Тема 1. Сети Петри

Характерными особенностями многих сложных дискретных систем являются наличие асинхронных взаимодействующих параллельных процессов и недетерминированность их поведения, что обусловливает неадекватность описания поведения таких систем в терминах классической теории автоматов. Эффективным инструментом формального описания структуры и взаимодействия параллельных процессов и систем являются сети Петри. Особенность сетей Петри заключается в том, что они позволяют отображать параллелизм, асинхронность, недетерминизм, иерархичность моделируемых объектов достаточно простыми средствами, что делает их удобным инструментом исследования систем широкого класса. Важным достоинством сетей Петри является возможность их модификаций и расширений, которые могут увеличить выразительные способности сетей как аппарата моделирования.

1.1. Определение сети Петри

Существует множество определений сетей Петри. В большинстве случаев между ними нет существенной разницы, а различие в определениях в основном проявляется в обозначениях и ограничениях на рассматриваемые классы сетей Петри. Рассмотрим так называемый класс *обобщенных* сетей Петри.

Сеть Петри формально определяется как $N = (P, T, F, B, M_0)$. Здесь $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ – конечное непустое множество элементов, называемых *позициями*, $n > 0$. $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$ – конечное непустое множество элементов, называемых *переходами*, $m > 0$. Множества позиций и переходов не пересекаются ($P \cap T = \varnothing$). F: $P \times T \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ и B: $T \times P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ – функции инцидентности позиций и переходов. Следует обратить внимание на то, что инцидентны только элементы разных типов (позиция и переход или переход и позиция), но ни в коем случае не могут быть инцидентны элементы одного типа (переход и переход или позиция и позиция). M_0: $P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$ – функция начальной маркировки, которая сопоставляет каждой позиции $p \in P$ некоторое неотрицательное число $M_0(p)$, называемое *маркировкой позиции p*.

Функции F и B удобно задавать матрицами. В каждой матрице множество строк соответствует множеству переходов, а множество столбцов – множеству позиций. Элементы матриц для всех $p \in P$ и $t \in T$ определяются следующим образом: $f_{tp} = F(p, t)$ и $b_{tp} = B(t, p)$, т. е. можно говорить о том, что матрица F определяет входы в переходы, а матрица B – выходы. Если позиции сети $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ упорядочены каким-либо образом, то каждому переходу $t \in T$ можно поставить в соответствие два целочисленных вектора $F(t)$ и $B(t)$ длиной $n = |P|$, причем

$F(t) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $f_i = F(p_i, t)$, $1 \le i \le n$,

$B(t) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, где $b_i = B(t, p_i)$, $1 \le i \le n$.

Очевидно, что векторы $F(t)$ и $B(t)$ представляют собой строки матриц F и B, соответствующие переходу t.

Графическим представлением сети Петри является двудольный ориентированный мультиграф с двумя типами вершин (рис. 1). Вершины-позиции изображаются кружками, а вершины-переходы – черточками (барьерами) или прямоугольниками (если переходы соответствуют неэлементарным объектам). Функциям инцидентности F и B соответствуют направленные дуги графа, причем значения функций указывают кратность дуг. Из вершины-позиции p в вершину-переход t ведет дуга, если и только если $F(p, t) \ge 1$, причем кратность дуги равна $F(p, t)$; из вершины-перехода t в вершину-позицию p ведет дуга, если и только если $B(t, p) \ge 1$, причем кратность дуги равна $B(t, p)$. Если кратность некоторой дуги равна k, то можно использовать пучок дуг, помеченный числом кратности (дуга для $F(p_1, t_3) = 7$); при малом k такую дугу можно представить в виде k параллельных дуг (дуга для $F(p_2, t_3) = 2$). Кратность дуг, равная единице, обычно специально не отмечается. Маркировка позиции p на графе представляется числом $M_0(p)$ или, если это число невелико, соответствующим количеством точек (маркеров, фишек), помещаемым в позицию (на рис. 1 маркировки $M_0(p_1) = 2$ и $M_0(p_2) = 9$).

Множество позиций, из которых дуги идут к переходу t, называется *множеством входных позиций* перехода t. Множество позиций, в которые идут дуги из перехода t,называется *множеством выходных позиций* перехода t. Обозначим эти множества соответственно через $I(t)$ и $O(t)$. Аналогично множества входных и выходных переходов для позиции p обозначим соответственно через $I(p)$ и $O(p)$. Например, переход t_3 сети Петри на рис. 1 имеет множество входных позиций $I(t_3) = \{p_1, p_2\}$ и множество выходных позиций $O(t_3) = \{p_3\}$.

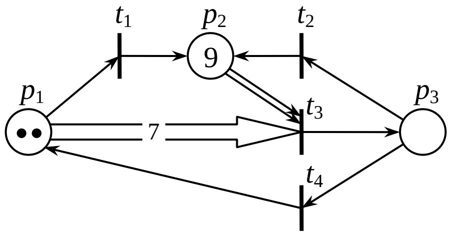


Рис. 1. Графическое представление сети Петри

1.2. *Выполнение сети Петри*

Функционирование сети Петри описывается с помощью множества последовательностей срабатываний переходов и множества достижимых в сети маркировок. Выполнением сети Петри управляют количество и распределение маркеров в сети (т. е. маркировка). Маркировка сети Петри – это функция $M: P \to \{0, 1, 2, \ldots\}$, которая сопоставляет каждой позиции $p \in P$ некоторое неотрицательное число $M(p)$. Если позиции сети $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ упорядочены каким-либо образом, то маркировку M сети (в том числе и начальную маркировку M_0) можно представить n-мерным вектором $M = (M(p_1), M(p_2), \ldots, M(p_n))$, в котором значения элементов равны маркировкам соответствующих позиций. Маркировка сети Петри определяет ее состояние. Изменение маркировки (переход из одного состояния в другое) осуществляется в результате срабатывания переходов.

Переход $t \in T$ может сработать (является *разрешенным*) при некоторой маркировке M, если для всех $p \in I(t)$

$$M(p) \geq F(p, t),$$

т. е. каждая входная позиция p перехода t имеет маркировку, не меньшую, чем кратность дуги, соединяющей позицию p и переход t. В векторной форме данное *условие срабатывания* перехода t имеет вид $M \geq F(t)$.

В результате срабатывания перехода t маркировка M изменяется на маркировку M', определяемую для всех $p \in P$ как

$$M'(p) = M(p) - F(p, t) + B(t, p).$$

Следует заметить, что маркировка любой позиции сети, не являющейся входной или выходной для перехода t, не изменяется, поскольку для таких позиций значения функций инцидентности для данного перехода равны нулю. Таким образом, срабатывание перехода t изменяет маркировку так, что маркировка каждой его входной позиции p уменьшается на $F(p, t)$, т. е. на кратность дуги, соединяющей p и t, а маркировка каждой его выходной позиции p увеличивается на $B(t, p)$, т. е. на кратность дуги, соединяющей t и p. В векторной форме данное *правило изменения маркировки* в результате срабатывания перехода t имеет вид

$$M' = M - F(t) + B(t).$$

Срабатывание перехода может наступить через любой промежуток времени после того, как он становится разрешенным. Срабатывание перехода считается неделимым действием, т. е. изменение маркировок его входных и выходных позиций осуществляется мгновенно. Поэтому если при некоторой маркировке разрешенными являются несколько переходов, то может сработать любой из них. Одновременно два разрешенных перехода сработать не могут, поскольку два мгновенных действия не могут пересекаться во времени. Выбор срабатывающего перехода осуществляется случайно, что приводит к *недетерминированности* функционирования сети.

Если в результате срабатывания перехода t маркировка M изменяется на маркировку M', то говорят, что маркировка M' *непосредственно достижима* из маркировки M. Таким образом, маркировка M' называется *непосредственно достижимой* из маркировки M, если существует переход $t \in T$, для которого выполняется условие срабатывания при маркировке M. Данное отношение непосредственной достижимости маркировки M' из M обозначим через $M \to M'$. При необходимости можно использовать уточняющее обозначение $M \xrightarrow{t} M'$. Говорят, что маркировка M' *достижима* из маркировки M, если существует последовательность маркировок $M, M_1, \ldots, M'$ и слово $\tau = t_1, t_2, \ldots, t_k$ в алфавите T, такие, что $M \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} \cdots \xrightarrow{t_k} M'$. Слово τ в этом случае называется *последовательностью срабатываний* переходов, ведущих из M к M'. Отношение достижимости будем обозначать через $M \to M'$ или $M \xrightarrow{\tau} M'$, если уточняется последовательность срабатываний.

Множеством всех маркировок, достижимых в сети Петри N из некоторой маркировки M, является множество

$$R(N, M) = \{M' \mid M \to M'\}.$$

Множество $R(N) = R(N, M_0)$, т. е. множество всех маркировок, достижимых в сети N из начальной маркировки M_0, называется *множеством достижимости* сети Петри N. При этом $M \in R(N, M)$ и $M_0 \in R(N)$.

Множеством последовательностей срабатываний сети Петри N (или *свободным языком* сети N) называется множество

$$L(N) = \{\tau \in T^* \mid \exists\, M \in R(N)\colon\ M_0 \xrightarrow{\tau} M\},$$

т. е. множество всех последовательностей срабатываний, ведущих из начальной маркировки M_0 к каждой достижимой в сети N маркировке. Через T^* обозначено множество всех слов в алфавите T, т. е. множество всех подмножеств множества переходов T.

В качестве примера для иллюстрации приведенных определений рассмотрим сеть Петри $N = (P, T, F, B, M_0)$, в которой $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$, функции инцидентности F и B заданы матрицами:

$F =$

	p_1	p_2	p_3
t_1	1	0	0
t_2	0	0	1
t_3	1	2	0
t_4	0	0	1

$B =$

	p_1	p_2	p_3
t_1	1	2	0
t_2	0	2	0
t_3	0	0	1
t_4	1	0	0

Начальная маркировка M_0 определена следующим образом: $M_0(p_1) = 1$, $M_0(p_2) = 0$, $M_0(p_3) = 0$, или в векторной форме: $M_0 = (1, 0, 0)$. Граф этой сети Петри представлен на рис. 2, *а*.

При маркировке M_0 может сработать только переход t_1 с $I(t_1) = \{p_1\}$ и $O(t_1) = \{p_1, p_2\}$, поскольку для него выполняется ус-ловие срабатывания: $M_0(p_1) \geq F(p_1, t_1)$, где $M_0(p_1) = 1$; $F(p_1, t_1) = 1$, или в векторной форме: $M_0 = (1, 0, 0) \geq F(t_1) = (1, 0, 0)$. Для остальных переходов сети условие срабатывания не выполняется, т. к. маркировка $M_0(p_3)$ единственной входной позиции p_3 для переходов t_2 и t_4 равна нулю. Что касается перехода t_3, то хотя входная позиция p_1 и содержит требуемое число маркеров, но другая входная позиция p_2 имеет нулевую маркировку, а условие срабатывания требует, чтобы все входные позиции имели соответствующие маркировки.

В результате срабатывания t_1 удаляется маркер из входной позиции p_1 и помещаются один маркер в выходную позицию p_1, два маркера – в выходную позицию p_2 (рис. 2, *б*), т. е. маркировка M_0 изменяется на новую маркировку

$$M_1 = M_0 - F(t_1) + B(t_1) = (1, 0, 0) - (1, 0, 0) + (1, 2, 0) = (1, 2, 0).$$

Маркировка M_1 является непосредственно достижимой из начальной маркировки M_0, т. е. $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1$.

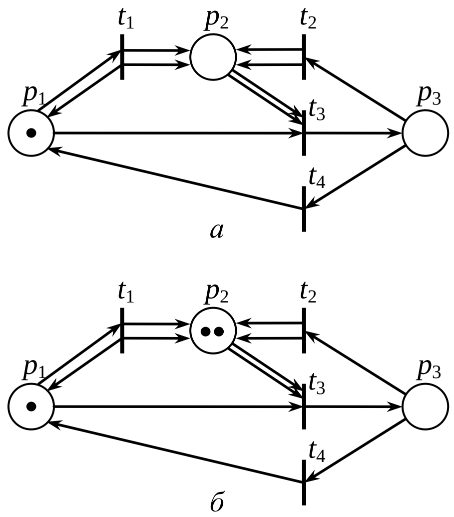


Рис. 2. Изменение маркировки сети в результате срабатывания перехода t_1

При маркировке M_1 разрешенными являются только переходы t_1 и t_3, так как для них выполняются условия срабатывания:

$$M_1 = (1, 2, 0) \geq F(t_1) = (1, 0, 0),$$
$$M_1 = (1, 2, 0) \geq F(t_3) = (1, 2, 0).$$

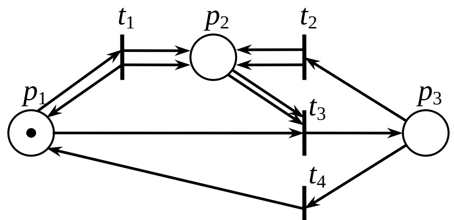
В результате срабатывания перехода t_1 маркировка M_1 изменяется на маркировку $M_2 = (1, 4, 0)$, а при срабатывании t_3 – на маркировку $M_3 = (0, 0, 1)$. Маркировки M_2 и M_3 достижимы из начальной маркировки M_0 ($M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_1} M_2$ и $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_3} M_3$) и непосредственно достижимы из маркировки M_1.

Процесс функционирования сети Петри (последовательность изменений маркировок в результате срабатываний переходов) может осуществляться до тех пор, пока существует хотя бы один переход, для которого выполняется условие срабатывания. При этом состояние сети в некоторый момент времени определяется ее текущей маркировкой. Выполнение сети прекращается, если будет достигнута маркировка, при которой условие срабатывания не выполняется ни для одного перехода сети. Такая маркировка называется *тупиковой*.

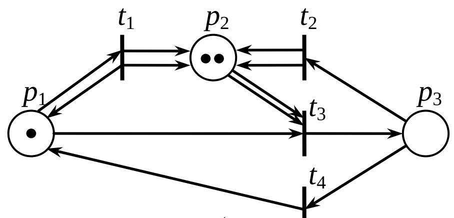
1.3. Граф достижимости сети Петри

Наглядное представление всех возможных вариантов изменений маркировок сети N, происходящих в результате срабатывания ее переходов, дает *граф достижимости* – ориентированный граф, множество вершин которого образовано множеством достижимости $R(N)$. Вершины M и M' связаны направленной дугой, помеченной символом перехода $t \in T$, если $M \xrightarrow{t} M'$. Путь по дугам графа, начинающийся в вершине M и заканчивающийся в вершине M', соответствует последовательности срабатываний τ, ведущей из маркировки M к маркировке M'. Последовательность вершин на этом пути соответствует последовательности изменений маркировок, порожденной τ. Таким образом, граф достижимости полностью описывает возможные варианты функционирования сети Петри.

Граф достижимости рассматриваемой сети Петри, фрагмент которого изображен на рис. 3, бесконечен, поскольку бесконечно множество достижимости $R(N)$ из-за неограниченного роста числа маркеров в позиции p_2 в процессе функционирования сети. Имеются также и тупиковые маркировки, например маркировки (0, 2, 0), (0, 4, 0), (0, 6, 0), т. е. все маркировки, у которых маркировки позиций p_1 и p_3 одновременно равны нулю (при этом позиция p_2 может содержать любое число маркеров). По данному графу легко определяются последовательности срабатываний переходов, ведущих из одной маркировки к другой. Например, маркировка (0, 6, 0) достижима от начальной маркировки M_0, причем приводит к ней последовательность срабатываний $\tau = t_1t_1t_1t_3t_2$. В общем случае к заданной маркировке могут приводить несколько различных последовательностей срабатываний, например, к маркировке (1, 4, 0) из M_0 приводят последовательности срабатываний t_1t_1, $t_1t_1t_1t_3t_4$, $t_1t_3t_4t_1t_1$ и другие.



а



б

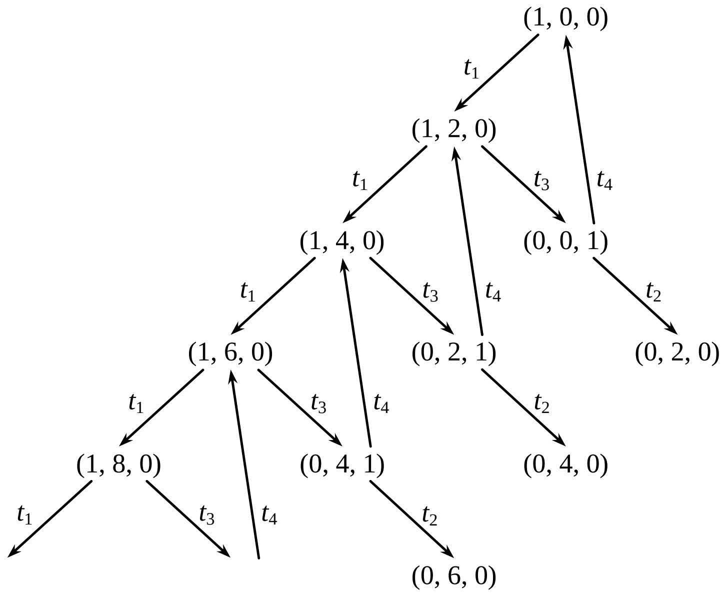


Рис. 3. Фрагмент графа достижимости