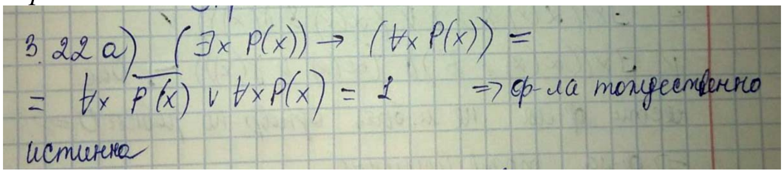
Комментарии к решению задачи 3.22

3.22. Являются ли тождественно истинными следующие формулы:

а) $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$

Вариант 1


3.22 а) $(\exists x\, P(x)) \to (\forall x\, P(x)) =$
$= \forall x\, \overline{P(x)} \vee \forall x P(x) = 1 \Rightarrow$ ф-ла тождественно истинна

Имеем неверное решение. В этом варианте студент решил воспользоваться следующей схемой равносильности

$$A \vee \bar{A} = 1.$$

Эта равносильность справедлива, если первое слагаемое и выражение, стоящее во втором слагаемом под отрицанием, совпадают. То есть в нашем случае отрицание должны было стоять над первым слагаемым целиком: $\overline{\forall x P(x)}$.

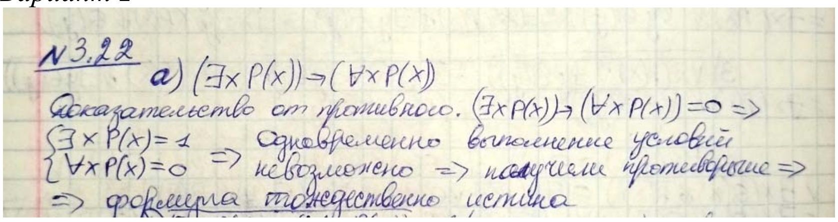
А так, дальнейшие преобразования данной формулы были бы следующими:

$$\forall x \overline{P(x)} \vee \forall x P(x) = \forall x \overline{P(x)} \vee \forall y P(y) = \forall x \forall y \left(\overline{P(x)} \vee P(y)\right),$$

при этом использовалось равносильное преобразование (3.9).

В формуле, стоящей в скобках, что-то говориться о разных предметах (если мы бы рассматривали данную формулу в рамках алгебры высказываний, у нас была такая формула $\bar{A} \vee B$), поэтому равносильность $A \vee \bar{A} = 1$ здесь тоже не работает.

Вариант 2


№3.22
а) $(\exists x\, P(x)) \to (\forall x\, P(x))$
Доказательство от противного. $(\exists x P(x)) \to (\forall x P(x)) = 0 \Rightarrow$
$\begin{cases} \exists x\, P(x) = 1 \\ \forall x\, P(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ Одновременно выполнение условий невозможно $\Rightarrow$ получим противоречие $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ формула тождественно истинна

Неверное заключение. Одновременное выполнение этих условий возможно. Например, на множестве натуральных чисел при $P(x)$ = «x – простое число». Действительно, существуют натуральные числа, которые являются простыми (т. е. $\exists x P(x) = 1$), но не все натуральные числа являются простыми (т. е. $\forall x P(x) = 0$). Доказательство от противного развалилось.

Вариант правильного решения

Проще всего в таких задачах сначала попробовать доказать то, что формула не является тождественно истинной. Для этого достаточно привести «контрпример», т.е. подобрать интерпретацию данной формулы, значение которой было равно 0. Если такой пример будет найден, то, очевидно, рассматриваемая формула не может быть тождественно истинной.

Для рассматриваемого задания ($\exists x P(x) \to \forall x P(x)$) таким «контрпимером» будет следующая интерпретация:

на множестве натуральных чисел $P(x)$ = «x – простое число».

В такой модели посылка формулы истинна, а заключение – ложно, следовательно, значение формулы $\exists x P(x) \to \forall x P(x)$ равно 0.

б) $\overline{\exists x P(x) \to \forall x P(x)}$;

Формула не является тождественно истинной.

«Контрпример»: на множестве натуральных чисел $P(x)$ = «x – целое число». Получаем под отрицанием истинное высказывание, а сама формула $\overline{\exists x P(x) \to \forall x P(x)}$ будет равна 0.

в) $\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y)$

в) $\exists x \forall y\, Q(x,y) \to \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$
Нет контрпримеров
Ответ: является

Если для примера не удалось придумать «контрпример», то нельзя однозначно утверждать, что формула является тождественно истинной. Это еще необходимо доказать.

Докажем от противного. Предположим, что формула ложна, т.е.

$$\exists x \forall y Q(x, y) \to \forall y \exists x Q(x, y) = 0 \implies \begin{cases} \exists x \forall y Q(x, y) = 1, \\ \forall y \exists x Q(x, y) = 0. \end{cases}$$

Из первого условия следует, что существует предмет x, который для любого предмета y обращает в истинное высказывание $Q(x, y)$.

Из второго условия следует, что для любого предмета y невозможно подобрать предмет x, чтобы высказывание $Q(x, y)$ было истинным.

Таким образом, имеет место очевидное противоречие. Следовательно, формула тождественно истинна.

г) $\forall y \exists x Q(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y)$?

Формула не является тождественно истинной.

«Контрпример»: на множестве натуральных чисел $Q(x, y)$ = «$x \le y$». Действительно, для любого натурального числа y можно подобрать число x, которое будет меньше или равно y. Но нельзя утверждать, что существует такое число x, которое будет меньше или равно любого натурального числа y. Следовательно, получаем: $\forall y \exists x Q(x, y) \to \exists x \forall y Q(x, y) = 1 \to 0 = 0$.