Практическое занятие (4 мая 2020 г.)

Иванова Н.Н. e-mail inn-ivt@mail.ru

Viber, Whats App 8-917-656-15-83

Задания даны из **«Методички по логике предикатов»**
ссылка на методичку:
https://drive.google.com/open?id=1vWmfNrBB3_V1wriWXgHHTgOPtv95QyM2

ЗАДАНИЕ

1. Изучить один из правильных вариантов решения задачи № 3.12 *а* (см. ниже). Выявить «слабые» стороны предложенного Вами решения данной задачи (если они есть). Найти примеры, для которых Ваша формула принимает значение 0. Внести исправления в решение и самостоятельно записать правильный вариант решения № 3.12 *б* (с тестовой проверкой формулы).
2. Решить на выбор любые 10 пунктов задачи № 3.15 (стр. 22-23):

ОТЧЕТНОСТЬ ПО ПРАКТИЧЕСКОМУ ЗАНЯТИЮ

Решения следует разместить в своей папке на Google Drive по ссылке: https://drive.google.com/drive/folders/146gIqzeodT51Ml4jjpDjhnk1TjsLb4vp

Создайте папки 04.05.2020. Большая просьба: решения выкладывать в одном файле приложения MS Word (или Acrobat), в который необходимо вставить решения в виде текста с формулами, либо в виде фото листочков из тетради.

! Файлы с решениями задач необходимо выложить **4-6 мая**.

Ссылка на журнал с отметками:
https://drive.google.com/open?id=1S9wYYLCJcSzaLZGkCYZgCo4HDxhGOjtvcWA8KI1TR1Y

РАЗБОР РЕШЕНИЯ № 3.12 *а*

3.10. Пусть задана алгебраическая система $\Omega = <\mathbf{Z}^+, S^3, P^3>$, где $\mathbf{Z}^+$ – множество целых неотрицательных чисел, а S^3 и P^3 – трехместные предикаты

$$S(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x + y = z,\ P(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

3.12. Записать формулу с тремя свободными переменными x, y и z, истинную в Ω из задачи 3.10 тогда и только тогда, когда:

а) *z* – наименьшее общее кратное *x* и *y*
Рассмотрите следующую формулу:

$$\text{НОК}(x, y, z) = \exists u P(x, u, z) \ \&\ \exists u P(y, u, z) \ \&\ \forall v(\exists u P(x, u, v) \ \&\ \exists u P(y, u, v) \to \exists u P(z, u, v)).$$

Многие из Вас заметили ошибки в обозначении предметных переменных в предложенной для рассмотрения формуле (см. задание к практическому занятию от 29.04.2020). Некоторых из Вас кроме этого смутил квантор всеобщности, который был заменен в решениях квантором существования.

Для того чтобы убедиться, что формула верная, необходимо ее протестировать.

Проверим формулу для НОК(2, 5) = 10 (то есть для двух взаимно простых чисел, наименьшее общее кратное которых, как известно, равно их произведению).

а) Подставим вместо x, y и z соответствующие правильные значения.

$$\text{НОК}(2, 5, 10) = \exists u P(2, u, 10) \ \&\ \exists u P(5, u, 10) \ \&\ \forall v(\exists u P(2, u, v) \ \&\ \exists u P(5, u, v) \to \exists u P(10, u, v))$$

Данная формула состоит из трех логических множителей:
$\exists u P(2, u, 10)$;
$\exists u P(5, u, 10)$;

$\forall v(\exists uP(2,u,v)\ \&\ \exists uP(5,u,v)\ \rightarrow\ \exists uP(10,u,v))$.

Первые два логических множителя, очевидно, являются истинными высказываниями. Действительно, на множестве целых неотрицательных чисел можно подобрать числа *x*, которые будучи умноженными на 2 и 5, соответственно, дадут 10.

Рассмотрим третий логический множитель:

$$\forall v(\exists uP(2,u,v)\ \&\ \exists uP(5,u,v)\ \rightarrow\ \exists uP(10,u,v)).$$

Формула, стоящая в скобках, находится в области действия квантора всеобщности, связывающего переменную *v*. Предметная переменная *v* принадлежит множеству целых неотрицательных чисел, поэтому данная формула должна быть истинной для всех чисел бесконечного ряда: 0, 1, 2 , 3, 4, 5… Проверим это.

Для *v* = 0, получаем высказывание $(\exists uP(2,u,0)\ \&\ \exists uP(5,u,0)\ \rightarrow\ \exists uP(10,u,0))$, которое истинно:

$$((1\ \&\ 1) \rightarrow 1) = 1.$$

Если число *v* не является кратным 2, 5 и 10, то получается

$$((0\ \&\ 0) \rightarrow 0) = 1.$$

Если *v* кратно 2, но не является кратным 5 и 10, то получается

$$((1\ \&\ 0) \rightarrow 0) = 1.$$

Если *v* кратно 5, но не является кратным 2 и 10, то получается

$$((0\ \&\ 1) \rightarrow 0) = 1.$$

Если *v* кратно 10, то оно, очевидно, будет кратно и 2 и 5, то получается

$$((1\ \&\ 1) \rightarrow 1) = 1$$

Других вариантов нет. Следовательно, рассмотренная формула истинна.

б) В качестве значения НОК(2, 5) подставим неправильное значение *z*.

Пусть таким значением будет 9, число не является кратным 2 и 5.

$$\text{NOK}(2,5,9)\ =\ \exists uP(2,u,9)\ \&\ \exists uP(5,u,9)\ \&\ \forall v(\exists uP(2,u,v)\ \&\ \exists uP(5,u,v)\ \rightarrow\ \exists uP(9,u,v))$$

Видно, что первые два логические множители принимают значение 0. Следовательно, логическое произведение (конъюнкция) равно 0.

Пусть неправильным значением НОК (2, 5) будет кратное числам 2 и 5 число 20.

$$\text{NOK}(2,5,20)\ =\ \exists uP(2,u,20)\ \&\ \exists uP(5,u,20)\ \&\ \forall v(\exists uP(2,u,v)\ \&\ \exists uP(5,u,v)\ \rightarrow\ \exists uP(20,u,v))$$

В этом случае первые два множителя принимают значение 1. Следовательно, значение формулы зависит от значения третьего логического множителя:

$$\forall v(\exists uP(2,u,v)\ \&\ \exists uP(5,u,v)\ \rightarrow\ \exists uP(20,u,v)).$$

Данная формула принимает значение 1 для всех целых неотрицательных чисел *v*, за исключением *v* = 10. В этом случае получается:

$$((1\ \&\ 1) \rightarrow 0) = 0.$$

Проверим формулу для НОК(12, 18) = 36 (случай, когда у чисел есть общие множители).

$$\text{NOK}(12,18,36)\ =\ \exists uP(12,u,36)\ \&\ \exists uP(18,u,36)\ \&\ \forall v(\exists uP(12,u,v)\ \&\ \exists uP(18,u,v)\ \rightarrow\ \exists uP(36,u,v))$$

Так как 36 кратно 12 и 18, то первые два множителя равны 1.

Третий множитель всегда принимает значение 1:

если v не является кратным 12, 18 и 36, то получается $((0\ \&\ 0) \rightarrow 0) = 1$;

если *v* кратно 12, но не является кратным 18 и 36, то получается $((1\ \&\ 0) \rightarrow 0) = 1$;

если *v* кратно 18, но не является кратным 12 и 36, то получается $((0\ \&\ 1) \rightarrow 0) = 1$;

если *v* кратно 36, то оно, очевидно, будет кратно и 12 и 18, то получается $((1\ \&\ 1) \rightarrow 1) = 1$;

Других вариантов нет. Следовательно, рассматриваемая формула истинна тогда и только тогда, когда *z* – наименьшее общее кратное *x* и *y*.

Таким образом, в формуле

$$\text{NOK}(x, y, z) = \exists uP(x, u, z)\ \&\ \exists uP(y, u, z)\ \&\ \forall v(\exists uP(x, u, v)\ \&\ \exists uP(y, u, v) \rightarrow \exists uP(z, u, v))$$

первый и второй логические множители проверяют, является ли *z* числом, кратным *x* и *y*, соответственно. Третий логический множитель не дает принять за наименьшее любое другое число, которое кратно *x* и *y* (см. выше случай NOK(2, 5, 20)).

Замечание. При этом если в третьем множителе заменить квантор всеобщности квантором существования:

$$\exists v(\exists uP(2,u,v)\ \&\ \exists uP(5,u,v)\ \rightarrow\ \exists uP(20,u,v)),$$

то он будет истинным и для случая NOK(2, 5, 20). Например, при $v = 20$.