ЗАДАНИЕ. *Решить задачи* **№ 2.10 и 2.11** (Методичка «Алгебра высказываний и исчисление высказываний», стр. 43)

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

3.9. Метод резолюций в исчислении высказываний

Метод резолюций является эффективным методом автоматического доказательства выводимости формул. Данный метод лежит в основе логического программирования.

Для обоснования метода рассмотрим необходимые определения и теоремы.

Пусть $D_1 = D_1' \vee A$ и $D_2 = D_2' \vee \overline{A}$ – дизъюнкты (элементарные дизъюнкции).

Дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 по литере A* и обозначается

$$\mathrm{res}_A(D_1, D_2).$$

Резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 называется их резольвента по некоторой литере и обозначается через

$$\mathrm{res}(D_1, D_2).$$

Резольвента контрарных литер равна 0, т.е. $res(A, \overline{A}) = 0$

Здесь нуль будет отождествляться с формулой $A \& \overline{A} = 0$.

! Если дизъюнкты D_1 и D_2 не содержат контрарных литер, то резольвент у них не существует.

П р и м е р 3.6.

Если $D_1 = \overline{A} \vee B \vee C$, $D_2 = A \vee \overline{B} \vee D$, то

$$\mathrm{res}_A(D_1, D_2) = B \vee C \vee \overline{B} \vee D,$$

$$\mathrm{res}_B(D_1, D_2) = \overline{A} \vee C \vee A \vee D,$$

$\mathrm{res}_C(D_1, D_2)$ и $\mathrm{res}_D(D_1, D_2)$ не существуют. □

Теорема 3.12.

Если резольвента $\mathrm{res}(D_1, D_2)$ *существует и не равна нулю, то*

$$D_1, D_2 \vdash \mathrm{res}(D_1, D_2). \ \square$$

Теорема 3.13. *Если резольвента* $\mathrm{res}(D_1, D_2)$ *равна нулю, то множество дизъюнктов D_1 и D_2 противоречиво, т.е.*

$D_1, D_2 \vdash$. □

Пусть $S = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ множество дизъюнктов. Последовательность формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ называется *резолютивным выводом из множества S*, если для каждой формулы φ_i ($i = 1, \dots, n$) выполняется одно из следующих условий:

1) $\varphi_i \in S$;
2) существуют $j, k < i$ такие, что $\varphi_i = \mathrm{res}(\varphi_j, \varphi_k)$.

Теорема 3.14. (теорема о полноте метода резолюций). *Множество дизъюнктов S противоречиво в том и только в том случае, когда существует резолютивный вывод из S, заканчивающийся символом* 0.

Метод резолюции можно использовать для проверки выводимости формулы φ из данного множества формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Действительно, для проверки соотношения

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi,$$

согласно Т. 3.7 [1] достаточно проверить на противоречивость множество формул $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \overline{\varphi}\}$, т.е. проверить выполнение соотношения

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \overline{\varphi} \vdash,$$

что в свою очередь равносильно условию

$$\psi \vdash, \text{ где } \psi = \varphi_1 \,\&\, \varphi_2 \,\&\, \dots \&\, \varphi_n \,\&\, \overline{\varphi}\ .$$

Для получения дизъюнктов приведем формулу ψ к КНФ:

$\psi = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \dots \&\, D_m$,

тогда $\psi \vdash \Leftrightarrow D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \dots \&\, D_m \vdash \Leftrightarrow D_1, D_2, \dots D_m \vdash$.

Таким образом, задача проверки выводимости $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ сводится к проверке противоречивости множества дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$, что равносильно существованию резолютивного вывода 0 из S.

Если резолютивный вывод не заканчивается 0, то заданную формулу φ нельзя вывести из данного множества формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Пример 3.7. Проверить методом резолюций выводимость формулы $A \to (B \to F)$ из набора формул $A \to (B \to C)$, $(C \,\&\, D) \to E$, $\overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E})$, т.е.

$$A \to (B \to C), (C \,\&\, D) \to E, \overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E}) \vdash A \to (B \to F).$$

Согласно методу резолюций, для доказательства выводимости данной формулы из данного набора формул необходимо проверить на противоречивость множество формул:

$$S = \{(A \to (B \to C)),\ ((C \,\&\, D) \to E),\ (\overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E})), \overline{A \to (B \to F)}\}.$$

---

[1] **Теорема 3.7**. *Формула □ выводима из множества формул* Γ, т.е. Γ |□ □ *, тогда и только тогда, когда множество* Γ□{ □} *– противоречиво*.

! Обратите внимание на то, что формула, стоявшая справа от знака выводимости $A \to (B \to F)$, добавляется в это множество с отрицанием: $\overline{A \to (B \to F)}$.

Приведем все формулы из S к КНФ:

$(A \to (B \to C)) = (\overline{A} \vee \overline{B} \vee C);$

$((C \,\&\, D) \to E) = ((\overline{C \,\&\, D}) \vee E) = (\overline{C} \vee \overline{D} \vee E);$

$(\overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E})) = (F \vee (D \,\&\, \overline{E})) = ((F \vee D) \,\&\, (F \vee \overline{E}));$

$\overline{A \to (B \to F)} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B} \vee F} = (A \,\&\, B \,\&\, \overline{F}).$

Отсюда получаем множество дизъюнктов, который необходимо проверить на противоречие[2]:

$$S' = \{\overline{A} \vee \overline{B} \vee C, \overline{C} \vee \overline{D} \vee E, F \vee D, F \vee \overline{E}, A, B, \overline{F}\}.$$

Построим резолютивный вывод из S':

1) $\mathrm{res}_A(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C, A) = \overline{B} \vee C;$
2) $\mathrm{res}_B(\overline{B} \vee C, B) = C;$
3) $\mathrm{res}_D(\overline{C} \vee \overline{D} \vee E, F \vee D) = \overline{C} \vee E \vee F;$
4) $\mathrm{res}_E(\overline{C} \vee E \vee F, F \vee \overline{E}) = \overline{C} \vee F;$
5) $\mathrm{res}_C(\overline{C} \vee F, C) = F;$
6) $\mathrm{res}_F(F, \overline{F}) = 0.$

Таким образом, по теореме о полноте метода резолюции (Т. 3.14) множество S противоречиво, а, значит, формула $A \to (B \to F)$ выводима из набора формул $A \to (B \to C)$, $(C \& D) \to E$, $\overline{F} \to (D \,\&\, \overline{E})$. □

---

[1] **Теорема 3.7**. *Формула* φ *выводима из множества формул* Γ, т.е. $\Gamma \vdash \varphi$, *тогда и только тогда, когда множество* $\Gamma \cup \{\overline{\varphi}\}$ *– противоречиво*. □

[2] Решение задачи № 2.10 начинается отсюда.