

3. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

3.1. Понятие предиката

В рассмотренной ранее алгебре высказываний (АВ) в качестве исходных элементов используются некоторые элементарные высказывания, из которых строятся более сложные высказывания. При этом не анализируются структура и состав высказываний, а учитываются лишь значения истины или лжи, которые они могут принимать. Однако имеется много умозаключений, которые не могут быть рассмотрены таким простым способом. Например, рассмотрим следующее известное умозаключение:

Каждый человек смертен.

Сократ человек,

следовательно, он смертен.

Данное умозаключение интуитивно корректно (истинно).

Однако, введя следующие обозначения:

$A = \{\text{Каждый человек смертен}\};$

$B = \{\text{Сократ является человеком}\};$

$C = \{\text{Сократ смертен}\},$

получим формулу $(A \& B) \rightarrow C$, которая не является истинной в АВ.

Указанное противоречие имеет место потому, что в АВ не рассматривается структура высказываний A , B и C .

В связи с этим возникает необходимость в расширении логики высказываний, в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках АВ рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является логика предикатов (ЛП). Она содержит в себе всю АВ (т.е. элементарные высказывания, рассматриваемые как величины, которые принимают два значения 1 и 0, все операции алгебры высказываний и все ее формулы).

В ЛП уже имеется расчленение высказываний на *субъект* и *предикат*.

Субъект (букв. – подлежащее, хотя оно может играть также роль дополнения) – это то, о чем что-то утверждается в высказывании.

Предикат (букв. – сказуемое, хотя оно может играть также роль определения) – это, что утверждается о субъекте.

Пример 3.1. В высказывании «*Москва является столицей России*»: «*Москва*» – это субъект, «*х является столицей России*» – предикат.

В высказывании «*число 9 делится на число 3*»: «*число 9*» и «*число 3*» – субъекты, «*х делится на у*» – предикат.

Все понятия, которые вводятся в ЛП, относятся всегда к некоторому произвольному множеству Ω , которое называется *предметной областью*, или просто *областью*.

Для примера 3.1 субъект «*Москва*» может быть отнесен, например, к таким множествам, как Ω_1 – множество всех городов мира, Ω_2 – множество всех городов России, Ω_3 – множество всех столиц мира и др., а субъект «*число х*» – Ω_4 – множество натуральных чисел, Ω_5 – множество неотрицательных чисел и др.

Одноместным предикатом $F(x)$ называется произвольная функция переменного предмета x , определенная на множестве Ω и принимающая значения 1 и 0.

Множество всех элементов $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1 («истина»), называется *множеством истинности предиката $P(x)$* :

$$I_P = \{x: x \in \Omega, P(x) = 1\}.$$

Пример 3.2. Пусть предикат $P(x)$ – « x – простое число» определен на множестве натуральных чисел \mathbf{N} , тогда множество I_P для него – множество всех простых чисел.

Пусть предикат $Q(x)$ – « $\sin x = 0$ » определен на множестве действительных чисел \mathbf{R} , тогда его множество истинности

$$I_Q = \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Предикат $F(x)$ – «*Диагонали параллелограмма x перпендикулярны*» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

Приведенные примеры одноместных предикатов выражают свойства предметов.

Двухместным предикатом $P(x, y)$ называется функция двух переменных предметов x и y , определенная на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ и принимающая значения 1 и 0.

Пример 3.3. Приведем примеры двухместных предикатов: $Q(x, y)$ – « $x = y$ » предикат равенства, определенный на множестве $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $F(x, y)$ – «прямая x параллельна прямой y », определенный на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.

Аналогично определяется *n-местный предикат*.

Говорят, что *предикаты* $P(x)$ и $Q(x)$ *равносильны*, если $I_Q = I_P$.

Пример 3.4. Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если $\Omega = \mathbf{R}$ (множество действительных чисел) для одноместных предикатов и $\Omega = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ для двухместных предикатов:

- 1) $x + 5 = 1$;
- 2) при $x = 2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$;
- 3) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
- 4) существует такое число x , что $x^2 - 2x + 1 = 0$;
- 5) $x + 2 < 3x - 4$;
- 6) однозначное число x кратно 3;
- 7) $(x + 2) - (3x - 4)$;
- 8) $x^2 + y^2 > 0$.

Решение.

1) предложение « $x + 5 = 1$ » является *одноместным предикатом* $P(x)$, область истинности которого $I_P = \{-4\}$;

2) предложение не является предикатом; это *ложное высказывание*;

3) предложение является *одноместным предикатом* $P(x)$, $I_P = \{1\}$;

4) предложение не является предикатом; это *истинное высказывание*;

5) предложение является *одноместным предикатом* $P(x)$, $I_P = (3; +\infty)$;

6) предложение является *одноместным предикатом* $P(x)$, $I_P = \{0; 3; 6; 9\}$;

7) предложение не является *ни предикатом, ни высказыванием*;

8) предложение является *двухместным предикатом* $Q(x, y)$, $I_Q = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \setminus \{0, 0\}$.

3.2. Логические операции над предикатами

Пусть на некотором множестве Ω определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \& Q(x))$, который принимает значения 1 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ принимают значение 1, и принимает значение 0 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $(P(x) \& Q(x))$:

$$I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q.$$

Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \vee Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ принимают значение 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $(P(x) \vee Q(x))$:

$$I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q.$$

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\bar{P}(x)$, который принимает значение 1 при всех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 0, и принимает значение 0 при тех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1.

Область истинности предиката:

$$I_{\bar{P}} = CI_P = \Omega \setminus I_P.$$

Импликацией предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \rightarrow Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение 1, а $Q(x) = 0$, и принимает значение 1 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката:

$$I_{P \rightarrow Q} = I_{\bar{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q = (\Omega \setminus I_P) \cup I_Q.$$

Пример 3.5. Пусть даны предикаты: $P(x)$: « x – четное число» и $Q(x)$: « x кратно 3», определенные на множестве \mathbf{N} (натуральных чисел).

Найти области истинности предикатов:

- 1) $P(x) \& Q(x)$;
- 2) $P(x) \vee Q(x)$;
- 3) $\overline{P(x)}$;
- 4) $P(x) \rightarrow Q(x)$.

Решение. Так как $I_P = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, $I_Q = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$, то

- 1) $I_{P \& Q} = I_P \cap I_Q = \{6, 12, \dots, 6n, \dots\}$;
- 2) $I_{P \vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 3, 4, 6, \dots, 2n, 3n, \dots\}$;
- 3) $I_{\overline{P}} = \mathbf{N} \setminus I_P = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\}$;
- 4) $I_{P \rightarrow Q} = (\mathbf{N} \setminus I_P) \cup I_Q = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\} \cup \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$.

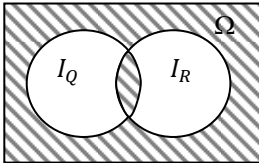
Пример 3.6. Пусть даны предикаты $Q(x, y)$ и $R(x, y)$, определенные на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Найти множество истинности предиката

$$Q(x, y) \sim R(x, y)$$

и изобразить ее с помощью кругов Эйлера – Венна.

Решение. Так как

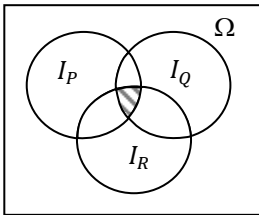
$$Q(x, y) \sim R(x, y) = (Q(x, y) \rightarrow R(x, y)) \& (R(x, y) \rightarrow Q(x, y)),$$



то

$$\begin{aligned} &= I_{Q \rightarrow R} \cap I_{R \rightarrow Q} = (CI_Q \cup I_R) \cap (CI_R \cup I_Q) = \\ &= (I_Q \cap I_R) \cup (CI_R \cap CI_Q). \end{aligned}$$

$I_{Q \sim R}$ изображена заштрихованной частью рисунка.



Пример 3.7. Записать предикат, полученный в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, область истинности которого I заштрихована на рисунке.

Решение. Так как здесь $I = I_P \cap I_Q \cap I_R$, то искомый предикат имеет вид:

$$P(x) \& Q(x) \& R(x).$$

Кванторные операции

1. **Квантор всеобщности.** Пусть $R(x)$ – вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента x некоторой области Ω . Тогда под выражением

$$\forall xR(x)$$

будет подразумеваться *высказывание истинное, когда $R(x)$ истинно для каждого элемента x области Ω и ложно в противном случае.*

Полученное сложное высказывание от x уже не зависит. Соответствующее ему словесное выражение будет одним из следующих: « $R(x)$ истинно для всякого x » или « $R(x)$ ложно для всякого x ».

Символ \forall называется *квантором всеобщности*.

2. *Квантор существования*. Пусть $R(x)$ – вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента x некоторой области Ω . Пусть $R(x)$ – некоторый предикат. Тогда под выражением

$$\exists xR(x),$$

будем понимать высказывание *истинное, если существует хотя бы один элемент x из области Ω , для которого $R(x)$ истинно, и ложное в противном случае.*

Знак \exists называется *квантором существования*.

Запись вида:

$$\forall x \text{ или } \exists x$$

говорит о том, что *переменная x связана* соответствующим *квантором*.

Предметную переменную, не связанную никаким квантором, называют *свободной переменной*.

Пример 3.8. Пусть на множестве \mathbb{N} задан предикат

$$P(x) = \text{«Число } x \text{ кратно } 3\text{»}.$$

Тогда:

$$\forall xP(x) = \text{«Все натуральные числа кратны } 3\text{»};$$

$$\exists xP(x) = \text{«Существуют натуральные числа } x, \text{ которые кратны } 3\text{»}.$$

Очевидно, что $\forall xP(x) = 0$, а $\exists xP(x) = 1$.

Кванторные операции применяются и к *многоместным предикатам*. Пусть на множестве Ω определен *двухместный предикат* $P(x, y)$. Применение кванторной операции к предикату по переменной x ставит в соответствие этому предикату $P(x, y)$ с двумя свободными переменными x и y предикат $\forall xP(x, y)$ (или $\exists xP(x, y)$) с одной свободной переменной y . К полученным пре-

дикатам можно применить кванторные операции по переменной y , которые приведут к высказываниям следующих видов:

$$\forall y \forall x P(x, y), \exists y \forall x P(x, y), \forall y \exists x P(x, y), \exists y \exists x P(x, y).$$

Пример 3.9. Рассмотрим предикат $P(x, y) = \langle y \text{ является делителем } x \rangle$, который определен на множестве натуральных чисел \mathbf{N} . Применение кванторов операций к предикату $P(x, y)$ приведет к восьми возможным высказываниям:

$\forall y \forall x P(x, y)$ – «Любое натуральное число y является делителем любого натурального числа x ».

$\exists y \forall x P(x, y)$ – «Существует натуральное число y , которое является делителем всякого натурального числа x ».

$\forall y \exists x P(x, y)$ – «Любое натуральное число y является делителем некоторого натурального числа x ».

$\exists y \exists x P(x, y)$ – «Существует натуральное число y , которое является делителем некоторого натурального числа x ».

$\forall x \forall y P(x, y)$ – «Любое натуральное число x делится без остатка на любое натуральное число y ».

$\forall x \exists y P(x, y)$ – «Любое натуральное число x делится без остатка на некоторое натуральное число y ».

$\exists x \exists y P(x, y)$ – «Некоторое натуральное число x делится без остатка на некоторое натуральное число y ».

$\exists x \forall y P(x, y)$ – «Некоторое натуральное число x делится без остатка на любое натуральное число y ».

Очевидно, что высказывания 1, 5 и 8 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6 и 7 истинны.

Из рассмотренных примеров видно, что в общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания, а значит, и его логическое значение (например, высказывания 3 и 8).

3.3. Определение формулы логики предикатов

В ЛП будем использовать следующие символы:

1. *Малые латинские буквы конца алфавита*

$$x, y, z, \dots$$

для обозначения *предметных переменных*, т.е. неопределенных элементов предметной области.

2. *Малые латинские буквы начала алфавита*

a, b, c, \dots

для обозначения *предметных постоянных*, или *индивидуальных предметов*.

3. *Заглавные латинские буквы (без указания предметов)*

A, B, C, \dots

для обозначения *простых высказываний* (это высказывания из АВ).

4. *Заглавные латинские буквы (с указанием предметов)*

$F(x), G(x, y), P(x_1, \dots, x_n), \dots$

для обозначения *переменных предикатов*, т.е. функций, аргументы которых принимают значения из области Ω , а сами функции могут принимать только два значения: 1 и 0.

5. *Символы операций:*

$\&$ (конъюнкция), \vee (дизъюнкция), $\bar{}$ (инверсия),

\rightarrow (импликация), \sim (эквивалентность),

\forall (квантор всеобщности), \exists (квантор существования)

для обозначения операций, с помощью которых формируются сложные высказывания.

6. *Скобки* будут использоваться для указания приоритетности операций и области действия квантора.

Определение формулы ЛП представляет собой следующую рекурсию:

1. Каждое переменное высказывание есть формула.

2. Каждый переменный предикат есть формула.

3. Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ЛП, в которую предметная переменная входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ЛП, причем переменная x в них входит связано.

4. Если α и β – формулы ЛП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \& \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ – формулы ЛП.

5. Если α – формула ЛП, то выражение $\bar{\alpha}$ является формулой ЛП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.

6. Никаких формул, кроме построенных по пп. 1-5 нет.

Формулы, определенные в пп. 1 и 2, мы будем называть *элементарными формулами*.

Пример 3.10. Пусть $P(x)$ и $Q(x, y)$ – одноместный и двухместный предикаты, соответственно, а A, B – переменные высказывания, то формулами будут слова:

$$A, P(x), (P(x) \& Q(x)), (\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y)), (\overline{Q(x, y)} \vee B)$$

Не является формулой слово:

$$\forall x Q(x, y) \rightarrow P(x),$$

так как здесь нарушено условие п. 3, так как в формулу $\forall x Q(x, y)$ переменная x входит связанно, а в формулу $P(x)$ переменная x входит свободно.

Из определения формулы логики предикатов ясно, что всякая формула AB является формулой ЛП.

3.4. Логические значения формул Интерпретация формул

Формулы ЛП, которые содержат свободные предметные переменные, называются *открытыми*, остальные формулы (т.е., не содержащие свободных предметных переменных) – *замкнутыми*.

Например, следующие формулы являются открытыми:

$$\begin{aligned} & \exists x (P(x, y, z) \sim Q(x, y)), \\ & \forall y \exists x (P_1(x, y, z) \vee (P_2(x) \rightarrow P_3(x))). \end{aligned}$$

В первой формуле не связаны предметные переменные y и z , а во второй – z .

Формулы

$$\begin{aligned} & \forall x \exists y \forall z (P_1(x, y, z) \vee P_2(x, z)), \\ & \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow (A \rightarrow G(y))) \end{aligned}$$

являются замкнутыми.

Логическое значение формулы ЛП зависит от предметной области Ω , на котором определены входящие в формулу предикаты. Кроме этого, для определения значения формулы ЛП необходимо знание:

- 1) значений, входящих в формулу переменных высказываний;
- 2) значений свободных предметных переменных из множества Ω ;
- 3) значений предикатных переменных.

Преобразование формулы ЛП в высказывание (а также само получаемое высказывание) называется *интерпретацией* этой формулы на множестве Ω .

Если *формула ЛП замкнутая*, то ее интерпретация сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов, в результате чего формула превращается в конкретное высказывание (нульместный предикат).

Если *формула ЛП открытая*, то ее интерпретация состоит из двух этапов:

1) вместо всех предикатных переменных необходимо подставить конкретные предикаты, в результате чего формула превратится в конкретный предикат, зависящий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле;

2) каждой предметной переменной необходимо придать значение, от которого зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат (и, значит, вся исходная формула) превратится в конкретное высказывание (истинное или ложное).

Пример 3.11. Дать интерпретации формуле $\forall x \exists y P(x, y)$.

Данная формула замкнутая, то есть не имеет свободных переменных. Поэтому для построения интерпретации данной формулы нам достаточно задать множество предметов x и y , а также определить предикат $P(x, y)$.

В качестве множества Ω возьмем множество всех мужчин, а вместо предикатной переменной $P(x, y)$ подставим конкретный предикат, определенный на Ω , « x есть отец y ».

В данной интерпретации формула превратится в высказывание: «у каждого мужчины есть сын». Очевидно, что в данной интерпретации рассмотренная формула логики предикатов принимает значение 0.

Этой же формуле дадим другую интерпретацию. В качестве множества Ω возьмем множество натуральных чисел \mathbf{N} , а вместо предикатной переменной $P(x, y)$ подставим предикат « $x < y$ », определенный на \mathbf{N}^2 . Тогда получим истинное высказывание – «Для любого натурального числа x существует большее по сравнению с ним натуральное число y ».

Пример 3.12. Дать интерпретацию формуле α :

$$\exists z(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z)) \rightarrow R.$$

Данная формула содержит свободные переменные x и y .

В качестве множества Ω возьмем множество натуральных чисел \mathbb{N} . Вместо предикатных переменных $P(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ подставим трехместные предикаты « $x \cdot y = z$ » и « $x + y = z$ », соответственно, а вместо высказывания R подставим ложное высказывание « $2 = 4$ ».

Посмотрим, в какие высказывания может превращаться данный предикат при подстановке вместо его переменных x и y конкретных натуральных чисел. Очевидно, что формула $\exists z(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$, представляющая собой часть формулы α , является истинным высказыванием при любой подстановке вместо его предметных переменных x и y натуральных чисел (всегда можно найти такое натуральное число k , что $m \cdot n \neq k$ и $m + n \neq k$, при котором высказывания $m \cdot n = k$ и $m + n = k$ будут ложными, а высказывание $(m \cdot n = k) \rightarrow (m + n = k)$ – истинным). Тогда истинным будет также высказывание $\exists z(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$. А высказывание, в которое превращается формула α , будет ложным, так как посылка формулы истинна, а ее заключение ложно.

Очевидно, что если в данной интерпретации в качестве высказывания R взять истинное высказывание, то формула превратится в истинное высказывание.

3.5. Равносильные формулы

Знание равносильных формул очень удобно при решении практических задач и доказательства теорем, так как позволяет заменить формулу равносильной ей, которая имеет более простую структуру.

Две формулы α и β , отнесенные к некоторой предметной области Ω , которые при всех заменах переменных предикатов, переменных высказываний и свободных предметных переменных соответственно индивидуальными предикатами, определенными на Ω , индивидуальными высказываниями и индивидуальными предметами из Ω принимают одинаковые значения 1 или 0, называются *равносильными на области Ω* .

Пример 3.13. На области Ω , содержащей только один предмет, равносильными будут формулы: $F(x), \forall xF(x), \exists xF(x)$.

Две формулы α и β , равносильные на любых предметных областях Ω , называются *просто равносильными*. Как и в АВ, такие (просто равносильные) формулы могут быть заменены одна другой.

Так как ЛП является расширением АВ, все законы равносильности АВ (см. формулы (1.1)–(1.16*)) верны и в этой системе, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы ЛП. Основные равносильности АВ приведены в таблице.

Основные равносильности алгебры высказываний

$A = A$	(1.1)	закон тождества
$A \& \bar{A} = 0$	(1.2)	закон непротиворечия
$A \vee \bar{A} = 1$	(1.3)	закон исключенного третьего
$A = \bar{\bar{A}}$	(1.4)	закон двойного отрицания
$A \vee A = A$ $A \& A = A$	(1.5) (1.5*)	законы идемпотентности
$A \vee B = B \vee A$ $A \& B = B \& A$	(1.6) (1.6*)	законы коммутативности
$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \& (B \& C) = (A \& B) \& C$	(1.7) (1.7*)	законы ассоциативности
$A \& (B \vee C) = (A \& B) \vee (A \& C)$ $A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C)$	(1.8) (1.8*)	законы дистрибутивности
$A \vee (A \& B) = A$ $A \& (A \vee B) = A$	(1.9) (1.9*)	законы поглощения
$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$ $\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$	(1.10) (1.10*)	законы де Моргана
$\bar{0} = 1$ $\bar{1} = 0$	(1.11) (1.11*)	отрицание лжи отрицание истины
$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$	(1.12) (1.12*)	прибавление 0 прибавление 1
$A \& 0 = 0$ $A \& 1 = A$	(1.13) (1.13*)	умножение на 0 умножение на 1
$A \rightarrow B = (\bar{A} \vee B)$ $A \sim B = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$	(1.14) (1.14*)	исключение импликации
$A \vee (\bar{A} \& B) = A \vee B$ $A \& (\bar{A} \vee B) = A \& B$	(1.15) (1.15*)	
$\bar{A} \vee (A \& B) = \bar{A} \vee B$ $\bar{A} \& (A \vee B) = \bar{A} \& B$	(1.16) (1.16*)	

В ЛП имеют место равносильности:

$$\overline{\forall x\alpha(x)} = \exists y\overline{\alpha(y)}; \quad (3.1)$$

$$\overline{\exists x\alpha(x)} = \forall y\overline{\alpha(y)}. \quad (3.2)$$

Таким образом, имеет место следующее правило: *знак отрицания можно ввести под знак квантора, заменив квантор на двойственный.*

Пример 3.14. Преобразовать формулу

$$\overline{\exists x(A(x) \rightarrow \forall yB(y))}.$$

$$\begin{aligned} \overline{\exists x(A(x) \rightarrow \forall yB(y))} &\stackrel{(1.14)}{=} \overline{\exists x(A(x) \vee \forall y\overline{B(y)})} \stackrel{(3.2)}{=} \\ &= \forall x(\overline{A(x) \vee \forall y\overline{B(y)}}) \stackrel{(1.10)}{=} \forall x(\overline{A(x)} \& \forall y\overline{B(y)}) \stackrel{(1.4),(3.1)}{=} \\ &= \forall x\overline{A(x)} \& \exists y\overline{B(y)}. \end{aligned}$$

В ЛП также имеют место следующие равносильности:

$$(\forall x\alpha(x) \vee \beta) = (\forall x(\alpha(x) \vee \beta)); \quad (3.3)$$

$$(\forall x\alpha(x) \& \beta) = (\forall x(\alpha(x) \& \beta)); \quad (3.4)$$

$$(\exists x\alpha(x) \& \beta) = (\exists x(\alpha(x) \& \beta)); \quad (3.5)$$

$$(\exists x\alpha(x) \vee \beta) = (\exists x(\alpha(x) \vee \beta)), \quad (3.6)$$

где формула β не содержит свободной переменной x , а в формуле α , переменная x связана соответствующим квантором;

$$\forall x\alpha(x) \& \forall x\beta(x) = \forall x(\alpha(x) \& \beta(x)); \quad (3.7)$$

$$\exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) = \exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x), \quad (3.8)$$

где в формулах α и β , переменная x связана соответствующим квантором.

В заключение отметим, что в ЛП *не равносильны* следующие формулы:

$$\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x) \neq \forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$$

$$\exists x\alpha(x) \& \exists x\beta(x) \neq \exists x(\alpha(x) \& \beta(x))$$

Однако имеют место следующие равносильности:

$$\begin{aligned} (\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x)) &= (\forall x\alpha(x) \vee \forall y\beta(y)) \stackrel{(3.3)}{=} \\ &= (\forall x(\alpha(x) \vee \forall y\beta(y))) \stackrel{(3.3)}{=} \forall x\forall y(\alpha(x) \vee \beta(y)); \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
(\exists x\alpha(x) \& \exists x\beta(x)) &= (\exists x\alpha(x) \& \exists y\beta(y)) \stackrel{(3.5)}{=} \\
&= (\exists x(\alpha(x) \& \forall y\beta(y))) \stackrel{(3.5)}{=} \exists x\exists y(\alpha(x) \& \beta(y)).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Пример 3.15. С помощью равносильных преобразований, привести формулу

$$\forall x\exists yP(x, y) \vee \exists x\forall y\overline{Q(x, y)}$$

к виду, в котором все операции связывания кванторами находятся вне скобок.

$$\begin{aligned}
\forall x\exists yP(x, y) \vee \exists x\forall y\overline{Q(x, y)} &\stackrel{(3.1),(3.2)}{=} \forall x\exists yP(x, y) \vee \forall x\exists y\overline{Q(x, y)} \stackrel{(3.9)}{=} \\
&= \forall x\forall z(\exists yP(x, y) \vee \exists y\overline{Q(z, y)}) \stackrel{(3.8)}{=} \forall x\forall z\exists y(P(x, y) \vee \overline{Q(z, y)}).
\end{aligned}$$

3.6. Предваренная нормальная форма

Формулы, в которых из операций АВ имеются только конъюнкция (&), дизъюнкция (\vee) и инверсия ($\overline{\quad}$), а знак отрицания относится только к предикатам и элементарным высказываниям, будем называть *приведенными формулами*.

Очевидно, что для каждой формулы существует равносильная ей приведенная формула.

Приведенная формула, равносильная формуле α , называется *приведенной формой* формулы α .

Пример 3.16. В рассмотренных выше примерах 3.14 и 3.15 следующие формы формул являются приведенными:

$$\begin{aligned}
&\forall xA(x)\&\exists y\overline{B(y)}, \forall x\exists yP(x, y) \vee \forall x\exists y\overline{Q(x, y)}, \\
&\forall x\forall z(\exists yP(x, y) \vee \exists y\overline{Q(x, y)}), \forall x\forall z\exists y(P(x, y) \vee \overline{Q(x, y)}).
\end{aligned}$$

Действительно, в этих формулах из операций АВ используются только &, \vee и $\overline{\quad}$, причем под знаком отрицания предикаты.

Для облегчения анализа сложных суждений формулы ЛП рекомендуется приводить к нормальной форме. Если в АВ приняты две нормальные формы (ДНФ – дизъюнктивная и КНФ – конъюнктивная), то в ЛП – одна *предваренная нормальная форма* (ПНФ), суть которой сводится к разделению формулы на две части: кванторную и безкванторную.

Приведенная форма формулы α называется *предваренной нормальной формой (ПНФ)* формулы α , если она не содержит кванторов или если при образовании ее из элементарных формул операции связывания квантором следуют за всеми операциями алгебры высказываний. В примере 3.15 формула была приведена к ПНФ.

В записи ПНФ кванторы, если они есть, предшествуют всем остальным символам. Например, приведенная формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

нормальна, если формула $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не содержит кванторов.

Верно следующее утверждение: *Для каждой формулы существует равносильная ей ПНФ.*

Пример 3.17. Преобразовать к ПНФ формулу

$$\begin{aligned} & \overline{\exists x(A(x) \rightarrow \forall yB(y))} \\ & \overline{\exists x(A(x) \rightarrow \forall yB(y))} \stackrel{(3,2)}{=} \forall x(\overline{A(x) \rightarrow \forall yB(y)}) \stackrel{(1,14)}{=} \\ & = \forall x(\overline{A(x) \vee \forall yB(y)}) \stackrel{(1,4),(1,10)}{=} \forall x(A(x) \& \overline{\forall yB(y)}) \stackrel{(3,1)}{=} \\ & = \forall x(A(x) \& \exists y\overline{B(y)}) \stackrel{(3,5)}{=} \forall x \exists y(A(x) \& \overline{B(y)}). \end{aligned}$$

3.7. Выполнимость и общезначимость формул

Формула логики предикатов называется *выполнимой*, если она истинна для некоторой области Ω и некоторых предикатов, на ней определенных.

Формула логики предикатов называется *тождественно истинной для области* Ω , если она истинна для данной области Ω и для всех предикатов, определенных на Ω .

Формула логики предикатов называется *общезначимой* (или *тождественно истинной*, или просто *истинной*), если она истинна для всякой области Ω и для всяких предикатов.

Формула называется *ложной*, или *невыполнимой*, если ни для какой области ни при каких заменах предикатов не является истинной.

Пример 3.18. Доказать, что формула $\exists xP(x)$ выполнима.

Для доказательства выполнимости формулы достаточно найти такую ее интерпретацию (т.е. задать область Ω и некоторый предикат, на ней определенный), которая принимает значение 1.

В качестве области Ω рассмотрим множество натуральных чисел \mathbf{N} , а предикат $P(x) = \langle x - \text{четное число} \rangle$. Интерпретация данной формулы принимает значение 1. Следовательно, формула $\exists xP(x)$ является выполнимой.

Пример 3.19. Доказать, что формула $\forall x\exists yP(x, y)$ выполнима, но не общезначима.

Пусть $\Omega = \mathbf{N}$ (множество натуральных чисел). Определим предикат так:

$$P(x, y) = \langle x < y \rangle.$$

Тогда данная интерпретация формулы $\forall x\exists yP(x, y)$ будет тождественно истинная (действительно, для любого натурального числа существует большее него натуральное число), и, следовательно, сама формула – выполнима в этой области.

При этом, если рассматривать предикат $P(x, y) = \langle x < y \rangle$ в конечной области, например $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, то формула превратится в тождественно ложную формулу. А этот факт можно рассматривать как контрпример при доказательстве того, что данная формула не общезначима.

Пример 3.20. Доказать, что формула $\exists x\exists y(P(x) \& \overline{P(y)})$ выполнима, но не общезначима.

Пусть $\Omega = \mathbf{N}$, а $P(x) = \langle x - \text{четное число} \rangle$. Так как, действительно, на множестве натуральных чисел существуют такие пары чисел, из которых одно четное (что даст нам истинность $P(x)$), а другое – нечетное (что даст нам истинность $\overline{P(y)}$), следовательно, на множестве натуральных чисел формула $\exists x\exists y(P(x) \& \overline{P(y)})$ выполнима.

Однако, если предикат $P(x) = \langle x - \text{четное число} \rangle$ рассматривать на множестве Ω , совпадающим с множеством нечетных натуральных чисел, то интерпретация формулы принимает значение ложь. Следовательно, формула $\exists x\exists y(P(x) \& \overline{P(y)})$ не является общезначимой.

Пример 3.21. Доказать (общезначимость) тождественную истинность формулы $\forall x(P(x) \vee \overline{P(x)})$.

Данная формула будет тождественно истинной в любой области, так как по законам алгебры высказываний $P(x) \vee \overline{P(x)} = 1$. Значит она является общезначимой.

Пример 3.22. Доказать невыполнимость формулы

$$\forall x(P(x) \& \overline{P(x)}).$$

Данная формула будет тождественно ложна в любой области, так как по законам алгебры высказываний $P(x) \& \overline{P(x)} = 0$. Значит, она является невыполнимой.

Пример 3.23. Доказать общезначимость формулы

$$\overline{\exists x P(x)} \rightarrow \forall x \overline{P(x)}$$

Доказывать будем *от противного*. Предположим, что в некоторой области Ω и для некоторых определенных на ней предикатов формула ложна:

$$\overline{\exists x P(x)} \rightarrow \forall x \overline{P(x)} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overline{\exists x P(x)} = 1; \\ \forall x \overline{P(x)} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists x P(x) = 0; \\ \forall x P(x) = 1. \end{cases}$$

Одновременное выполнение последних этих двух условий невозможно, следовательно, получили противоречие, а формула $\overline{\exists x P(x)} \rightarrow \forall x \overline{P(x)}$ тождественно истинна, или общезначима.

Пример 3.24. Доказать общезначимость формулы

$$\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow (\overline{\exists x P(x)} \& \forall x Q(x)).$$

$$\begin{aligned} & \forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)}) \rightarrow (\overline{\exists x P(x)} \& \forall x Q(x)) \stackrel{(1.14)}{=} \\ & = \overline{\forall x(P(x) \rightarrow \overline{Q(x)})} \vee (\overline{\exists x P(x)} \& \forall x Q(x)) \stackrel{(1.14)}{=} \\ & = \overline{\forall x(P(x) \vee \overline{Q(x)})} \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \forall x Q(x) \stackrel{(3.1)}{=} \\ & = \exists x(\overline{P(x) \vee \overline{Q(x)}}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \stackrel{(1.10)}{=} \\ & = \exists x(\overline{P(x)} \& \overline{\overline{Q(x)}}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \stackrel{(1.4),(1.6)}{=} \\ & = \exists x(P(x) \& Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \stackrel{(3.8)}{=} \\ & = \exists x((P(x) \& Q(x)) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \stackrel{(1.16)}{=} \\ & = \exists x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \stackrel{(3.8),(1.6)}{=} \\ & = \exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \stackrel{(1.3)}{=} \\ & = 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} = 1. \end{aligned}$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:

3.1. Среди следующих предложений выделите предикаты, для каждого из предикатов укажите одну из возможных предметных областей и в соответствии с ней область истинности:

- 1) Луна есть спутник Венеры;
- 2) планеты x и y принадлежат Солнечной системе;
- 3) $5 + \sqrt[5]{70} - \sqrt[6]{25} > 250$;
- 4) $x^2 + 3x + 2 = 0$;
- 5) $x^4 - 3x + 8$;
- 6) любое простое число p не имеет делителей, отличных от себя и 1;
- 7) натуральное число n не меньше 1;
- 8) треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$;
- 9) $x^2 + 2x + 1 > 0$;
- 10) $1 + \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\cos^2 x}$;
- 11) $\ln x < \sin x$.

3.2. Даны предикаты

$$P(x) = \langle\langle x^2 - 4 = 0 \rangle\rangle \text{ и } Q(x) = \langle\langle 3x - 2 < 17 \rangle\rangle.$$

Найдите области истинности этих предикатов, если их предметные области есть:

- 1) \mathbf{R} (множество действительных чисел);
- 2) \mathbf{N} (множество натуральных чисел).

3.3. На множестве $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ заданы два предиката

$$P(x) = \langle\langle x - \text{простое число} \rangle\rangle, Q(x) = \langle\langle x - \text{нечетное число} \rangle\rangle.$$

Равносильны ли предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множествах

$$L = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}?$$

3.4. На множестве $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$ заданы предикаты:

$$P(x) = \langle\langle x \text{ не делится на } 5 \rangle\rangle;$$

$$Q(x) = \langle\langle x - \text{четное число} \rangle\rangle;$$

$$R(x) = \langle\langle x - \text{простое число} \rangle\rangle;$$

$$F(x) = \langle\langle x \text{ кратно } 3 \rangle\rangle.$$

Найдите множества истинности следующих предикатов:

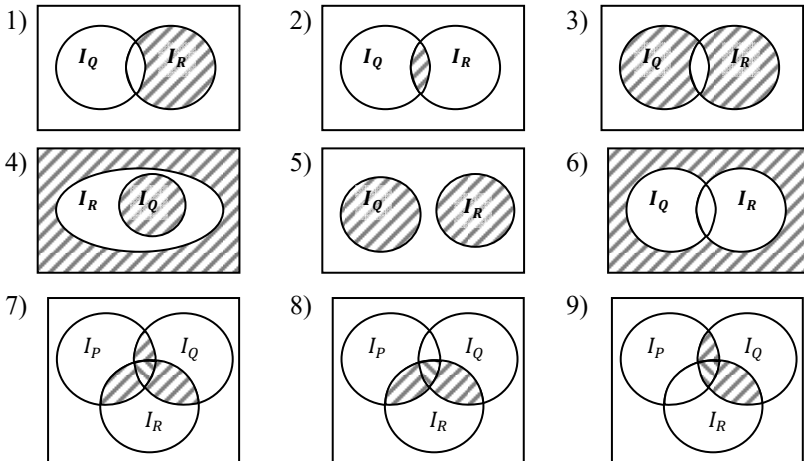
- 1) $P(x) \& Q(x)$;
- 2) $R(x) \& Q(x)$;
- 3) $R(x) \& F(x)$;
- 4) $Q(x) \& F(x)$;

- | | |
|---|--|
| 5) $\overline{Q(x)} \& F(x)$; | 13) $\overline{Q(x)} \vee F(x)$; |
| 6) $P(x) \& \overline{F(x)}$; | 14) $Q(x) \vee \overline{F(x)}$; |
| 7) $\overline{Q(x)} \& \overline{F(x)}$; | 15) $P(x) \vee Q(x) \vee F(x)$; |
| 8) $P(x) \& Q(x) \& F(x)$; | 16) $R(x) \rightarrow P(x)$; |
| 9) $P(x) \vee Q(x)$; | 17) $F(x) \rightarrow \overline{R(x)}$; |
| 10) $Q(x) \vee R(x)$; | 18) $P(x) \rightarrow Q(x)$; |
| 11) $R(x) \vee F(x)$; | 19) $(P(x) \& R(x)) \rightarrow \overline{F(x)}$; |
| 12) $Q(x) \vee F(x)$; | 20) $(P(x) \& F(x)) \rightarrow \overline{R(x)}$. |

3.5. Изобразите на диаграммах Эйлера – Венна области истинности для следующих предикатов:

- 1) $\overline{P(x)} \& \overline{Q(x)}$;
- 2) $\overline{P(x)} \sim \overline{Q(x)}$;
- 3) $(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (R(x) \& \overline{Q(x)})$;
- 4) $P(x) \rightarrow (Q(x) \vee \overline{Q(x)})$;
- 5) $(P(x) \& Q(x)) \rightarrow \overline{R(x)}$.

3.6. Записать предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, области истинности которых (I) заштрихованы на следующих рисунках:



3.7. Укажите, какие из следующих выражений являются формулами ЛП. В каждой формуле выделите свободные и связанные переменные:

- 1) $\exists x \exists y P(x, y)$;
- 2) $\exists x, y P(x, y)$;
- 3) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x, y)$;
- 4) $\forall x \exists y P(x, y)$;
- 5) $A \rightarrow \forall x P(x, y)$;
- 6) $\exists x P(x, y) \& Q(y, z)$.

3.8. Даны утверждения

$P(x)$ = «число x делится на 3»,

$Q(x)$ = «число x делится на 2»,

$R(x)$ = «число x делится на 4»,

$F(x)$ = «число x делится на 6»,

$G(x)$ = «число x делится на 12».

Укажите, какие из следующих утверждений истинны, какие ложны:

- 1) $\forall x ((P(x) \& Q(x)) \rightarrow G(x))$;
- 2) $\forall x ((Q(x) \& F(x)) \rightarrow G(x))$;
- 3) $\forall x ((R(x) \& F(x)) \rightarrow G(x))$;
- 4) $\forall x (G(x) \rightarrow (R(x) \& F(x)))$;
- 5) $\forall x (\overline{G(x)} \rightarrow Q(x) \rightarrow F(x))$;
- 6) $\exists x ((Q(x) \& R(x)) \rightarrow \overline{F(x)})$;
- 7) $\forall x (\overline{P(x)} \rightarrow \overline{G(x)})$.

3.9. Пусть предикат $P(x, y) = \langle\langle x < y \rangle\rangle$ определен на множестве натуральных чисел \mathbb{N} .

1) Какие из следующих предикатов тождественно истинные и какие тождественно ложные:

а) $\exists x P(x, y)$; б) $\forall x P(x, y)$; в) $\exists y P(x, y)$; г) $\forall y P(x, y)$?

2) Для тех предикатов из 1), которые не являются ни тождественно истинными, ни тождественно ложными, указать область истинности и область ложности.

3) Какие из следующих предложений истинны, а какие ложны:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| а) $\exists x \forall y P(x, y)$; | д) $\forall y \forall x P(x, y)$; |
| б) $\forall x \exists y P(x, y)$; | е) $\exists y \forall x P(x, y)$; |
| в) $\forall y \exists x P(x, y)$; | ж) $\exists x \exists y P(x, y)$; |
| г) $\forall x \forall y P(x, y)$; | з) $\exists y \exists x P(x, y)$? |

3.10. Пусть задана алгебраическая система $\Omega = \langle \mathbf{Z}^+, S^3, P^3 \rangle$, где \mathbf{Z}^+ – множество целых неотрицательных чисел, а S^3 и P^3 – трехместные предикаты

$$S(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z, \quad P(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

Записать формулу с одной свободной переменной x , истинную в данной модели тогда и только тогда, когда:

- а) $x = 0$;
- б) $x = 1$;
- в) $x = 2$;
- г) x четно;
- д) x нечетно;
- е) x – простое число.

3.11. Записать формулу с двумя свободными переменными x и y , истинную в Ω из задачи 3.10 тогда и только тогда, когда:

- а) $x = y$;
- б) $x \leq y$;
- в) $x < y$;
- г) x делит y .

3.12. Записать формулу с тремя свободными переменными x , y и z , истинную в Ω из задачи 3.10 тогда и только тогда, когда:

- а) z – наименьшее общее кратное x и y ;
- б) z – наибольший общий делитель x и y .

3.13. Записать предложение, выражающее в модели Ω из задачи 3.10:

- а) коммутативность сложения;
- б) ассоциативность сложения;
- в) коммутативность умножения;
- г) ассоциативность умножения;

- д) дистрибутивность сложения относительно умножения;
- е) бесконечность множества простых чисел;
- ж) существование НОК и НОД для чисел, отличных от нуля.

3.14. Записать предложение, выражающее в модели Ω из задачи 3.10:

- а) несуществование единицы;
- б) конечность множества простых чисел;
- в) то, что для всякого числа существует строго меньшее число;
- г) существование наибольшего натурального числа.

Истинны ли эти предложения в модели Ω ?

3.15. Пусть предметное множество Ω совпадает с множеством людей. На данном множестве заданы следующие предикаты и условия их истинности:

$$E(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ и } y - \text{один и тот же человек} \rangle;$$

$$P(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ родитель } y \rangle;$$

$$C(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ и } y - \text{супруги} \rangle;$$

$$M(x) = 1 \Leftrightarrow \langle x - \text{мужчина} \rangle;$$

$$W(x) = 1 \Leftrightarrow \langle x - \text{женщина} \rangle.$$

В данной модели записать формулы, выражающие следующие утверждения:

- 1) у человека каждого есть отец и мать;
- 2) у человека каждого есть бабушка;
- 3) у человека каждого есть дедушка;
- 4) x – прабабушка;
- 5) x – прадедушка;
- 6) x – деверь;
- 7) x – шурин;
- 8) x – кузен;
- 9) x – кузина;
- 10) x – золовка;
- 11) x – тесть;
- 12) x – теща;
- 13) x – свекровь;
- 14) x – свекор;
- 15) x – зять;

- 16) x – сноха;
- 17) x – правнук;
- 18) x – правнучка;
- 19) x – невестка;
- 20) x – дядя;
- 21) x – тетя;
- 22) x – племянник;
- 23) x – племянница;
- 24) x – внучатый племянник;
- 25) x – внучатая племянница;
- 26) x – двоюродный дядя;
- 27) x – двоюродная племянница;
- 28) x – двоюродная тетя;
- 29) x – двоюродный племянник;
- 30) у некоторых людей есть братья;
- 31) у некоторых людей есть сестры;
- 32) некоторые супруги бездетны;
- 33) некоторые супруги имеют детей;
- 34) некоторые супруги имеют детей только женского пола;
- 35) некоторые супруги имеют детей только мужского пола;
- 36) x внебрачный сын y ;
- 37) x внебрачная дочь y ;
- 38) x – незаконнорожденный;

3.16. Записать формулы, выражающие утверждения, перечисленные в № 3.15, в следующей модели: пусть предметное множество Ω совпадает с множеством людей, на котором заданы следующие предикаты и условия их истинности:

$$E(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ и } y \text{ – один и тот же человек} \rangle;$$

$$S(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ сын } y \rangle;$$

$$D(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ дочь } y \rangle;$$

$$H(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ муж } y \rangle.$$

3.17. Записать формулы, выражающие утверждения, перечисленные в № 3.15, в следующей модели: пусть предметное множество Ω совпадает с множеством людей, на котором заданы следующие предикаты и условия их истинности:

$$E(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ и } y \text{ – один и тот же человек} \rangle;$$

$$D(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ потомок } y \rangle;$$

$$H(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ муж } y \rangle;$$

$$M(x) = 1 \Leftrightarrow \langle x - \text{мужчина} \rangle;$$

$$W(x) = 1 \Leftrightarrow \langle x - \text{женщина} \rangle.$$

3.18. Записать формулы, выражающие утверждения, перечисленные в № 3.15, в следующей модели: пусть предметное множество Ω совпадает с множеством людей, на котором заданы следующие предикаты и условия их истинности:

$$E(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ и } y - \text{один и тот же человек} \rangle;$$

$$F(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ предок } y \rangle;$$

$$W(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ жена } y \rangle;$$

$$M(x) = 1 \Leftrightarrow \langle x - \text{мужчина} \rangle;$$

$$W(x) = 1 \Leftrightarrow \langle x - \text{женщина} \rangle.$$

3.19. Записать формулы, выражающие утверждения, перечисленные в № 3.15, в следующей модели: пусть предметное множество Ω совпадает с множеством людей, на котором заданы следующие предикаты и условия их истинности:

$$E(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ и } y - \text{один и тот же человек} \rangle;$$

$$R(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ ребенок } y \rangle;$$

$$C(x, y) = 1 \Leftrightarrow \langle x \text{ и } y - \text{супруги} \rangle;$$

$$M(x) = 1 \Leftrightarrow \langle x - \text{мужчина} \rangle;$$

$$W(x) = 1 \Leftrightarrow \langle x - \text{женщина} \rangle.$$

3.20. Найти отрицания следующих формул и привести их к виду ПНФ:

- 1) $\exists x(P(x) \& Q(x) \& R(x))$;
- 2) $\forall x(P(x) \rightarrow \forall yQ(y))$;
- 3) $\forall x(P(x) \vee \exists yQ(y))$;
- 4) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \& \exists x(Q(x) \& \overline{R(x)})$;
- 5) $\exists x(P(x) \sim Q(x))$;
- 6) $\forall x \exists y \forall z(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$.

3.21. Выполнимы ли следующие формулы:

- 1) $\exists xP(x)$;
- 2) $\forall xP(x)$;

- 3) $\exists x \forall y (Q(x, x) \& \overline{Q(x, y)});$
- 4) $\exists x \exists y (P(x) \& \overline{P(y)});$
- 5) $\exists x \forall y (Q(x, y) \& \forall z R(x, y, z));$
- 6) $P(x) \rightarrow \forall y P(y);$
- 7) $\exists x P(x) \rightarrow P(y);$
- 8) $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow \overline{P(y)});$
- 9) $\forall x \exists y (\overline{P(x)} \rightarrow P(y));$
- 10) $\exists y \forall x (P(x) \rightarrow \overline{P(y)});$
- 11) $\exists y \forall x (\overline{P(x)} \rightarrow P(y))?$

3.22. Являются ли тождественно истинными следующие формулы:

- а) $\overline{(\exists x P(x)) \rightarrow (\forall x P(x))};$
- б) $\overline{(\exists x P(x)) \rightarrow (\forall x P(x))};$
- в) $\exists x \forall y (Q(x, y) \rightarrow \forall y \exists x (Q(x, y)));$
- г) $\forall y \exists x (Q(x, y) \rightarrow \exists x \forall y (Q(x, y)))?$

3.23. Доказать тождественную истинность следующих формул:

- а) $\overline{(\exists x \alpha(x)) \rightarrow \overline{\forall x \alpha(x)}};$
- б) $(\exists x (\alpha(x) \& (\beta \rightarrow \gamma(x))) \rightarrow (\forall x (\alpha(x) \rightarrow \overline{\gamma(x)})) \rightarrow \overline{\beta}),$ где x не свободна в β ;
- в) $(\forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow \overline{(\exists x \alpha(x) \& \forall x \beta(x))});$
- г) $(\forall x (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (\exists x \alpha(x) \& \forall x \beta(x))).$