0	0	0	1	1	−1	0	−1	0	0
e	0	−1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
f	0	0	−1	0	0	0	0	−1	1	1	0
g	0	0	0	0	0	−1	0	0	0	−1	1

в

$$g = (a, a, a, b, d, d, e, e, f, f, g)$$
$$h = (b, e, f, c, c, g, d, f, d, g, c)$$

г

v	Adj(v)
a	b, e, f
b	c
c	–
d	c, g
e	d, f
f	d, g
g	c

д

Рис. 6.1. Ориентированный граф и его представления:
а – орграф; *б* – матрица смежности; *в* – матрица инциденций;
г – список ребер; *д* – структура смежности