Тема 2. Основные свойства и задачи анализа сетей Петри

Целью моделирования какой-либо системы сетью Петри является исследование поведения моделируемой системы на основе анализа определенных свойств сетей Петри. Нахождение конкретного свойства формулируется как соответствующая задача анализа. Рассмотрим наиболее важные свойства сетей Петри, необходимые для полноценного анализа систем.

2.1. Безопасность и ограниченность

Сеть Петри *безопасна*, если все ее позиции безопасны. Позиция $p \in P$ сети Петри $N = (P, T, F, B, M_0)$ называется *безопасной*, если $M(p) \leq 1$ для любой маркировки $M \in R(N)$, т. е. при любой достижимой в сети маркировке позиция p не может содержать более одного маркера. В безопасной сети любая маркировка представляет собой вектор из 0 и 1. Следовательно, позицию такой сети можно интерпретировать одним триггером.

Если позиция не является кратной входной или кратной выходной для некоторого перехода, ее можно сделать безопасной. Для этого к позиции p, которую необходимо сделать безопасной, добавляется новая позиция p'. Переходы t, в которых позиция p используется в качестве входной или выходной, модифицируются следующим образом:

а) если $p \in I(t)$ и $p \notin O(t)$, то p' добавляется к $O(t)$;

б) если $p \in O(t)$ и $p \notin I(t)$, то p' добавляется к $I(t)$.

Пример преобразования сети Петри, не являющейся безопасной, в безопасную сеть Петри представлен на рис. 4. Цель введения новой позиции p' – ограничить максимальное значение маркировки позиции p единицей. Поэтому позиция p содержит маркер только в том случае, если маркировка позиции p' равна нулю, и наоборот, маркировка позиции p равна нулю только тогда, когда маркер содержится в позиции p', т. е. суммарное число маркеров в позициях p и p' всегда равно единице. Любой переход, удаляющий при срабатывании маркер из позиции p, должен помещать маркер в позицию p', а переход, удаляющий маркер из позиции p', должен помещать маркер в позицию p. Должна быть модифицирована также начальная маркировка для обеспечения того, чтобы точно один маркер был либо в p, либо в p'.

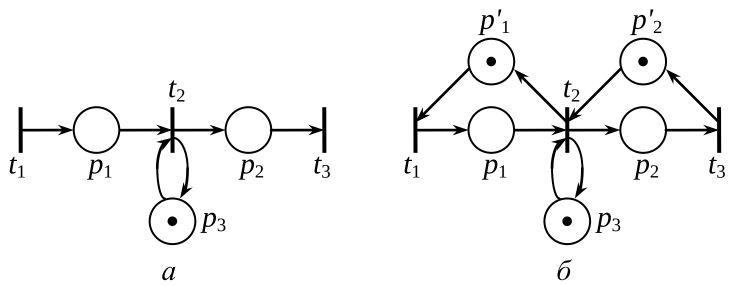

Рис. 1. Преобразование небезопасной (*а*) сети Петри в безопасную (*б*)

Очевидно, что такая принудительная безопасность возможна только для позиций, которые при начальной маркировке являются безопасными и значения функций инцидентности F и B этих позиций для всех переходов равны 0 или 1. Например, если для входной позиции p перехода t имеем $F(p, t) = 2$ (кратность дуги, соединяющей p и t, равна двум), то чтобы выполнилось условие срабатывания перехода t, позиция p должна содержать не менее двух маркеров, т. е. эта позиция не может быть безопасной.

Безопасность является частным случаем более общего свойства ограниченности. Сеть Петри N называется *ограниченной*, если все ее позиции являются ограниченными. Позиция p сети Петри N называется k-*ограниченной*, если $M(p) \le k$ для любой маркировки $M \in R(N)$, т. е. при любой достижимой в сети маркировке позиция p не может содержать более k маркеров. Очевидно, что при $k = 1$ позиция безопасна. Если важен только сам факт ограниченности позиции, а не конкретное значение границы, то позицию называют *ограниченной*, если она k-ограниченна для некоторого k. Ограниченность позиции позволяет интерпретировать ее в моделируемой системе как счетчик, накопитель (буфер) данных и т. п.

Следует иметь в виду, что граница k может являться функцией от позиции, т. е. для каждой позиции может существовать свой определенный предел ограниченности. Однако если позиция k-ограниченна, то она и k'-ограниченна для всех $k' \geq k$. Поэтому если интересует конкретное значение границы сети Петри, то сеть называют k-*ограниченной*, если все ее позиции являются k-ограниченными. В этом случае k равно максимуму из границ каждой позиции (максимум можно легко вычислить, поскольку множество позиций в сети конечно).

В сети Петри на рис. 2 позиции p_1 и p_3 являются ограниченными (более того – безопасными), т. к. каждая из них может содержать не более одного маркера, т. е. для них граница $k = 1$. Однако сама сеть неограниченна, поскольку позиция p_2 не является ограниченной (существуют последовательности срабатываний переходов, которые увеличивают маркировку этой позиции до бесконечности).

Неограниченную позицию можно сделать k-ограниченной, используя преобразования, аналогичные преобразованиям небезопасной позиции в безопасную. При этом следует учитывать также кратности входных и выходных дуг, инцидентных позиции, а суммарное число маркеров в позициях p и p' поддерживать равным k.

2.2. Сохранение

Для моделирования систем распределения ресурсов важным является свойство сохранения. В этом случае маркеры в позициях сети Петри можно интерпретировать как ресурсы, количество которых в процессе функционирования должно оставаться неизменным.

Сеть Петри $N = (P, T, F, B, M_0)$ называется *строго сохраняющей* (*консервативной*), если для всех $M, M' \in R(N)$ выполняется условие

$$\sum_{p \in P} M(p) = \sum_{p \in P} M'(p),$$

т. е. при любой достижимой в сети маркировке сумма маркеров во всех ее позициях остается постоянной. В такой сети Петри у каждого перехода число входных дуг должно быть равно числу выходных дуг, поскольку только в этом случае срабатывание перехода не изменит общее число маркеров в сети (хотя сами маркировки изменяются в соответствии с правилом изменения маркировок в результате срабатывания перехода). О строго сохраняющей сети Петри можно сказать, что она не теряет и не порождает маркеры, а передвигает их.

Из сказанного следует, что свойство строгого сохранения накладывает очень сильные ограничения на структуру сети Петри. Существует менее строгое определение свойства сохранения, которое не требует взаимно однозначного соответствия маркеров и ресурсов. Это удобно, когда маркер может представлять сразу несколько ресурсов и используется для создания кратных маркеров (по одной на ресурс) в результате срабатывания перехода с меньшим числом входов, чем выходов (например, такой переход может интерпретироваться как подключение к системе сразу нескольких ресурсов). Для этого вводится специальный *вектор весов* $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $n = |P|$, который определяет вес w_i маркера для каждой позиции $p_i \in P$, т. е. маркерам присваиваются веса (обычно положительные целые числа), причем вес маркера определяется позицией, в которой он находится, а веса всех маркеров, содержащихся в одной позиции, одинаковы. Таким образом, веса маркеров связываются с каждой позицией сети, т. е. вес маркера является функцией от позиции.

Сеть Петри $N = (P, T, F, B, M_0)$ называется *сохраняющей по отношению к вектору весов* $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $n = |P|$, $w_i \geq 0$, если для всех $M, M' \in R(N)$ выполняется условие

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot M(p_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot M'(p_i),$$

т. е. взвешенная сумма для всех достижимых в сети маркировок остается постоянной. Очевидно, что строго сохраняющая сеть Петри является сохраняющей по отношению к вектору весов $W = (1, 1, \ldots, 1)$.

Следует заметить, что все сети Петри являются сохраняющими по отношению к вектору весов $W = (0, 0, \ldots, 0)$, т. е. теряется смысл выделения свойства сохранения. Поэтому такой вектор весов необходимо исключить из рассмотрения. В сети Петри, моделирующей некоторую систему, может оказаться так, что не все маркеры и позиции связаны с распределением ресурсов. В таких случаях позициям, не являющимся важными с точки зрения определения свойства сохранения, можно присвоить нулевой вес. Сеть Петри, имеющая неограниченные позиции с ненулевыми значениями весов, не будет обладать свойством сохранения. Если неограниченная позиция не важна для проверки свойства сохранения, то вес этой позиции должен быть равным нулю. Для подобных ситуаций, когда необходимо проверять свойство сохранения только для некоторого подмножества всего множества позиций сети, в определении свойства сохранения и используется отношение $w_i \geq 0$.

Мы будем использовать более строгое определение свойства сохранения: сеть Петри называется *сохраняющей*, если она является сохраняющей по отношению к вектору W с положительными ненулевыми значениями весов, т. е. $w_i > 0$. В соответствии с этим определением, чтобы сеть Петри была сохраняющей, она должна быть ограниченной.

Сеть Петри на рис. 2 не является сохраняющей, поскольку она неограниченна. Сеть Петри на рис. 5 является строго сохраняющей (при любой достижимой в сети маркировке сумма маркеров во всех ее позициях равна 3), а сеть Петри на рис. 6 – сохраняющей по отношению к вектору весов $W = (1, 1, 2, 2, 1)$ с взвешенной суммой для всех достижимых маркировок, равной 3.

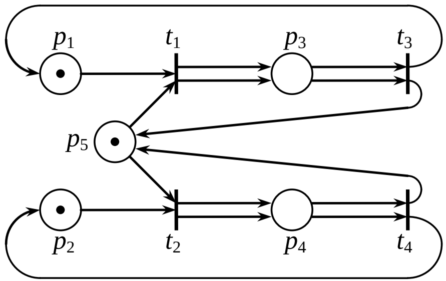

Рис. 2. Строго сохраняющая сеть Петри

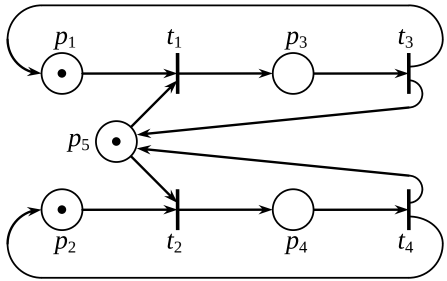

Рис. 3. Сохраняющая сеть Петри по отношению к вектору весов (1,1,2,2,1)

2.3. Живость

При функционировании сети Петри возможны ситуации, когда при некоторой маркировке $M \in R(N)$ не может сработать ни один переход сети, т. е. достигается тупиковая маркировка. Выявление тупиковых ситуаций является важной задачей при анализе систем с взаимодействующими процессами. Например, подобные случаи имеют место при взаимных блокировках процессов при распределении между ними ресурсов системы. Очевидно, что такие ситуации недопустимы. С их выявлением связаны следующие определения свойств сетей Петри.

Переход $t \in T$ сети Петри $N = (P, T, F, B, M_0)$ называется *потенциально живым при маркировке* $M \in R(N)$, если существует маркировка $M' \in R(N, M)$, такая, что $M' \geq F(t)$, т. е. существует достижимая от маркировки M маркировка M', при которой для перехода t выполняется условие срабатывания. Переход t

сети Петри N называется *живым* (*активным*), если он является потенциально живым при любой достижимой в сети N маркировке. Таким образом, если переход живой, то всегда можно перевести сеть Петри из ее текущей маркировки в маркировку, при которой переход станет разрешенным. Если переход не живой, но потенциально живой, то в множестве достижимости сети Петри существует маркировка, от которой не достижима ни одна маркировка, при которой данный переход мог бы сработать.

Переход $t \in T$ сети Петри N называется *мертвым* (*пассивным*), если он не является потенциально живым при любой достижимой в сети маркировке, т. е. мертвый переход никогда не сможет сработать. Переход $t \in T$ сети Петри N называется *потенциально мертвым*, если существует маркировка $M \in R(N)$, такая, что при любой маркировке $M' \in R(N, M)$ для перехода t не выполняется условие срабатывания. Маркировка M в этом случае называется t-*тупиковой*; если она t-тупиковая для всех $t \in T$, то она является тупиковой. Если переход не мертвый, но потенциально мертвый, то в множестве достижимости сети Петри существует маркировка, при которой данный переход может сработать. Таким образом, один и тот же переход может являться и потенциально живым, и потенциально мертвым.

Сеть Петри называется *живой*, если все ее переходы живые. Сеть Петри называется *мертвой*, если все ее переходы мертвые.

В сети на рис. 2 все переходы потенциально живые, поскольку достижимы маркировки, при которых они могут сработать, например, при маркировке (1, 2, 0) разрешены переходы t_1 и t_3, а при маркировке (0, 0, 1) – переходы t_2 и t_4. В то же время все переходы потенциально мертвые, поскольку достижимы тупиковые маркировки, например (0, 2, 0), (0, 4, 0), при которых для всех переходов не выполняются условия срабатывания. Поэтому данная сеть Петри не является живой, но не является и мертвой. Примерами живых сетей Петри являются сети, представленные на рис. 5 и рис. 6.

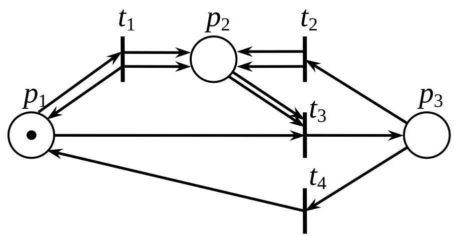

Рис. 4. Сеть Петри

2.4. Устойчивость

Пусть $M(t) \subseteq R(N)$ – множество достижимых в сети Петри N маркировок, при которых для перехода t выполняется условие срабатывания. Если для всех маркировок $M \in M(t)$ срабатывание любого другого разрешенного при маркировке M перехода не лишает переход t возможности сработать (оставляет его разрешенным), то переход t называется *устойчивым*. Сеть Петри называется *устойчивой*, если все ее переходы устойчивы.

Свойство устойчивости важно для выявления конфликтов между процессами, когда запуск одного процесса влияет на другой процесс. В устойчивой сети Петри конфликты либо отсутствуют, либо успешно разрешаются. Обычно два разрешенных перехода находятся в конфликте, если они имеют по крайней мере одну общую входную позицию. Срабатывание одного из них может препятствовать срабатыванию другого (*запрещает* его), поскольку удаляется маркер из общего входа.

В сети Петри на рис. 2 устойчивым является только переход t_3. Хотя он и находится в конфликте с переходом t_1 (имеют общую входную позицию p_1), но срабатывание t_1 сохраняет маркировку в позиции p_1, т. е. переход t_3 остается разрешенным. Если же первым сработает t_3, то он удалением маркера из позиции p_1 запрещает переход t_1. Поэтому переход t_1 не является устойчивым. Переходы t_2 и t_4 также неустойчивы, т. к. они находятся в конфликте по общей входной позиции p_3, и срабатывание любого из них запрещает другой переход. Поэтому данная сеть Петри не является устойчивой.

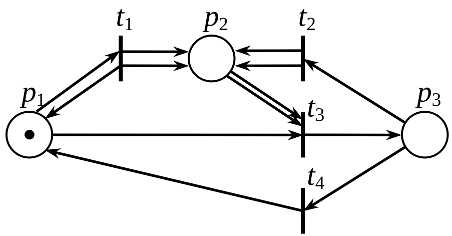

Рис. 5. Сеть Петри

2.5. *Достижимость и покрываемость*

Распознавание большинства рассмотренных свойств сетей Петри связано с определением возможности достижения некоторых заданных маркировок в сети. *Задача достижимости* формулируется следующим образом: для данной сети Петри N и маркировки M определить, является ли маркировка M достижимой из начальной маркировки сети, т. е. $M \in R(N)$?

Многие задачи анализа можно сформулировать в терминах задачи достижимости. Например, пусть при решении задачи живости заранее известна тупиковая маркировка. Тогда, если эта маркировка достижима из начальной маркировки, то сеть не является живой.

Разновидностью задачи достижимости является *задача покрываемости*, которая формулируется следующим образом: для данной сети Петри N и маркировки M определить, существует ли такая достижимая маркировка $M' \in R(N)$, что $M' \geq M$. При этом говорят, что маркировка M' *покрывает* маркировку M.

Иногда при решении задач достижимости и покрываемости возникает необходимость игнорировать маркировки отдельных позиций и рассматривать только некоторое подмножество важных для анализа позиций. Тогда соответствующие задачи называются задачами *достижимости подмаркировки* и *покрываемости подмаркировки*.

Задачи достижимости и покрываемости можно обобщить для определения достижимости и покрываемости множества маркировок. Однако если это множество конечно, то данные задачи *достижимости множества* и *покрываемости множества* можно решить многократным решением задач достижимости и покрываемости для каждой маркировки множества.