3. ЛОГИКА ПРЕДИКАТОВ

3.1. Понятие предиката

В рассмотренной ранее алгебре высказываний (АВ) в качестве исходных элементов используются некоторые элементарные высказывания, из которых строятся более сложные высказывания. При этом не анализируются структура и состав высказываний, а учитываются лишь значения истины или лжи, которые они могут принимать. Однако имеется много умозаключений, которые не могут быть рассмотрены таким простым способом. Например, рассмотрим следующее известное умозаключение:

Каждый человек смертен.
Сократ человек,
следовательно, он смертен.

Данное умозаключение интуитивно корректно (истинно). Однако, введя следующие обозначения:

A = {Каждый человек смертен};
B = {Сократ является человеком};
C = {Сократ смертен},

получим формулу $(A \& B) \to C$, которая не является истинной в АВ.

Указанное противоречие имеет место потому, что в АВ не рассматривается структура высказываний A, B и C.

В связи с этим возникает необходимость в расширении логики высказываний, в построении такой логической системы, средствами которой можно было бы исследовать и структуру тех высказываний, которые в рамках АВ рассматриваются как элементарные.

Такой логической системой является логика предикатов (ЛП). Она содержит в себе всю АВ (т.е. элементарные высказывания, рассматриваемые как величины, которые принимают два значения 1 и 0, все операции алгебры высказываний и все ее формулы).

В ЛП уже имеется расчленение высказываний на *субъект* и *предикат*.

Субъект (букв. – подлежащее, хотя оно может играть также роль дополнения) – это то, о чем что-то утверждается в высказывании.

Предикат (букв. – сказуемое, хотя оно может играть также роль определения) – это, что утверждается о субъекте.

Пример 3.1. В высказывании «*Москва является столицей России*»: «*Москва*» – это *субъект*, «*x является столицей России*» – *предикат*.

В высказывании «*число 9 делится на число 3*»: «*число 9*» и «*число 3*» – субъекты, «*x делится на y*» – предикат.

Все понятия, которые вводятся в ЛП, относятся всегда к некоторому произвольному множеству Ω, которое называется *предметной областью,* или просто *областью*.

Для примера 3.1 субъект «*Москва*» может быть отнесен, например, к таким множествам, как Ω_1 – множество всех городов мира, Ω_2 – множество всех городов России, Ω_3 – множество всех столиц мира и др., а субъект «*число x*» – Ω_4 – множество натуральных чисел, Ω_5 – множество неотрицательных чисел и др.

Одноместным предикатом $F(x)$ называется произвольная функция переменного предмета x, определенная на множестве Ω и принимающая значения 1 и 0.

Множество всех элементов $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1 («истина»), называется *множеством истинности предиката $P(x)$*:

$$I_P = \{x\colon x \in \Omega,\ P(x) = 1\}.$$

Пример 3.2. Пусть предикат $P(x)$ – «x – простое число» определен на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$, тогда множество I_P для него – множество всех простых чисел.

Пусть предикат $Q(x)$ – «sin x = 0» определен на множестве действительных чисел $\mathbf{R}$, тогда его множество истинности

$$I_Q = \{k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Предикат $F(x)$ – «Диагонали параллелограмма x перпендикулярны» определен на множестве всех параллелограммов, а его множеством истинности является множество всех ромбов.

Приведенные примеры одноместных предикатов выражают свойства предметов.

Двухместным предикатом $P(x, y)$ называется функция двух переменных предметов x и y, определенная на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ и принимающая значения 1 и 0.

Пример 3.3. Приведем примеры двухместных предикатов: $Q(x, y)$ – «$x = y$» предикат равенства, определенный на множестве $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$; $F(x, y)$ – «прямая x параллельна прямой y», определенный на множестве прямых, лежащих на данной плоскости.

Аналогично определяется *n-местный предикат*.

Пример 3.4. Среди следующих предложений выделить предикаты и для каждого из них указать область истинности, если $\Omega = \mathbf{R}$ (множество действительных чисел) для одноместных предикатов и $\Omega = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ для двухместных предикатов:

1) $x + 5 = 1$;
2) при $x = 2$ выполняется равенство $x^2 - 1 = 0$;
3) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
4) существует такое число x, что $x^2 - 2x + 1 = 0$;
5) $x + 2 < 3x - 4$;
6) однозначное число x кратно 3;
7) $(x + 2) - (3x - 4)$;
8) $x^2 + y^2 > 0$.

Решение.

1) предложение «$x + 5 = 1$» является *одноместным предикатом* $P(x)$, область истинности которого $I_P = \{-4\}$;

2) предложение не является предикатом; это *ложное высказывание*;

3) предложение является *одноместным предикатом* $P(x)$, $I_P = \{1\}$;

4) предложение не является предикатом; это *истинное высказывание*;

5) предложение является *одноместным предикатом* $P(x)$, $I_P = (3;+\infty)$;

6) предложение является *одноместным предикатом* $P(x)$, $I_P = \{0; 3; 6; 9\}$;

7) предложение не является *ни предикатом, ни высказыванием*;

8) предложение является *двухместным предикатом* $Q(x, y)$, $I_Q = (\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \setminus \{0, 0\}$.

3.2. Логические операции над предикатами

Пусть на некотором множестве Ω определены два предиката $P(x)$ и $Q(x)$.

Конъюнкцией двух предикатов $P(x)$ *и* $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \& Q(x))$, который принимает значения 1 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ принимают значение 1, и принимает значение 0 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $(P(x) \& Q(x))$:

$$I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q.$$

Дизъюнкцией двух предикатов $P(x)$ *и* $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \vee Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых оба предиката $P(x)$ и $Q(x)$ принимают значение 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката $(P(x) \vee Q(x))$:

$$I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q.$$

Отрицанием предиката $P(x)$ называется новый предикат $\overline{P}(x)$, который принимает значение 1 при всех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 0, и принимает значение 0 при тех значениях $x \in \Omega$, при которых предикат $P(x)$ принимает значение 1.

Область истинности предиката:

$$I_{\overline{P}} = CI_P = \Omega \setminus I_P.$$

Импликацией предикатов $P(x)$ *и* $Q(x)$ называется новый предикат $(P(x) \to Q(x))$, который принимает значение 0 только при тех значениях $x \in \Omega$, при которых одновременно $P(x)$ принимает значение 1, а $Q(x)$ – 0, и принимает значение 1 во всех остальных случаях.

Областью истинности предиката:

$$I_{P\to Q} = I_{\overline{P}} \cup I_Q = CI_P \cup I_Q = (\Omega \setminus I_P) \cup I_Q.$$

Пример 3.5. Пусть даны предикаты: $P(x)$: «x – четное число» и $Q(x)$: «x кратно 3», определенные на множестве **N** (натуральных чисел).

Найти области истинности предикатов:

1) $P(x)\&Q(x)$;
2) $P(x) \vee Q(x)$;
3) $\overline{P(x)}$;
4) $P(x) \to Q(x)$.

Решение. Так как $I_P = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, $I_Q = \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$, то

1) $I_{P\&Q} = I_P \cap I_Q = \{6, 12, \dots, 6n, \dots\}$;
2) $I_{P\vee Q} = I_P \cup I_Q = \{2, 3, 4, 6, \dots, 2n, 3n, \dots\}$;
3) $I_{\overline{P}} = \mathbf{N} \setminus I_P = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1, \dots\}$;
4) $I_{P\to Q} = (\mathbf{N} \setminus I_P) \cup I_Q = \{1, 3, 5, \dots, 2n-1, \dots\} \cup \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}$.

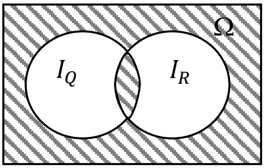
Пример 3.6. Пусть даны предикаты $Q(x, y)$ и $R(x, y)$, определенные на множестве $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Найти множество истинности предиката

$$Q(x,y) \sim R(x,y)$$

и изобразить ее с помощью кругов Эйлера – Венна.

Решение. Так как

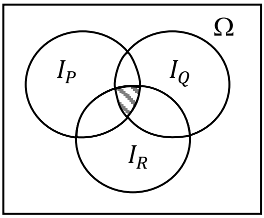
$$Q(x,y) \sim R(x,y) = \big(Q(x,y) \to R(x,y)\big)\&\big(R(x,y) \to Q(x,y)\big),$$



то

$$= I_{Q\to R} \cap I_{R\to Q} = \big(CI_Q \cup I_R\big) \cap \big(CI_R \cup I_Q\big) =$$
$$= \big(I_Q \cap I_R\big) \cup \big(CI_R \cap CI_Q\big).$$

$I_{Q\sim R}$ изображена заштрихованной частью рисунка.



Пример 3.7. Записать предикат, goлученный в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, область истинности которого I заштрихована на рисунке.

Решение. Так как здесь $I = I_P \cap I_Q \cap I_R$, то искомый предикат имеет вид:

$$P(x)\&Q(x)\&R(x).$$

Кванторные операции

1. *Квантор всеобщности.* Пусть $R(x)$ – вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента x некоторой области Ω. Тогда под выражением

$$\forall x R(x)$$

будет подразумеваться *высказывание истинное, когда* $R(x)$ *истинно для каждого элемента* x *области* Ω *и ложно в противном случае*.

Полученное сложное высказывание от x уже не зависит. Соответствующее ему словесное выражение будет одним из следующих: «$R(x)$ истинно для всякого x» или «$R(x)$ ложно для всякого x».

Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности.*

2. *Квантор существования*. Пусть $R(x)$ – вполне определенный предикат, принимающий значение 1 или 0 для каждого элемента x некоторой области Ω. Пусть $R(x)$ – некоторый предикат. Тогда под выражением

$$\exists x R(x),$$

будем понимать высказывание *истинное, если существует хотя бы один элемент* x *из области* Ω, *для которого* $R(x)$ *истинно*, и *ложное в противном случае*.

Знак $\exists$ называется *квантором существования*.

Запись вида:

$$\forall x \text{ или } \exists x$$

говорит о том, что *переменная* x *связана* соответствующим *квантором*.

Предметную переменную, не связанную никаким квантором, называют *свободной переменной*.

Пример 3.8. Пусть на множестве **N** задан предикат

$$P(x) = \text{«Число } x \text{ кратно 3».}$$

Тогда:

$$\forall x P(x) = \text{«Все натуральные числа кратны 3»;}$$

$$\exists x P(x) = \text{«Существуют натуральные числа } x\text{, которые кратны 3».}$$

Очевидно, что $\forall x P(x) = 0$, а $\exists x P(x) = 1$.

Кванторные операции применяются и к многоместным предикатам. Пусть на множестве Ω определен двухместный предикат $P(x, y)$. Применение кванторной операции к предикату по переменной x ставит в соответствие этому предикату $P(x, y)$ с двумя свободными переменными x и y предикат $\forall x P(x, y)$ (или $\exists x P(x, y)$) с одной свободной переменной y. К полученным предикатам можно применить кванторные операции по переменной y, которые приведут к высказываниям следующих видов:

$$\forall y \forall x P(x, y),\ \exists y \forall x P(x, y),\ \forall y \exists x P(x, y),\ \exists y \exists x P(x, y).$$

Пример 3.9. Рассмотрим предикат $P(x, y)$ = «y является делителем x», который определен на множестве натуральных чисел **N**. Применение кванторах операций к предикату $P(x, y)$ приведет к восьми возможным высказываниям:

$\forall y \forall x P(x, y)$ – «Любое натуральное число y является делителем любого натурального числа x».

$\exists y \forall x P(x, y)$ – «Существует натуральное число y, которое является делителем всякого натурального числа x».

$\forall y \exists x P(x, y)$ – «Любое натуральное число y является делителем некоторого натурального числа x».

$\exists y \exists x P(x, y)$ – «Существует натуральное число y, которое является делителем некоторого натурального числа x».

$\forall x \forall y P(x, y)$ – «Любое натуральное число x делится без остатка на любое натуральное число y».

$\forall x \exists y P(x, y)$ – «Любое натуральное число x делится без остатка на некоторое натуральное число y».

$\exists x \exists y P(x, y)$ – «Некоторое натуральное число x делится без остатка на некоторое натуральное число y».

$\exists x \forall y P(x, y)$ – «Некоторое натуральное число x делится без остатка на любое натуральное число y».

Очевидно, что высказывания 1, 5 и 8 ложны, а высказывания 2, 3, 4, 6 и 7 истинны.

Из рассмотренных примеров видно, что в общем случае изменение порядка следования кванторов изменяет смысл высказывания, а значит, и его логическое значение (например, высказывания 3 и 8).

3.3. Определение формулы логики предикатов

В ЛП будем использовать следующие символы:

1. *Малые латинские буквы конца алфавита*

$$x, y, z, \ldots$$

для обозначения *предметных переменных*, т.е. неопределенных элементов предметной области.

2. *Малые латинские буквы начала алфавита*

$$a, b, c, \ldots$$

для обозначения *предметных постоянных*, или *индивидуальных предметов*.

3. *Заглавные латинские буквы (без указания предметов)*

$$A, B, C, \ldots$$

для обозначения простых высказываний (это высказывания из АВ).

4. *Заглавные латинские буквы (с указанием предметов)*

$$F(x), G(x, y), P(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

для обозначения *переменных предикатов*, т.е. функций, аргументы которых принимают значения из области Ω, а сами функции могут принимать только два значения: 1 и 0.

5. *Символы операций*:

$\&$ (конъюнкция), $\vee$ (дизъюнкция), $\overline{\ }$ (инверсия),
$\to$ (импликация), $\sim$ (эквивалентность),
$\forall$ (квантор всеобщности), $\exists$ (квантор существования)

для обозначения операций, с помощью которых формируются сложные высказывания.

6. *Скобки* будут использоваться для указания приоритетности операций и области действия квантора.

Определение формулы ЛП представляет собой следующую рекурсию:

1. Каждое переменное высказывание есть формула.
2. Каждый переменный предикат есть формула.
3. Если $\alpha(x)$ – некоторая формула ЛП, в которую предметная переменная входит свободно, то выражения $\forall x\alpha(x)$ и $\exists x\alpha(x)$ являются формулами ЛП, причем перемена x в них входит связано.
4. Если α и β – формулы ЛП, причем такие, что одна и та же предметная переменная не является в одной из них связанной, а в другой – свободной, то выражения $(\alpha \& \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$ – формулы ЛП.
5. Если α – формула ЛП, то выражение $\overline{\alpha}$ является формулой ЛП, причем характер предметных переменных (свободных и связанных) при этом не меняется.
6. Никаких формул, кроме построенных по пп. 1-5 нет.

Формулы, определенные в пп. 1 и 2, мы будем называть *элементарными формулами.*

Пример 3.10. Пусть $P(x)$ и $Q(x, y)$ – одноместный и двухместный предикаты, соответственно, а A, B – переменные высказывания, то формулами будут слова:

$$A, P(x), (P(x)\&Q(x)), (\forall xP(x) \to \exists xQ(x, y)), \left(\overline{Q(x, y)} \vee B\right)$$

Не является формулой слово:

$$\forall xQ(x, y) \to P(x),$$

так как здесь нарушено условие п. 3, так как в формулу $\forall xQ(x, y)$ переменная x входит связанно, а в формулу $P(x)$ переменная x входит свободно.

Из определения формулы логики предикатов ясно, что всякая формула АВ является формулой ЛП.

3.4. Логические значения формул. Интерпретация формул

Формулы ЛП, которые содержат свободные предметные переменные, называются *открытыми*, остальные формулы (т.е., не содержащие свободных предметных переменных) – *замкнутыми*.

Например, следующие формулы являются открытыми:

$$\exists x(P(x, y, z) \sim Q(x, y)),$$

$$\forall y\exists x(\mathrm{P}_1(x, y, z) \vee (P_2(x) \to P_3(x))).$$

В первой формуле не связаны предметные переменные y и z, а во второй – z.

Формулы

$$\forall x\exists y\forall z(P_1(x, y, z) \vee P_2(x, z)),$$

$$\forall x\exists y(P(x, y) \to (A \to G(y)))$$

являются замкнутыми.

Логическое значение формулы ЛП зависит от предметной области Ω, на котором определены входящие в формулу предикаты. Кроме этого, для определения значения формулы ЛП необходимо знание:

1) значений, входящих в формулу переменных высказываний;

2) значений свободных предметных переменных из множества Ω;

3) значений предикатных переменных.

Преобразование формулы ЛП в высказывание (а также само получаемое высказывание) называется *интерпретацией* этой формулы на множестве Ω.

Если *формула ЛП замкнутая*, то ее интерпретация сводится к подстановке вместо всех предикатных переменных конкретных предикатов, в результате чего формула превращается в конкретное высказывание (нульместный предикат).

Если *формула ЛП открытая*, то ее интерпретация состоит из двух этапов:

1) вместо всех предикатных переменных необходимо подставить конкретные предикаты, в результате чего формула превратится в конкретный предикат, зависящий от такого количества предметных переменных, сколько было свободных предметных переменных в исходной формуле;

2) каждой предметной переменной необходимо придать значение, от которого зависит получившийся предикат, в результате чего этот предикат (и, значит, вся исходная формула) превратится в конкретное высказывание (истинное или ложное).

Пример 3.11. Дать интерпретации формуле $\forall x \exists y P(x, y)$.

Данная формула замкнутая, то есть не имеет свободных переменных. Поэтому для построения интерпретации данной формулы нам достаточно задать множество предметов x и y, а также определить предикат $P(x, y)$.

В качестве множества Ω возьмем множество всех мужчин, а вместо предикатной переменной $P(x, y)$ подставим конкретный предикат, определенный на Ω, «x есть отец y».

В данной интерпретации формула превратится в высказывание: «у каждого мужчины есть сын». Очевидно, что в данной интерпретации рассмотренная формула логики предикатов принимает значение 0.

Этой же формуле дадим другую интерпретацию. В качестве множества Ω возьмем множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$, а вместо предикатной переменной $P(x, y)$ подставим предикат «$x < y$», определенный на $\boldsymbol{N}^2$. Тогда получим истинное высказывание – «Для любого натурального числа x существует большее по сравнению с ним натуральное число y».

Пример 3.12. Дать интерпретацию формуле α:

$$\exists z(P(x,y,z) \to Q(x,y,z)) \to R.$$

Данная формула содержит свободные переменные x и y.

В качестве множества Ω возьмем множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$. Вместо предикатных переменных $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$ подставим трехместные предикаты «$x \cdot y = z$» и «$x + y = z$», соответственно, а вместо высказывания R подставим ложное высказывание «2 = 4».

Посмотрим, в какие высказывания может превращаться данный предикат при подстановке вместо его переменных x и y конкретных натуральных чисел. Очевидно, что формула $\exists z(P(x,y,z) \to Q(x,y,z))$, представляющая собой часть формулы α, является истинным высказыванием при любой подстановке вместо его предметных переменных x и y натуральных чисел (всегда можно найти такое натуральное число k, что $m \cdot n \neq k$ и $m + n \neq k$, при котором высказывания $m \cdot n = k$ и $m + n = k$ будут ложными, а высказывание $(m \cdot n = k) \to (m + n = k)$ – истинным). Тогда истинным будет также высказывание $\exists z(P(x,y,z) \to Q(x,y,z))$. А высказывание, в которое превращается формула α, будет ложным, так как посылка формулы истинна, а ее заключение ложно.

Очевидно, что если в данной интерпретации в качестве высказывания R взять истинное высказывание, то формула превратится в истинное высказывание.

3.5. Равносильные формулы

Знание равносильных формул очень удобно при решении практических задач и доказательства теорем, так как позволяет заменить формулу равносильной ей, которая имеет более простую структуру.

Две формулы α и β, отнесенные к некоторой предметной области Ω, которые при всех заменах переменных предикатов, переменных высказываний и свободных предметных переменных соответственно индивидуальными предикатами, определенными на Ω, индивидуальными высказываниями и индивидуальными предметами из Ω принимают одинаковые значения 1 или 0, называются *равносильными на области* Ω.

Пример 3.13. На области Ω, содержащей только один предмет, равносильными будут формулы: $F(x)$, $\forall x F(x)$, $\exists x F(x)$.

Две формулы α и β, равносильные на любых предметных областях Ω, называются *просто равносильными*. Как и в АВ, такие (просто равносильные) формулы могут быть заменены одна другой.

Так как ЛП является расширением АВ, все законы равносильности АВ (см. формулы (1.1)–(1.16*)) верны и в этой системе, если в них вместо переменных высказываний подставить формулы ЛП. Основные равносильности АВ приведены в таблице.

Основные равносильности алгебры высказываний

$A = A$	(1.1)	закон тождества
$A \,\&\, \overline{A} = 0$	(1.2)	закон непротиворечия
$A \vee \bar{A} = 0$	(1.3)	закон исключенного третьего
$A = \bar{\bar{A}}$	(1.4)	закон двойного отрицания
$A \vee A = A$ $A \,\&\, A = A$	(1.5) (1.5*)	законы идемпотентности
$A \vee B = B \vee A$ $A \,\&\, B = B \,\&\, A$	(1.6) (1.6*)	законы коммутативности
$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ $A \,\&\, (B \,\&\, C) = (A \,\&\, B) \,\&\, C$	(1.7) (1.7*)	законы ассоциативности
$A \,\&\, (B \vee C) = (A \,\&\, B) \vee (A \,\&\, C)$ $A \vee (B \,\&\, C) = (A \vee B) \,\&(A \vee C)$	(1.8) (1.8*)	законы дистрибутивности
$A \vee (A \,\&\, B) = A$ $A \,\&\, (A \vee B) = A$	(1.9) (1.9*)	законы поглощения
$\overline{A \vee B} = \bar{A} \,\&\, \bar{B}$ $\overline{A \,\&\, B} = \bar{A} \vee \bar{B}$	(1.10) (1.10*)	законы де Моргана
$\bar{0} = 1$ $\bar{1} = 0$	(1.11) (1.11*)	отрицание лжи отрицание истины
$A \vee 0 = A$ $A \vee 1 = 1$	(1.12) (1.12*)	прибавление 0 прибавление 1
$A \,\&\, 0 = 0$ $A \,\&\, 1 = A$	(1.13) (1.13*)	умножение на 0 умножение на 1
$A \to B = (\bar{A} \vee B)$ $A \sim B = (A \to B)\&(B \to A)$	(1.14) (1.14*)	исключение импликации
$A \vee (\bar{A} \,\&\, B) = A \vee B$ $A \,\&\, (\bar{A} \vee B) = A \,\&\, B$	(1.15) (1.15*)	
$\bar{A} \vee (A\& B) = \bar{A} \vee B$ $\bar{A} \,\&\, (A \vee B) = \bar{A} \,\&\, B$	(1.16) (1.16*)	

В ЛП имеют место равносильности:

$$\overline{\forall x\alpha(x)} = \exists y\overline{\alpha(y)}; \tag{3.1}$$

$$\overline{\exists x\alpha(x)} = \forall y\overline{\alpha(y)}. \tag{3.2}$$

Таким образом, имеет место следующее правило: *знак отрицания можно ввести под знак квантора, заменив квантор на двойственный.*

Пример 3.14. Преобразовать формулу

$$\overline{\exists x(A(x) \to \forall yB(y))}.$$

$$\overline{\exists x\big(A(x) \to \forall yB(y)\big)} \overset{(1.14)}{=} \overline{\exists x\left(\overline{A(x)} \vee \forall yB(y)\right)} \overset{(3.2)}{=}$$

$$= \forall x\left(\overline{\overline{A(x)} \vee \forall yB(y)}\right) \overset{(1.10)}{=} \forall x\big(\overline{\overline{A(x)}}\&\overline{\forall yB(y)}\big) \overset{(1.4),(3.1)}{=}$$

$$=\forall xA(x)\&\exists y\overline{B(y)}.$$

В ЛП также имеют место следующие равносильности:

$$\big(\forall x\alpha(x) \vee \beta\big) = \big(\forall x(\alpha(x) \vee \beta)\big); \tag{3.3}$$

$$\big(\forall x\alpha(x)\,\&\,\beta\big) = \big(\forall x(\alpha(x)\,\&\,\beta)\big); \tag{3.4}$$

$$\big(\exists x\alpha(x)\,\&\,\beta\big) = \big(\exists x(\alpha(x)\,\&\,\beta)\big); \tag{3.5}$$

$$\big(\exists x\alpha(x) \vee \beta\big) = \big(\exists x(\alpha(x) \vee \beta)\big), \tag{3.6}$$

где формула β не содержит свободной переменной x, а в формуле α, переменная x связана соответствующим квантором;

$$\forall x\alpha(x)\,\&\,\forall x\beta(x) = \forall x\big(\alpha(x)\,\&\,\beta(x)\big); \tag{3.7}$$

$$\exists x\big(\alpha(x) \vee \beta(x)\big) = \exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x), \tag{3.8}$$

где в формулах α и β, переменная x связана соответствующим квантором.

В заключение отметим, что в ЛП *не равносильны* следующие формулы:

$$\forall x\alpha(x)\vee\forall x\beta(x) \neq \forall x(\alpha(x)\vee\beta(x))$$

$$\exists x\alpha(x)\&\exists x\beta(x) \neq \exists x(\alpha(x)\&\beta(x))$$

Однако имеют место следующие равносильности:

$$\begin{gathered}\big(\forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x)\big) = \big(\forall x\alpha(x) \vee \forall y\beta(y)\big) \overset{(3.3)}{=} \\ = \big(\forall x(\alpha(x) \vee \forall y\beta(y))\big) \overset{(3.3)}{=} \forall x\forall y(\alpha(x) \vee \beta(y));\end{gathered} \tag{3.9}$$

$$\left(\exists x\alpha(x)\ \&\ \exists x\beta(x)\right)=\left(\exists x\alpha(x)\ \&\ \exists y\beta(y)\right)\overset{(3.5)}{=}$$
$$=\left(\exists x(\alpha(x)\ \&\ \forall y\beta(y))\right)\overset{(3.5)}{=}\exists x\exists y(\alpha(x)\ \&\ \beta(y)). \qquad (3.10)$$

Пример 3.15. С помощью равносильных преобразований, привести формулу

$$\forall x\exists yP(x,y)\vee\overline{\exists x\forall yQ(x,y)}$$

к виду, в котором все операции связывания кванторами находятся вне скобок.

$$\forall x\exists yP(x,y)\vee\overline{\exists x\forall yQ(x,y)}\overset{(3.1),(3,2)}{=}\forall x\exists yP(x,y)\vee\forall x\exists y\overline{Q(x,y)}\overset{(3.9)}{=}$$
$$=\forall x\forall z\left(\exists yP(x,y)\vee\exists y\overline{Q(x,y)}\right)\overset{(3.8)}{=}\forall x\forall z\exists y\left(P(x,y)\vee\overline{Q(x,y)}\right).$$

3.6. Предваренная нормальная форма

Формулы, в которых из операций АВ имеются только конъюнкция (&), дизъюнкция ($\vee$) и инверсия ($\overline{\ }$), а знак отрицания относится только к предикатам и элементарным высказываниям, будем называть *приведенными формулами*.

Очевидно, что *для каждой формулы существует равносильная ей приведенная формула.*

Приведенная формула, равносильная формуле α, называется *приведенной формой* формулы α.

Пример 3.16. В рассмотренных выше примерах 3.14 и 3.15 следующие формы формул являются приведенными:

$$\forall xA(x)\&\exists y\overline{B(y)},\ \forall x\exists yP(x,y)\vee\forall x\exists y\overline{Q(x,y)},$$
$$\forall x\forall z\left(\exists yP(x,y)\vee\exists y\overline{Q(x,y)}\right),\ \forall x\forall z\exists y\left(P(x,y)\vee\overline{Q(x,y)}\right).$$

Действительно, в этих формулах из операций АВ используются только &, $\vee$ и $\overline{\ }$, причем под знаком отрицания предикаты.

Для облегчения анализа сложных суждений формулы ЛП рекомендуется приводить к нормальной форме. Если в АВ приняты две нормальные формы (ДНФ – дизъюнктивная и КНФ – конъюнктивная), то в ЛП – одна *предваренная нормальная форма* (ПНФ), суть которой сводится к разделению формулы на две части: кванторную и безкванторную.

Приведенная форма формулы α называется *предваренной нормальной формой (ПНФ)* формулы α, если она не содержит кванторов или если при образовании ее из элементарных формул операции связывания квантором следуют за всеми операциями алгебры высказываний. В примере 3.15 формула была приведена к ПНФ.

В записи ПНФ кванторы, если они есть, предшествуют всем остальным символам. Например, приведенная формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

нормальна, если формула $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$ не содержит кванторов.

Верно следующее утверждение: *Для каждой формулы существует равносильная ей ПНФ.*

Пример 3.17. Преобразовать к ПНФ формулу

$$\overline{\exists x(A(x) \to \forall y B(y))}.$$

$$\overline{\exists x\big(A(x) \to \forall y B(y)\big)} \overset{(4.1)}{=} \forall x\big(\overline{A(x) \to \forall y B(y)}\big) \overset{(1.14)}{=}$$

$$=\forall x\left(\overline{\overline{A(x)} \vee \forall y B(y)}\right) \overset{(1.4),(1.10)}{=} \forall x\big(A(x) \& \overline{\forall y B(y)}\big) \overset{(3.1)}{=}$$

$$= \forall x\big(A(x) \& \exists y \overline{B(y)}\big) \overset{(3.5)}{=} \forall x \exists y\big(A(x) \& \overline{B(y)}\big).$$

3.7. Выполнимость и общезначимость формул

Формула логики предикатов называется *выполнимой*, если она истинна для некоторой области Ω и некоторых предикатов, на ней определенных.

Формула логики предикатов называется *тождественно истинной для области Ω*, если она истинна для данной области Ω и для всех предикатов, определенных на Ω.

Формула логики предикатов называется *общезначимой* (или *тождественно истинной*, или просто *истинной*), если она истинна для всякой области Ω и для всяких предикатов.

Формула называется *ложной*, или *невыполнимой*, если ни для какой области ни при каких заменах предикатов не является истинной.

Пример 3.18. Доказать, что формула $\exists x P(X)$ выполнима.

Для доказательства выполнимости формулы достаточно найти такую ее интепретацию (т.е. задать область Ω и некоторый предикат, на ней определенный), которая принимает значение 1.

В качестве области Ω рассмотрим множество натуральных чисел **N**, а предикат $P(x)$ = «x – четное число». Интепретация данной формулы принимает значение 1. Следовательно, формула $\exists x P(X)$ является выполнимой.

Пример 3.19. Доказать, что формула $\forall x \exists y P(x, y)$ выполнима, но не общезначима.

Пусть Ω = **N** (множество натуральных чисел). Определим предикат так:

$$P(x, y) = «x < y».$$

Тогда данная интерпретация формулы $\forall x \exists y P(x, y)$ будет тождественно истинная (действительно, для любого натурального числа существует большее него натуральное число), и, следовательно, сама формула – выполнима в этой области.

При этом, если рассматривать предикат $P(x, y)$ = «$x < y$» в конечной области, например Ω = {0, 1, 2 , ..., 9}, то формула превратиться в тождественно ложную формулу. А этот факт можно рассматривать как контрпример при доказательстве того, что данная формула не общезначима.

Пример 3.20. Доказать, что формула $\exists x \exists y\big(P(x) \& \overline{P(y)}\big)$ выполнима, но не общезначима.

Пусть Ω = **N**, а $P(x, y)$ = «x – *четно*». Так как, действительно, на множестве натуральных чисел существуют такие пары чисел, из которых одно четное (что даст нам истинность $P(x)$), а другое – нечетное (что даст нам истинность $\overline{P(y)}$), следовательно, на множестве натуральных чисел формула $\exists x \exists y\big(P(x) \& \overline{P(y)}\big)$ выполнима.

Однако, если предикат $P(x, y)$ = «x – *четно*» рассматривать на множестве Ω, совпадающим с множеством четных натуральных чисел, то интерпретация формулы принимает значение ложь. Следовательно, формула $\exists x \exists y\big(P(x) \& \overline{P(y)}\big)$ не является общезначимой.

Пример 3.21. Доказать (общезначимость) тождественную истинность формулы $\forall x\big(P(x) \vee \overline{P(x)}\big)$.

Данная формула будет тождественно истинной в любой области, так как по законам алгебры высказываний $P(x) \vee \overline{P(x)} = 1$. Значит она является общезначимой.

Пример 3.22. Доказать невыполнимость формулы

$$\forall x\big(P(x)\&\overline{P(x)}\big).$$

Данная формула будет тождественно ложна в любой области, так как по законам алгебры высказываний $P(x)\&\overline{P(x)} = 0$. Значит она является невыполнимой.

Пример 3.23. Доказать общезначимость формулы

$$\overline{\exists xP(x)} \to \overline{\forall xP(x)}$$

Доказывать будем *от противного*. Предположим, что в некоторой области Ω и для некоторых определенных на ней предикатов формула ложна:

$$\overline{\exists xP(x)} \to \overline{\forall xP(x)} = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} \overline{\exists xP(x)} = 1; \\ \overline{\forall xP(x)} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \exists xP(x) = 0; \\ \forall xP(x) = 1. \end{cases}$$

Одновременное выполнение последних этих двух условий невозможно, следовательно, получили противоречие, а формула $\overline{\exists xP(x)} \to \overline{\forall xP(x)}$ тождественно истинна, или общезначима.

Пример 3.24. Доказать общезначимость формулы

$$\forall x\big(P(x) \to \overline{Q(x)}\big) \to \big(\overline{\exists xP(x)\& \forall xQ(x)}\big).$$

$$\forall x\big(P(x) \to \overline{Q(x)}\big) \to \big(\overline{\exists xP(x)\& \forall xQ(x)}\big) \overset{(1.14)}{=}$$

$$= \overline{\forall x\big(P(x) \to \overline{Q(x)}\big)} \vee \big(\overline{\exists xP(x)\& \forall xQ(x)}\big) \overset{(1.14)}{=}$$

$$= \overline{\forall x\big(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}\big)} \vee \overline{\exists xP(x)} \vee \; \overline{\forall xQ(x)} \overset{(3.1)}{=}$$

$$= \exists x \left(\overline{\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}}\right) \vee \overline{\exists xP(x)} \vee \; \exists x\overline{Q(x)} \overset{(1.10)}{=}$$

$$= \exists x\big(\overline{\overline{P(x)}} \;\&\; \overline{\overline{Q(x)}}\big) \vee \overline{\exists xP(x)} \vee \; \exists x\overline{Q(x)} \overset{(1.4),(1.6)}{=}$$

$$= \exists x\big(P(x) \;\&\; Q(x)\big) \vee \exists x\overline{Q(x)} \vee \overline{\exists xP(x)} \overset{(3.8)}{=}$$

$$= \exists x \Big(\big(P(x) \;\&\; Q(x)\big) \vee \overline{Q(x)}\Big) \vee \overline{\exists xP(x)} \overset{(1.16)}{=}$$

$$= \exists x\big(P(x) \vee \overline{Q(x)}\big) \vee \overline{\exists xP(x)} \overset{(3.8),(1.6)}{=}$$

$$= \exists xP(x) \vee \overline{\exists xP(x)} \vee \exists x\overline{Q(x)} \overset{(1.3)}{=}$$

$$= 1 \vee \exists x\overline{Q(x)} = 1.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ:

3.1. Среди следующих предложений выделите предикаты, для каждого из предикатов укажите одну из возможных предметных областей и в соответствии с ней область истинности:

1) Луна есть спутник Венеры;
2) планеты x и y принадлежат Солнечной системе;
3) $5 + \sqrt[5]{70} - \sqrt[6]{25} > 250$;
4) $x^2 + 3x + 2 = 0$;
5) $x^4 - 3x + 8$;
6) любое простое число p не имеет делителей, отличных от себя и 1;
7) натуральное число n не меньше 1;
8) треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$;
9) $x^2 + 2x + 1 > 0$;
10) $1 + \mathrm{tg}2x = \frac{1}{\cos^2 x}$;
11) $\ln x < \sin x$.

3.2. Даны предикаты

$$P(x) = «x^2 - 4 = 0» \text{ и } Q(x) = «3x - 2 < 17».$$

Найдите области истинности этих предикатов, если их предметные область есть:

1) **R** (множество действительных чисел);
2) **N** (множество натуральных чисел).

3.3. На множестве $\Omega = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ заданы два предиката

$$P(x) = «x \text{ – простое число}», \quad Q(x) = «x \text{ – нечетное число}».$$

Равносильны ли предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множествах

$$L = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ и } K = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}?$$

3.4. На множестве $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ заданы предикаты:

$P(x) = «x$ не делится на 5»;
$Q(x) = «x$ – четное число»;
$R(x) = «x$ – простое число»;
$F(x) = «x$ кратно 3».

Найдите множества истинности следующих предикатов:

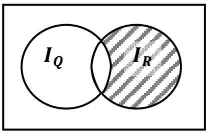
1) $P(x)\ \&\ Q(x)$;
2) $R(x)\ \&\ Q(x)$;
3) $R(x)\ \&\ F(x)$;
4) $Q(x)\ \&\ F(x)$;

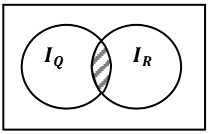
5) $\overline{Q(x)}\ \&\ F(x)$;
6) $P(x)\ \&\ \overline{F(x)}$;
7) $\overline{Q(x)}\ \&\ \overline{F(x)}$;
8) $P(x)\ \&\ Q(x)\ \&\ F(x)$;
9) $P(x) \lor Q(x)$;
10) $Q(x) \lor R(x)$;
11) $R(x) \lor F(x)$;
12) $Q(x) \lor F(x)$;
13) $\overline{Q(x)} \lor F(x)$;
14) $Q(x) \lor \overline{F(x)}$;
15) $P(x) \lor Q(x) \lor F(x)$;
16) $R(x) \ \rightarrow\ P(x)$;
17) $F(x) \ \rightarrow\ \overline{R(x)}$;
18) $P(x) \ \rightarrow\ Q(x)$;
19) $\big(P(x)\ \&\ R(x)\big) \rightarrow \overline{F(x)}$;
20) $\big(P(x)\ \&\ F(x)\big) \rightarrow \overline{R(x)}$.

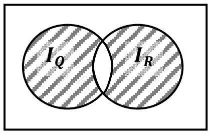
3.5. Изобразите на диаграммах Эйлера – Венна области истинности для следующих предикатов:

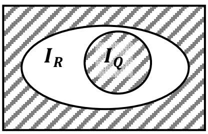
1) $\overline{P(x)}\ \&\ \overline{Q(x)}$;
2) $\overline{P(x)} \sim \overline{Q(x)}$;
3) $\big(P(x) \ \rightarrow\ Q(x)\big) \lor (R(x) \& \overline{Q(x)})$;
4) $P(x) \ \rightarrow \big(Q(x) \lor \overline{Q(x)}\big)$;
5) $\big(P(x)\ \&\ Q(x)\big) \rightarrow \overline{R(x)}$.

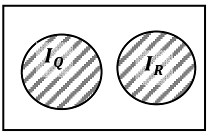
3.6. Записать предикаты, полученные в результате логических операций над предикатами $P(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$, области истинности которых (I) заштрихованы на следующих рисунках:

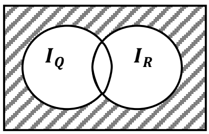
1)


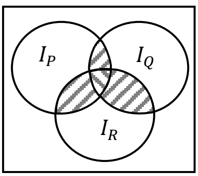
2)


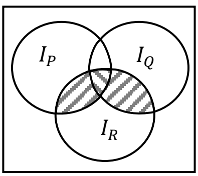
3)


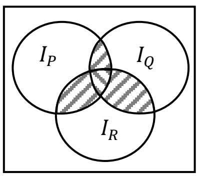
4)


5)


6)


7)


8)


9)


3.7. Укажите, какие из следующих выражений являются формулами ЛП. В каждой формуле выделите свободные и связанные переменные:

1) $\exists x \exists y P(x, y)$;
2) $\exists x, y P(x, y)$;
3) $\forall x P(x) \vee \forall y Q(x, y)$;
4) $\forall x \exists y P(x, y)$;
5) $A \to \forall x P(x, y)$;
6) $\exists x P(x, y)\ \&\ Q(y, z)$.

3.8. Даны утверждения

$P(x)$ = «число x делится на 3»,
$Q(x)$ = «число x делится на 2»,
$R(x)$ = «число x делится на 4»,
$F(x)$ = «число x делится на 6»,
$G(x)$ = «число x делится на 12».

Укажите, какие из следующих утверждений истинны, какие ложны:

1) $\forall x \Big(\big(P(x) \& Q(x)\big) \to G(x) \Big)$;
2) $\forall x \Big(\big(Q(x) \& F(x)\big) \to G(x) \Big)$;
3) $\forall x \Big(\big(R(x) \& F(x)\big) \to G(x) \Big)$;
4) $\forall x \Big(G(x) \to \big(R(x) \& F(x)\big) \Big)$;
5) $\forall x \big(\overline{G(x)} \to Q(x) \to F(x)\big)$;
6) $\exists x \Big(\big(Q(x) \& R(x)\big) \to \overline{F(x)} \Big)$;
7) $\forall x \big(\overline{P(x)} \to \overline{G(x)}\big)$.

3.9. Пусть предикат $P(x, y)$ = «$x < y$» определен на множестве натуральных чисел **N**.

1) Какие из следующих предикатов тождественно истинные и какие тождественно ложные:

а) $\exists x P(x, y)$; б) $\forall x P(x, y)$; в) $\exists y P(x, y)$; г) $\forall y P(x, y)$?

2) Для тех предикатов из 1), которые не являются ни тождественно истинными, ни тождественно ложными, указать область истинности и область ложности.

3) Какие из следующих предложений истинны, а какие ложны:

а) $\exists x \forall y P(x,y)$;
б) $\forall x \exists y P(x,y)$;
в) $\forall y \exists x P(x,y)$;
г) $\forall x \forall y P(x,y)$;
д) $\forall y \forall x P(x,y)$;
е) $\exists y \forall x P(x,y)$;
ж) $\exists x \exists y P(x,y)$;
з) $\exists y \exists x P(x,y)$?

3.10. Пусть задана алгебраическая система $\Omega = \langle \mathbf{Z}^+, S^3, P^3 \rangle$, где $\mathbf{Z}^+$ – множество целых неотрицательных чисел, а S^3 и P^3 – трехместные предикаты

$$S(x,y,z)=1 \Leftrightarrow x+y=z\,,\quad P(x,y,z)=1 \Leftrightarrow x \cdot y = z\,.$$

Записать формулу с одной свободной переменной x, истинную в данной модели тогда и только тогда, когда:

а) $x = 0$;
б) $x = 1$;
в) $x = 2$;
г) x четно;
д) x нечетно;
е) x – простое число.

3.11. Записать формулу с двумя свободными переменными x и y, истинную в Ω из задачи 3.10 тогда и только тогда, когда:

а) $x = y$;
б) $x \leq y$;
в) $x < y$;
г) x делит y.

3.12. Записать формулу с тремя свободными переменными x, y и z, истинную в Ω из задачи 3.10 тогда и только тогда, когда:

а) z – наименьшее общее кратное x и y;
б) z – наибольший общий делитель x и y.

3.13. Записать предложение, выражающее в модели Ω из задачи 3.10:

а) коммутативность сложения;
б) ассоциативность сложения;
в) коммутативность умножения;
г) ассоциативность умножения;

д) дистрибутивность сложения относительно умножения;
е) бесконечность множества простых чисел;
ж) существование НОК и НОД для числе, отличных от нуля.

3.14. Записать предложение, выражающее в модели Ω из задачи 3.10:

а) несуществование единицы;
б) конечность множества простых чисел;
в) то, что для всякого числа существует строго меньшее число;
г) существование наибольшего натурального числа.

Истинны ли эти предложения в модели Ω?

3.15. Найти отрицания следующих формул и привести их к виду ПНФ:

1) $\exists x(P(x)\ \&\ Q(x)\ \&\ R(x))$;
2) $\forall x(P(x) \to \forall y Q(y))$;
3) $\forall x(P(x) \vee \exists y Q(y))$;
4) $\forall x(P(x) \to Q(x))\ \&\ \exists x\big(Q(x)\&\ \overline{R(x)}\big)$;
5) $\exists x\big(P(x) \sim Q(x)\big)$;
6) $\forall x \exists y \forall z(P(x,y,z) \to Q(x,y,z))$.

3.16. Выполнимы ли следующие формулы:

а) $\exists x P(x)$;
б) $\forall x P(x)$;
в) $\exists x \forall y(Q(x,x)\ \&\ \overline{Q(x,y)})$;
г) $\exists x \exists y(P(x)\ \&\ \overline{P(y)})$;
д) $\exists x \forall y(Q(x,y)\ \&\ \forall z R(x,y,z))$;
е) $P(x) \to \forall y P(y)$?

3.17. Являются ли тождественно истинными следующие формулы:

а) $(\exists x P(x)) \to (\forall x P(x))$;
б) $\overline{(\exists x P(x)) \to (\forall x P(x))}$;
в) $\exists x \forall y(Q(x,y) \to \forall y \exists x(Q(x,y)$;
г) $\forall y \exists x(Q(x,y) \to \exists x \forall y(Q(x,y)$?

3.18. Доказать тождественную истинность следующих формул:

а) $(\overline{\exists x \alpha(x)} \to \overline{\forall x \alpha(x)})$;

б) $(\exists x(\alpha(x) \,\&\, (\beta \to \gamma(x))) \to (\forall x(\alpha(x) \to \overline{\gamma(x)}) \to \overline{\beta}))$, где x не свободна в β;

в) $(\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \to (\overline{\exists x \alpha(x) \,\&\, \forall x \beta(x))})$;

г) $(\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \to (\exists x \alpha(x) \,\&\, \forall x \beta(x)))$.