

ЗАДАНИЕ. Решить задачи № 2.10 и 2.11 (Практикум «Алгебра высказываний и исчисление высказываний», стр. 43 <https://drive.google.com/open?id=1FmOmLmXp79nkLFTn4057u2yzmgDpgco4>)

Решения следует также разместить в своей папке на google диске по ссылке:
<https://drive.google.com/folderview?id=146gIqzeodT51Ml4jppDjhnk1TjsLb4vp>

Создайте папки 06.04.2020. Большая просьба: решения выкладывать в одном файле приложения MS Word или Acrobat, в котором необходимо вставить решения в виде текста с формулами либо в виде фото листочков из тетради. Файлы необходимо выложить 6-7 апреля.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ К ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

3.9. Метод резолюций в исчислении высказываний

Метод резолюций является эффективным методом автоматического доказательства выводимости формул. Данный метод лежит в основе логического программирования.

Для обоснования метода рассмотрим необходимые определения и теоремы.

Пусть $D_1 = D'_1 \vee A$ и $D_2 = D'_2 \vee \bar{A}$ дизъюнкты (элементарные дизъюнкции).

Дизъюнкт $D'_1 \vee D'_2$ называется *резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 по литере A* и обозначается

$$\text{res}_A(D_1, D_2).$$

Резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 называется их резольвента по некоторой литере и обозначается через

$$\text{res}(D_1, D_2).$$

Резольвента контрарных литер равна 0, т.е.

$$\text{res}(A, \bar{A}) = 0.$$

Здесь ноль будет отождествляться с формулой $A \& \bar{A} = 0$.

! Если дизъюнкты D_1 и D_2 не содержат контрарных литер, то резольвент у них не существует.

Пример 3.6. Если $D_1 = \bar{A} \vee B \vee C$, $D_2 = A \vee \bar{B} \vee D$, то

$$\text{res}_A(D_1, D_2) = B \vee C \vee \bar{B} \vee D,$$

$$\text{res}_B(D_1, D_2) = \bar{A} \vee C \vee A \vee D,$$

$\text{res}_C(D_1, D_2)$ и $\text{res}_D(D_1, D_2)$ не существуют. □

Теорема 3.12. Если резольвента $\text{res}(D_1, D_2)$ существует и не равна нулю, то

$$D_1, D_2 \vdash \text{res}(D_1, D_2). \quad \square$$

Теорема 3.13. Если резольвента $\text{res}(D_1, D_2)$ равна нулю, то множество дизъюнктов D_1 и D_2 противоречиво, т.е.

$$D_1, D_2 \vdash \square$$

Пусть $S = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$ множество дизъюнктов. Последовательность формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ называется *резольвентивным выводом из множества S* , если для каждой формулы φ_i ($i = 1, \dots, n$) выполняется одно из следующих условий:

- 1) $\varphi_i \in S$;
- 2) существуют $j, k < i$ такие, что $\varphi_i = \text{res}(\varphi_j, \varphi_k)$.

Теорема 3.14. (теорема о полноте метода резолюций). Множество дизъюнктов S противоречиво в том и только в том случае, когда существует резолютивный вывод из S , заканчивающийся символом \emptyset . \square

Метод резолюции можно использовать для проверки выводимости формулы φ из данного множества формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Действительно, для проверки соотношения

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi,$$

согласно Т. 3.7¹ достаточно проверить на противоречивость множество формул $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \bar{\varphi}\}$, т.е. проверить выполнение соотношения

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \bar{\varphi} \vdash,$$

что в свою очередь равносильно условию

$$\psi \vdash, \text{ где } \psi = \varphi_1 \& \varphi_2 \& \dots \& \varphi_n \& \bar{\varphi}.$$

Для получения дизъюнктов приведем формулу ψ к КНФ: $\psi = D_1 \& D_2 \& \dots \& D_m$, тогда

$$\psi \vdash \Leftrightarrow D_1 \& D_2 \& \dots \& D_m \vdash \Leftrightarrow D_1, D_2, \dots, D_m \vdash.$$

Таким образом, задача проверки выводимости $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ сводится к проверке противоречивости множества дизъюнктов $S = \{D_1, D_2, \dots, D_m\}$, что равносильно существованию резолютивного вывода \emptyset из S .

Если резолютивный вывод не заканчивается \emptyset , то заданную формулу φ нельзя вывести из данного множества формул $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Пример 3.7. Проверить методом резолюций выводимость формулы $A \rightarrow (B \rightarrow F)$ из набора формул $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $(C \& D) \rightarrow E$, $\bar{F} \rightarrow (D \& \bar{E})$, т.е.

$$A \rightarrow (B \rightarrow C), (C \& D) \rightarrow E, \bar{F} \rightarrow (D \& \bar{E}) \vdash A \rightarrow (B \rightarrow F).$$

Согласно методу резолюций, для доказательства выводимости данной формулы из данного набора формул необходимо проверить на противоречивость множество формул:

$$S = \{(A \rightarrow (B \rightarrow C)), ((C \& D) \rightarrow E), (\bar{F} \rightarrow (D \& \bar{E})), \overline{A \rightarrow (B \rightarrow F)}\}.$$

! Обратите внимание на то, что формула, стоявшая справа от знака выводимости $A \rightarrow (B \rightarrow F)$, добавляется в это множество с отрицанием: $\overline{A \rightarrow (B \rightarrow F)}$.

Приведем все формулы из S к КНФ:

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) = (\bar{A} \vee \bar{B} \vee C);$$

$$((C \& D) \rightarrow E) = (\overline{(C \& D)} \vee E) = (\bar{C} \vee \bar{D} \vee E);$$

$$(\bar{F} \rightarrow (D \& \bar{E})) = (F \vee (D \& \bar{E})) = ((F \vee D) \& (F \vee \bar{E}));$$

$$\overline{A \rightarrow (B \rightarrow F)} = \overline{\bar{A} \vee \bar{B} \vee F} = (A \& B \& \bar{F}).$$

Отсюда получаем множество дизъюнктов, который необходимо проверить на противоречие²:

$$S' = \{\bar{A} \vee \bar{B} \vee C, \bar{C} \vee \bar{D} \vee E, F \vee D, F \vee \bar{E}, A, B, \bar{F}\}.$$

Построим резолютивный вывод из S' :

$$1) \text{ res}_A(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C, A) = \bar{B} \vee C;$$

$$2) \text{ res}_B(\bar{B} \vee C, B) = C;$$

¹ **Теорема 3.7.** Формула φ выводима из множества формул Γ , т.е. $\Gamma \vdash \varphi$, тогда и только тогда, когда множество $\Gamma \cup \{\bar{\varphi}\}$ – противоречиво. \square

² Решение задачи № 2.10 начинается отсюда.

$$3) \text{ res}_D(\bar{C} \vee \bar{D} \vee E, F \vee D) = \bar{C} \vee E \vee F;$$

$$4) \text{ res}_E(\bar{C} \vee E \vee F, F \vee \bar{E}) = \bar{C} \vee F;$$

$$5) \text{ res}_C(\bar{C} \vee F, C) = F;$$

$$6) \text{ res}_F(F, \bar{F}) = 0.$$

Таким образом, по теореме о полноте метода резолюции (Т. 3.14) множество S противоречиво, а, значит, формула $A \rightarrow (B \rightarrow F)$ выводима из набора формул $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $(C \& D) \rightarrow E$, $\bar{F} \rightarrow (D \& \bar{E})$. \square