МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова»

ТЕОРИЯ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы

Чебоксары
2014

УДК 621.391(075.8)

Составитель: А.А. Андреева

Теория цифровой обработки сигналов: метод. указания к выполнению расчетно-графической работы / сост. А.А. Андреева. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2014. 36 с.

Приведены задания по основным разделам теории линейных дискретных систем: разностные уравнения, z-преобразование и его применение для решения разностных уравнений, структурные схемы и частотные характеристики линейных дискретных систем, дискретное преобразование Фурье.

Для студентов IV курса направления «Информатика и вычислительная техника», профиль «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем».

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной программы «Кадры для регионов»

Ответственный редактор канд. техн. наук, доцент Л.А. Павлов

Утверждено Учебно-методическим советом университета

Общие сведения

В настоящее время методы цифровой обработки сигналов (ЦОС) внедряются во многие разделы науки и техники и становятся для них прочной теоретической базой.

Любая система ЦОС содержит цифровое вычислительное устройство. Поэтому сигнал должен быть преобразован к виду, пригодному для обработки на ЭВМ, т.е. должен быть представлен в цифровой форме. Дискретные по времени сигналы обычно получают при периодической выборке из непрерывного сигнала. Квантование по уровню дискретных сигналов дает цифровые сигналы. При теоретическом исследовании процессов в цифровых системах при малых ошибках квантования по уровню пренебрегают эффектами квантования, т.е. вместо цифровых сигналов рассматривают дискретные. Ошибки квантования являются предметом специального исследования.

Будем рассматривать дискретные неквантованные по уровню сигналы.

Задание к расчетно-графической работе по дисциплине «Теория цифровой обработки сигналов»

I. Z-преобразование

1. Доказать свойство *z*-преобразования (табл. 1), используя определение *z*-преобразования.

Таблица 1

Номер варианта	Свойство *z*-преобразования
1-4	Суперпозиция (линейность) $ax(n)+by(n) \leftrightarrow aX(z)+bY(z)$
5-8	Умножение на экспоненту $a^{n}x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}z)$
9-12	Умножение на n $n(n) \leftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$

Окончание табл. 1

13-16	Задержка на $N \ge 0$ $x(n-N)u(n-N) \leftrightarrow z^{-N}X(z),\ \ u(n)=\begin{cases}1, n\ge 0,\\ 0, n<0\end{cases}$
17-20	Задержка на $N \ge 0$ $x(n-N) \leftrightarrow x(-N)+x(-N+1)z^{-1}+\ldots$ $+x(-1)z^{-(N-1)}+z^{-N}X(z)$

2. Выполнить *z*-преобразование последовательности x(n) (табл. 2), используя *z*-преобразование последовательности

$$a_n \leftrightarrow \frac{1}{1-a\cdot z^{-1}},$$

и свойства *z*-преобразования (или определение *z*-преобразования и формулу суммы членов убывающей геометрической прогрессии, в этом случае указать радиус сходимости *z*-преобразования). Проверить результат в системе MATLAB, используя функцию *ztrans*.

Таблица 2

Номер варианта	$x(n)$, $n\ge0$	Номер варианта	$x(n)$, $n\ge0$
1	$u(n)-u(n-N), N=5$	11	n
2	$1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$	12	$x(n)=\begin{cases}1, & n\le 2\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, & n>2\end{cases}$
3	$\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$	13	$x(n)=n, n=0,1,\ldots N-1;$ $N=5$
4	$\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$	14	$\left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$
5	$1+\left(\frac{1}{4}\right)^n$	15	$\left(\frac{1}{4}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

Окончание табл. 2

Номер варианта	$x(n)$, $n \geq 0$	Номер варианта	$x(n)$, $n \geq 0$
6	$\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$	16	$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 3 \cdot m \\ 0, & \text{остальные } n \end{cases}$ где $m = 0, 1, 2, \ldots$
7	n^2	17	$x(n) = \begin{cases} 1, & n = 2 \cdot m, \\ 0, & \text{остальные } n, \end{cases}$ где $m = 0, 1, 2, \ldots$
8	$ch\,(2n)$	18	$\cos\left(n\frac{\pi}{6}\right)$
9	$(n+1)3^{-n}$	19	$\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)$
10	na^n	20	$\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$

II. Заданы передаточная функция H(z) линейной дискретной системы при нулевых начальных условиях (табл. 3) и входная последовательность x(n) (табл. 2)

Найти:

1. Частотные характеристики $|H(e^{jw})|$ и arg $|H(e^{jw})|$.
2. Импульсную характеристику $h(n)$.
3. Структурные схемы систем в прямой, прямой канонической, последовательной и параллельной формах и соответствующие разностные уравнения.
4. Устойчива ли система.
5. Выходную последовательность $y(n)$ (несколько первых отсчетов):

а) по разностному уравнению;

б) формуле свёртки;

в) с использованием z-преобразования.

Для пунктов 1, 2, 5 построить графики.

Проверить результаты в системе MATLAB, используя функции *freqz, impz, zplane, filter*.

Таблица 3

Номер варианта	$H(z)$	Номер варианта	$H(z)$
1	$\dfrac{1}{4z^2-1}$	11	$\dfrac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$
2	$\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$	12	$\dfrac{1}{9z^2-4z+1}$
3	$\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$	13	$\dfrac{1}{6z^2+z-1}$
4	$\dfrac{1}{4z^2-4z+1}$	14	$\dfrac{1}{6z^2-z-1}$
5	$\dfrac{1}{4z^2+4z+1}$	15	$\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$
6	$\dfrac{1}{1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$	16	$\dfrac{1}{1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$
7	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$	17	$\dfrac{1}{8z^2+2z-1}$
8	$\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$	18	$\dfrac{1}{8z^2-2z-1}$
9	$\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)^2}$	19	$\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$
10	$\dfrac{1}{1+\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$	20	$\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$

III. Заданы импульсная характеристика линейной дискретной системы h(n) и входная последовательность x(n) (табл. 4)

Найти:

1. Передаточную функцию системы.
2. Структурные схемы системы в прямой и последовательной форме и соответствующие разностные уравнения.
3. Выходную последовательность $y(n)$:

а) по разностному уравнению;

б) формуле свёртки;

в) с использованием z-преобразования;

г) с использованием циклической свёртки;

д) с использованием циклической свёртки и ДПФ.

Таблица 4

Номер варианта	$h(n)$	$x(n)$	Номер варианта	$h(n)$	$x(n)$
1	(1, 0, -1)	(1, 0, -1)	10	(1, 4, 3)	(1, 1, 1)
2	(1, 2, 1)	(1, 0, 1)	11	(1, -2, -3)	(1, 2, 3, 4)
3	(1, -2, 1)	(-1, 0, 1)	12	(-3, 2, 1)	(3, 2, 1)
4	(1, -6, 9)	(2, 3)	13	(1, 5, 6)	(1, -1, 1)
5	(1, 6, 9)	(1, -2)	14	(6, -5, 1)	(1, 2)
6	(2, -3, 1)	(1, 3)	15	(-6, -1, 1)	(2, 1)
7	(-2, -1, 1)	(1, 1)	16	(-6, 1, 1)	(2, -2)
8	(1, 1, -2)	(1, 1, 1, 1)	17	(4, 4, 1)	(1, 0, -1)
9	(1, -4, 3)	(1, 0, 2)	18	(1, -4, 4)	(1, 2, 3)
10	(1, 4, 3)	(1, 1, 1)	19	(6, 5, 1)	(2, 1)
11	(1, -2, -3)	(1, 2, 3, 4)	20	(3, 4, 1)	(1, -1)

Пример выполнения расчетно-графической работы[1]

I. Z-преобразование

Задание 1

Доказать свойство z-преобразования, используя определение z-преобразования.

Номер варианта	Свойство z-преобразования
7	Умножение на экспоненту $a^n\,x(n) \leftrightarrow X(a^{-1}\,z)$

Пусть $x(n)$ имеет z-преобразование $X(z)$:

$$x(n) \leftrightarrow X(z).$$

Тогда по определению z-преобразования:

$$a^n\,x(n) \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,x(n)\,z^{-n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\,(a\,z^{-1})^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)((a\,z^{-1})^{-1})^{-n} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)(a^{-1}\,z)^{-n} =$$

$= X(a^{-1}\,z)$, что и требовалось доказать.

Задание 2

Выполнить z-преобразование последовательности $x(n)$ используя z-преобразование последовательности

$$a^n \leftrightarrow \frac{1}{1 - a\,z^{-1}},$$

и свойства z-преобразования (или определение z-преобразования и формулу суммы членов убывающей геометрической прогрессии, в этом случае указать радиус сходимости z-преобразования). Проверить результат в системе MATLAB, используя функцию *ztrans*.

Номер варианта	$x(n)$, $n \geq 0$
7	n^2

Представим $x(n)$ как произведение трех последовательностей:

$$x(n) = n^2 = n\,n\,1^n.$$

---

[1]Выполнил студент А. Котлов.

Пусть

$$x_1(n) = 1^n,$$
$$x_2(n) = n\,x_1(n) = n\,1^n,$$
$$x_3(n) = n\,x_2(n) = n^2\,1^n = x(n).$$

Тогда, используя z-преобразование последовательности

$$a^n \leftrightarrow \frac{1}{1 - a\,z^{-1}},$$

найдем z-преобразование последовательности $x_1(n)$:

$$x_1(n) = 1^n \leftrightarrow X_1(z) = \frac{1}{1 - 1\,z^{-1}}.$$

Для z-преобразования последовательности $x(n)$ воспользуемся свойством «умножение на n»:

$$n\,x(n) \leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}.$$

$$x_2(n) = n\,x_1(n) \leftrightarrow -z\frac{dX_1(z)}{dz};$$

$$X_2(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}}\right) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) =$$
$$= -z\frac{z'\,(z-1) - z\,(z-1)'}{(z-1)^2} = -z\frac{z - 1 - z}{(z-1)^2} =$$
$$= \frac{z}{(z-1)^2}.$$

$$x_3(n) = n\,x_2(n) \leftrightarrow -z\frac{dX_2(z)}{dz};$$

$$X_3(z) = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = -z\frac{z'\,(z-1)^2 - z\,((z-1)^2)'}{(z-1)^4} =$$
$$= -z\frac{z^2 - 2z + 1 - z\,(2z-2)}{(z-1)^4} = -z\frac{z^2 - 2z + 1 - 2z^2 + 2z}{(z-1)^4} =$$
$$= -z\frac{-z^2 + 1}{(z-1)^4} = \frac{z^3 - z}{(z-1)^4} = \frac{z\cdot(z^2-1)}{(z-1)^4} = \frac{z\,(z-1)\,(z+1)}{(z-1)^4} =$$
$$= \frac{z\,(z+1)}{(z-1)^3} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

Так как

$$x(n) = x_3(n),$$

то

$$X(z) = X_3(z),$$

$$x(n) = n^2 \leftrightarrow X(z) = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}, \qquad n \geq 0.$$

Проверим результат в системе MATLAB:

```
>> syms z n
>> x = n^2;
>> X = ztrans(x)

X =
(z^2 + z)/(z - 1)^3
```

II. Заданы передаточная функция *H*(*z*) линейной дискретной системы при нулевых начальных условиях и входная последовательность *x*(*n*)

Номер варианта	$x(n)$, $n \geq 0$	$H(z)$
7	n^2	$\dfrac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$

Найти:

1. Частотные характеристики $\mathrm{H}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{jw}}\right)$ и $\arg(\mathrm{H}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{jw}}\right))$.
2. Импульсную характеристику $h(n)$.
3. Структурные схемы систем в прямой, прямой канонической, последовательной и параллельной формах и соответствующие разностные уравнения.
4. Устойчива ли система.
5. Выходную последовательность $y(n)$ (несколько первых отсчетов):

а) по разностному уравнению;

б) формуле свёртки;

в) с использованием *z*-преобразования.

Для пунктов 1, 2 построить графики.

Проверить результаты в системе MATLAB, используя функции freqz, impz, zplane, filter.

Задание 1

Найти частотные характеристики $H(e^{jw})$ и $\arg(H(e^{jw}))$.

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}.$$

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}e^{-jw} - \frac{1}{6}e^{-2jw}}.$$

$$e^{jw} = \cos w + j\sin w.$$

$$H(e^{jw}) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}(\cos w - j\sin w) - \frac{1}{6}(\cos w - j\sin w)^2} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\cos w + j\frac{1}{6}\sin w - \frac{1}{6}(\cos^2 w - j\,2\sin w\cos w - \sin^2 w)} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\cos w + j\frac{1}{6}\sin w - \frac{1}{6}\cos^2 w + j\frac{1}{6}\sin 2w + \frac{1}{6}\sin^2 w} =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\cos w + \frac{1}{6}\sin^2 w - \frac{1}{6}\cos^2 w + j\left(\frac{1}{6}\sin w + \frac{1}{6}\sin 2w\right)} =$$

умножим на комплексно-сопряженное значение знаменателя обе части дроби

$$= \frac{1 - \frac{1}{6}\cos w + \frac{1}{6}\sin^2 w - \frac{1}{6}\cos^2 w - j\left(\frac{1}{6}\sin w + \frac{1}{6}\sin 2w\right)}{\left(1 - \frac{1}{6}\cos w + \frac{1}{6}\sin^2 w - \frac{1}{6}\cos^2 w\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\sin w + \frac{1}{6}\sin 2w\right)^2}.$$

Частотные характеристики:

- АЧХ:

$$\left|H(e^{jw})\right| = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{6}\cos w + \frac{1}{6}\sin^2 w - \frac{1}{6}\cos^2 w\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\sin w + \frac{1}{6}\sin 2w\right)^2}}{\left(1 - \frac{1}{6}\cos w + \frac{1}{6}\sin^2 w - \frac{1}{6}\cos^2 w\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\sin w + \frac{1}{6}\sin 2w\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{6}\cos w + \frac{1}{6}\sin^2 w - \frac{1}{6}\cos^2 w\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\sin w + \frac{1}{6}\sin 2w\right)^2}}.$$

- ФЧХ:

$$\arg\left(H(e^{jw})\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{1}{6}\sin w + \frac{1}{6}\sin 2w}{-\left(1 - \frac{1}{6}\cos w + \frac{1}{6}\sin^2 w - \frac{1}{6}\cos^2 w\right)}\right).$$

Проверим результат в системе MATLAB:

```
>> b = 1;
>> a = [1 -1/6 -1/6];
>> [H,w] = freqz(b,a);
>> A1 = abs(H);
>> Ph1 = angle(H);
```

```
>> n = length(w);
>> w = 0:pi/n:pi-pi/n;
>> x = 1-1/6*cos(w)+1/6*(sin(w)).^2-1/6*(cos(w)).^2;
>> y = 1/6*sin(w)+1/6*sin(2*w);
>> A2 = 1./(x.^2 + y.^2).^0.5;
>> Ph2 = atan(y./(-x));
>> subplot(2,2,1), plot(w,A1);
>> grid on; title('АЧХ с помощью MATLAB');
>> subplot(2,2,2), plot(w,Ph1);
>> grid on; title('ФЧХ с помощью MATLAB');
>> subplot(2,2,3), plot(w,A2);
>> grid on; title('АЧХ вычисленное вручную');
>> subplot(2,2,4), plot(w,Ph2);
>> grid on; title('ФЧХ вычисленное вручную');
```

Полученные графики частотных характеристик приведены на рис. 1.

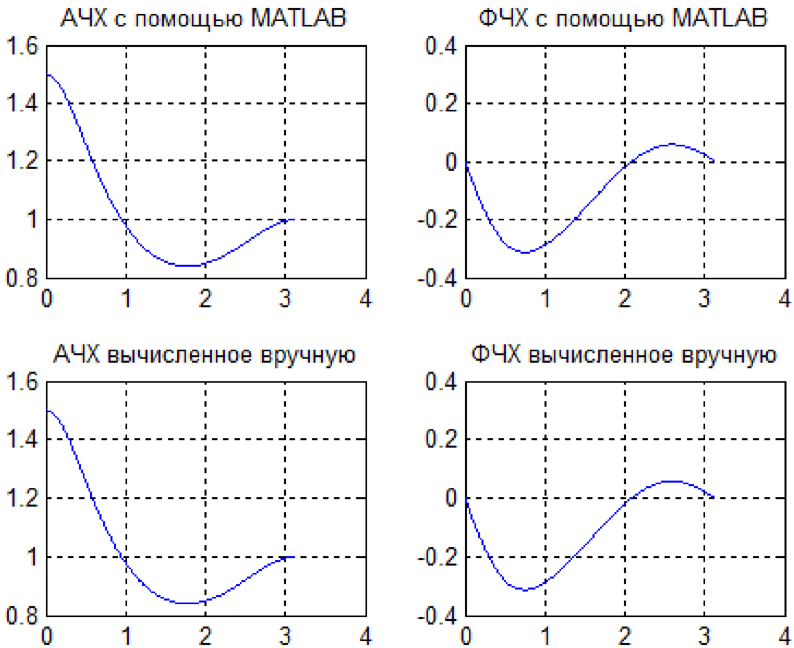

Рис. 1. Частотные характеристики

Задание 2

Найти импульсную характеристику $h(n)$.

Разложим $H(z)$ на сумму простейших дробей:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} = \left|\begin{matrix}\text{умножим}\\ \text{на } 6z^2\end{matrix}\right| = \frac{6z^2}{6z^2 - z - 1}.$$

$$6z^2 - z - 1 = 0;$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12};$$

$$z_1 = \frac{1}{2}, \qquad z_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$H(z) = \frac{6z^2}{6\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)} = \left|\begin{matrix}\text{поделим}\\ \text{на } 6z^2\end{matrix}\right| = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} =$$

$$= \frac{k_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{k_2}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{k_1 + \frac{1}{3}k_1 z^{-1} + k_2 - \frac{1}{2}k_2 z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)} =$$

$$= \frac{k_1 + k_2 + z^{-1}\left(\frac{1}{3}k_1 - \frac{1}{2}k_2\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{1}{3}z^{-1}\right)}.$$

Найдем неизвестные k_1 и k_2:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 1 \\ \frac{1}{3}k_1 - \frac{1}{2}k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = 1 - k_2 \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}k_2 - \frac{1}{2}k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{5}{6}k_2 = \frac{1}{3}, \qquad k_2 = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad k_1 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Передаточная функция примет вид:

$$H(z) = \frac{3/5}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2/5}{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}.$$

Исходя из z-преобразования последовательности

$$a^n \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}},$$

получим импульсную характеристику:

$$h(n) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Проверим результат в системе MATLAB:

```
>> b = 1;
>> a = [1 -1/6 -1/6];
>> h1 = impz(b,a);
>> s = length(h1);
>> n = 0:s-1;
>> h2 = 3/5*(1/2).^n + 2/5*(-1/3).^n;
>> subplot(2,1,1), plot(n,h1);
>> grid on; title('С помощью MATLAB');
>> subplot(2,1,2), plot(n,h2);
>> grid on; title('Вычисленное вручную');
```

Полученные графики импульсной характеристики приведены на рис. 2.

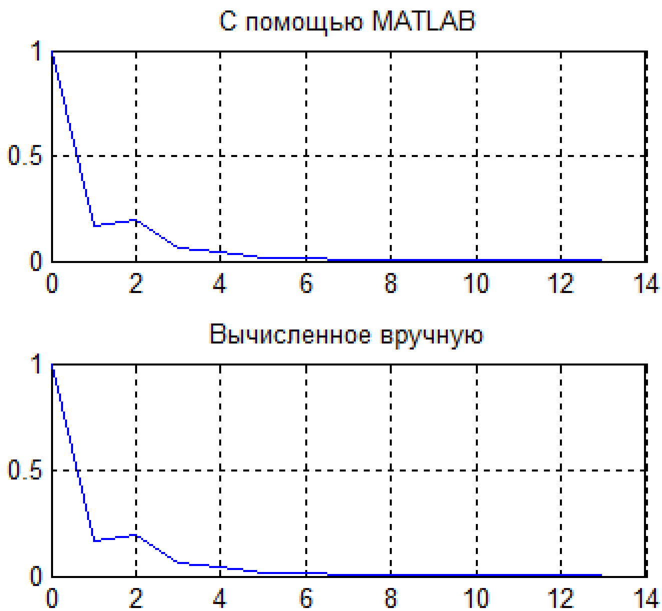

Рис. 2. Импульсная характеристика

Задание 3

Структурные схемы систем в прямой, прямой канонической, последовательной и параллельной формах и соответствующие разностные уравнения.

Прямая форма 1

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} = \frac{B(z)}{A(z)}.$$

Так как

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)},$$

то

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}\right) = X(z).$$

При нулевых начальных условиях:

$$z^{-i}Y(z) \leftrightarrow y(n-i).$$

Тогда получим разностное уравнение:

$$Y(z) - \tfrac{1}{6}z^{-1}Y(z) - \tfrac{1}{6}z^{-2}Y(z) = X(z);$$

$$y(n) - \frac{1}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) = x(n);$$

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2);$$

Структурная схема имеет вид (рис. 3):

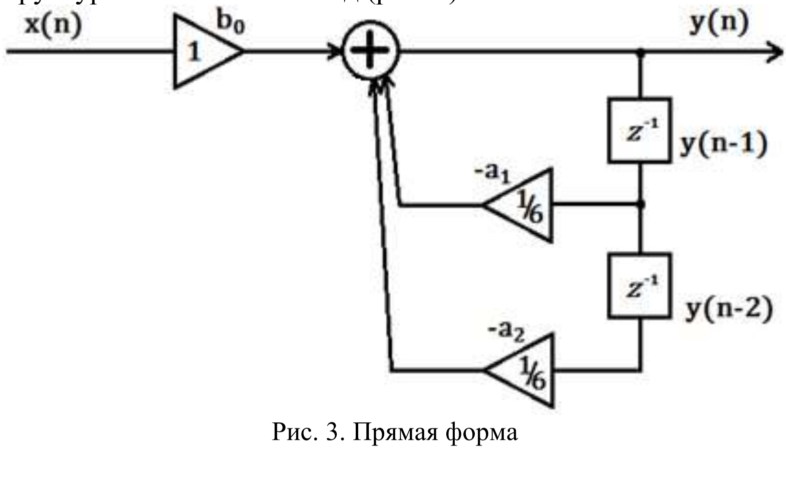

Рис. 3. Прямая форма

Прямая форма 2 (*каноническая*)

Каноническая форма позволяет уменьшить число элементов в 2 раза.

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{N}b_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}}\sum_{i=0}^{N}b_i z^{-i}=\frac{W(z)}{X(z)}\,\frac{Y(z)}{W(z)}.$$

Перейдем к разностным уравнениям:

$$W(z)\left(1+\sum_{i=1}^{N}a_i z^{-i}\right)=X(z);$$

$$w(n)+\sum_{i=1}^{N}a_i w(n-i)=x(n);$$

$$w(n)=x(n)-\sum_{i=1}^{N}a_i w(n-i)\,;$$

$$Y(z)=W(z)\sum_{i=0}^{N}b_i z^{-i}\,;$$

$$y(n)=\sum_{i=0}^{N}b_i w(n-i).$$

Так как числитель передаточной функции равен 1, то каноническая форма совпадает с прямой.

Последовательная форма

$$H(z)=b_0\prod_{i=1}^{k}H_i(z),$$

где

$H_i(z)=\frac{1+b_{1i}z^{-1}}{1+a_{1i}z^{-1}}$ – звено 1-го порядка либо

$H_i(z)=\frac{1+b_{1i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2}}{1+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}$ – звено 2-го порядка.

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=H_1(z)\,H_2(z),$$

где

$$H_1(z)=\frac{Y_1(z)}{X(z)},\qquad H_2(z)=\frac{Y(z)}{Y_1(z)}.$$

Получим разностные уравнения:

$$\frac{Y_1(z)}{X(z)}=H_1(z);$$

$$\frac{Y_1(z)}{X(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\,;$$

$$Y_1(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)=X(z)$$
$\leftrightarrow$
$$y_1(n)-\frac{1}{2}y_1(n-1)=x(n);$$
$$y_1(n)=x(n)+\frac{1}{2}y_1(n-1).$$

Аналогично находится для
$$\frac{Y(z)}{Y_1(z)}=H_2(z).$$
$$y(n)=y_1(n)-\frac{1}{3}y(n-1).$$

Система разностных уравнений имеет вид:
$$\begin{cases} y_1(n)=x(n)+\frac{1}{2}y_1(n-1) \\ y(n)=y_1(n)-\frac{1}{3}y(n-1) \end{cases}$$

Структурная схема представлена на рис. 4.

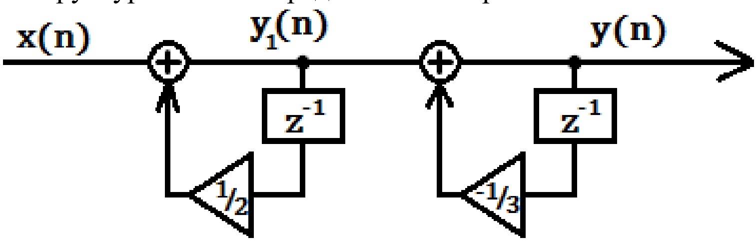

Рис. 4. Последовательная форма

Параллельная форма
$$H(z)=C+\sum_{i=1}^{k}H_i(z),$$
где

$H_i(z)=\frac{b_{0i}}{1+a_{1i}z^{-1}}$ – звено 1-го порядка либо

$H_i(z)=\frac{b_{0i}+b_{1i}z^{-1}}{1+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}$ – звено 2-го порядка.

Для построения структурной схемы можно воспользоваться передаточной функцией, найденной в задании 2 (импульсная характеристика):

$$H(z) = \frac{3/5}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{2/5}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = H_1(z) + H_2(z),$$

где

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)}, \qquad H_2(z) = \frac{Y_2(z)}{X(z)}.$$

Система разностных уравнений:

$$\begin{cases} y_1(n) = \frac{3}{5}x(n) + \frac{1}{2}y_1(n-1); \\ y_2(n) = \frac{2}{5}x(n) - \frac{1}{3}y_2(n-1); \\ \quad y(n) = y_1(n) + y_2(n). \end{cases}$$

Структурная схема представлена на рис. 5.

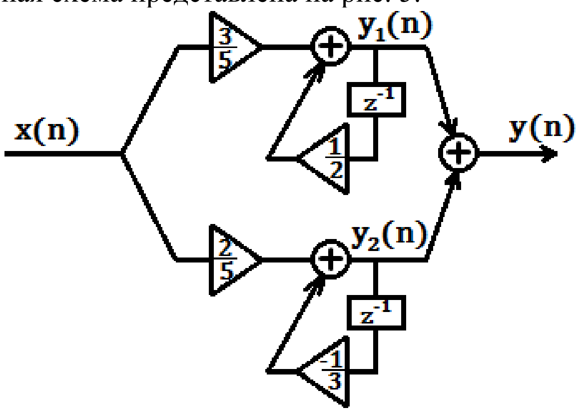

Рис. 5. Параллельная форма

Проверим в Matlab:

```
>> b=[1 0 0];
>> a=[1 -1/6 -1/6];
>> [r,p,k] = residuez(b,a)

r =
    0.6000
    0.4000
p =
    0.5000
   -0.3333
k =
     0
```

Функция residuez разлагает передаточную функцию на сумму простых дробей в z-области.

Параметры:

r – нули передаточной функции (b_{0i});

p – полюсы передаточной функции (a_{0i})

k – коэффициент C.

Задание 4

Устойчива ли система?

Для того чтобы линейная дискретная система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения (полюсы системы) были по модулю меньше единицы.

У нас уже имеются найденные полюсы системы в задании 2 (импульсная характеристика системы):

$$p_1 = \frac{1}{2}, \qquad p_2 = -\frac{1}{3}.$$

Оба корня по модулю меньше единицы, следовательно система является устойчивой и про ограниченном входном сигнале формирует ограниченный выходной сигнал.

Для проверки воспользуемся функцией *zplane* в системе MATLAB (рис. 6):

```
>> b = 1;
>> a = [1 -1/6 -1/6];
>> zplane(b,a);
```

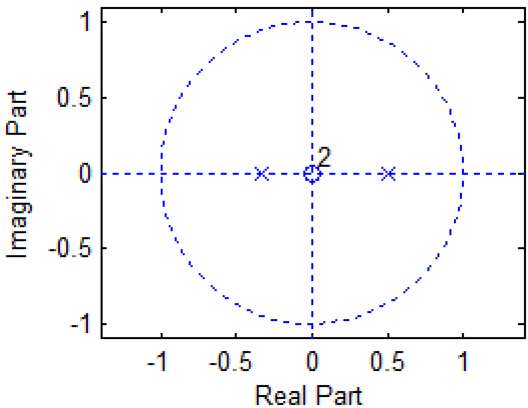

Рис. 6. Карта нулей и полюсов

Поскольку оба корня по модулю меньше единицы (располагаются внутри единичного круга), система является устойчивой.

Задание 5

Найти выходную последовательность $y(n)$ (несколько первых отсчетов):

а) по разностному уравнению;

б) формуле свёртки;

в) с использованием z-преобразования.

По разностному уравнению

Разностное уравнение получено в задании 3 (структурная схема в прямой форме):

$y(n) = x(n) + \frac{1}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2).$

Тогда расчеты имеют вид:

n	$x(n)$	$y(n)$
0	0	0
1	1	1
2	4	$4 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$
3	9	$9 + \frac{25}{36} + \frac{1}{6} = \frac{355}{36}$
4	16	$16 + \frac{355}{216} + \frac{25}{36} = \frac{3961}{216}$

$$y(n) = \left(0; 1; \frac{25}{6}; \frac{355}{36}; \frac{3961}{216}; \dots\right).$$

По формуле свёртки

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} x(m)h(n-m).$$

Импульсная характеристика $h(n)$ найдена в задании 2:

$$h(n) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

n	$x(n)$	$h(n)$	$y(n)$
0	0	1	$x(0)h(0) = 0$
1	1	$\frac{1}{6}$	$x(0)h(1) + x(1)h(0) = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 1 = 1$
2	4	$\frac{7}{36}$	$x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) =$ $= 4 + \frac{1}{6} = \frac{25}{6}$
3	9	$\frac{13}{216}$	$\sum_{m=0}^{3} x(m)h(n-m) = \frac{355}{36}$
4	16	$\frac{55}{1296}$	$\sum_{m=0}^{4} x(m)h(n-m) = \frac{3961}{216}$

$$y(n) = \left(0; 1; \frac{25}{6}; \frac{355}{36}; \frac{3961}{216}; \ldots\right).$$

С использованием z-преобразования

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z).$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}}, \qquad x(n) = n^2 \leftrightarrow X(z) = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

$$Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}z^{-1} - \frac{1}{6}z^{-2}} \frac{z^2 + z}{(z-1)^3} =$$

$$= \frac{z^2 + z}{z^3 - \frac{19}{6}z^2 + \frac{20}{6}z - 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2}}.$$

Выходную последовательность $y(n)$ найдем разложением по степеням, путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{l|l}
z^2 + z & z^3 - \frac{19}{6}z^2 + \frac{20}{6}z - 1 - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{6}z^{-2} \\
\cline{2-2}
-\ \underline{z^2 - \frac{19}{6}z + \frac{20}{6} - z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3}} & z^{-1} + \frac{25}{6}z^{-2} + \frac{355}{36}z^{-3} + \frac{3961}{216}z^{-4} + \ \ldots \\
\qquad \frac{25}{6}z - \frac{20}{6} + z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} - \frac{1}{6}z^{-3} & \\
\quad -\ \underline{\frac{25}{6}z - \frac{475}{36} + \frac{500}{36}z^{-1} - \frac{25}{6}z^{-2} - \frac{25}{18}z^{-3} + \frac{25}{36}z^{-4}} & \\
\qquad\qquad \frac{355}{36} - \frac{464}{36}z^{-1} + \frac{162}{36}z^{-2} + \frac{44}{36}z^{-3} - \frac{25}{36}z^{-4} & \\
\qquad\quad -\ \underline{\frac{355}{36} - \frac{6745}{216}z^{-1} + \frac{7100}{216}z^{-2} - \frac{355}{36}z^{-3} - \frac{355}{108}z^{-4} + \frac{355}{216}z^{-5}} & \\
\qquad\qquad\qquad \frac{3961}{216}z^{-1} - \ \ldots & \\
\qquad\qquad\quad -\ \underline{\frac{3961}{216}z^{-1} - \ \ldots} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots &
\end{array}$$

$$y(n) = \left(0; 1; \frac{25}{6}; \frac{355}{36}; \frac{3961}{216}; \dots\right).$$

Проверим результат в системе MATLAB:

```
>> b = 1;
>> a = [1 -1/6 -1/6];
>> n = 0:4;
>> x = n.^2;
>> y = filter(b,a,x)
>> Y = [0 1 25/6 355/36 3961/216]
y =
         0    1.0000    4.1667    9.8611   18.3380
Y =
         0    1.0000    4.1667    9.8611   18.3380
```

Результаты вычисления сходятся с результатами в системе MATLAB.

III. Заданы импульсная характеристика линейной дискретной системы *h*(*n*) и входная последовательность *x*(*n*)

Номер варианта	$h(n)$	$x(n)$
7	(-2, -1, 1)	(1, 1)

Найти:

1. Передаточную функцию системы.
2. Структурные схемы системы в прямой и последовательной форме и соответствующие разностные уравнения.
3. Выходную последовательность y(n):

а) по разностному уравнению;

б) формуле свёртки;

в) с использованием z-преобразования;

г) с использованием циклической свёртки;

д) с использованием циклической свёртки и ДПФ.

Задание 1

Найти передаточную функцию системы.

По определению передаточная функция:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n} = h(0)z^{-0} + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} =$$
$$= -2 - z^{-1} + z^{-2}.$$

Задание 2

Структурные схемы системы в прямой и последовательной форме и соответствующие разностные уравнения.

Задание выполняется аналогично заданию 3 (структурные схемы) из пункта II.

Прямая форма

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \qquad Y(z) = H(z)X(z).$$

Разностное уравнение:

$Y(z) = (-2 - z^{-1} + z^{-2})X(z)$

$\leftrightarrow y(n) = -2x(n) - x(n-1) + x(n-2).$

Структурная схема имеет вид (рис. 7):

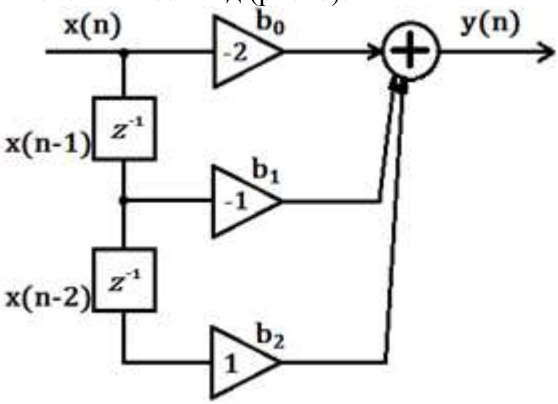

Рис. 7. Прямая форма

Последовательная форма

$$H(z) = b_0 \prod_{i=1}^{\infty} H_i(z).$$

$$H(z) = -2 - z^{-1} + z^{-2} = -2(1 + z^{-1})\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = b_0 H_1(z) H_2(z),$$

где

$$H_1(z) = \frac{Y_1(z)}{X(z)}, \qquad H_2(z) = \frac{Y(z)}{Y_1(z)}.$$

Разностные уравнения:

$Y_1(z) = H_1(z)X(z);$

$Y_1(z) = (1 + z^{-1})X(z);$

$y_1(n) = x(n) + x(n-1).$
$Y(z) = H_2(z)Y_1(z);$
$Y(z) = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)Y_1(z);$
$y(n) = y_1(n) - \frac{1}{2}y_1(n-1).$

$$\begin{cases} y_1(n) = x(n) + x(n-1) \\ y(n) = y_1(n) - \frac{1}{2}y_1(n-1) \end{cases}$$

Структурная схема представлена на рис. 8.

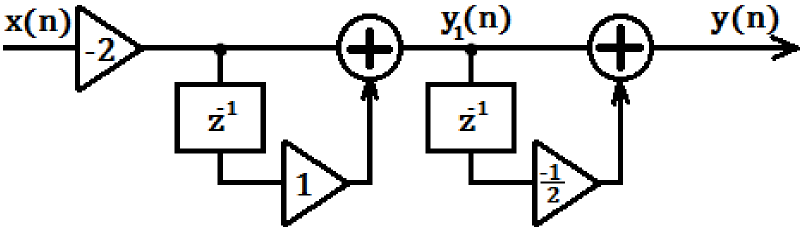

Рис. 8. Последовательная форма

Задание 3

Найти выходную последовательность $y(n)$:

а) по разностному уравнению;
б) формуле свёртки;
в) с использованием z-преобразования;
г) с использованием циклической свёртки;
д) с использованием циклической свёртки и ДПФ.

По разностному уравнению

$y(n) = -2x(n) - x(n-1) + x(n-2), \qquad x(n) = (1;\ 1).$

n	$x(n)$	$y(n)$		n	$x(n)$	$y(n)$
0	1	-2		4	0	0
1	1	-3		5	0	0
2	0	0		6	0	0
3	0	1		7	0	0

Так как после $n = 3$ значение $y(n) = 0$, то $y(n) = (-2; -3; 0; 1)$.

По формуле свёртки

Формула свёртки:

$$y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)h(n-m)\,.$$

$h(n)=(-2;-1;1),\qquad x(n)=(1;1).$

$y(0)=\sum_{m=0}^{0}x(m)h(0-m)=x(0)h(0)=1\cdot(-2)=-2;$

$y(1)=x(0)h(1)+x(1)h(0)=1\cdot(-1)+1\cdot(-2)=-3;$

$y(2)=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)=0;$

$y(3)=\sum_{m=0}^{3}x(m)h(3-m)=1;$

$y(n)=(-2;-3;0;1).$

С использованием z-преобразования

$$Y(z)=H(z)\cdot X(z).$$

$X(z)=1+z^{-1};$

$H(z)=-2-z^{-1}+z^{-2};$

$$\begin{aligned}Y(z)&=(-2-z^{-1}+z^{-2})\cdot(1+z^{-1})=\\&=-2-z^{-1}+z^{-2}-2z^{-1}-z^{-2}+z^{-3}=\\&=-2-3z^{-1}+z^{-3}=\\&=\sum_{n=0}^{3}y(n)\,z^{-n}\,;\end{aligned}$$

$y(n)=(-2;-3;0;1).$

С использованием циклической свёртки

Пусть $x_p(n)$ и $h_p(n)$ – две периодические последовательности с периодом в N отсчетов. Тогда формула циклической свёртки имеет вид:

$$y_p(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_p(m)\,h_p(n-m)\,.$$

Поскольку $x(n)$ и $h(n)$ имеют разные длины, N_1 и N_2 соответственно, то необходимо дополнить последовательности нулевыми отсчетами до длины N_1+N_2-1.

$x(n)=(1;1),\qquad N_1=2.$

$h(n)=(-2;-1;1),\qquad N_2=3.$

$N = N_1 + N_2 - 1 = 2 + 3 - 1 = 4.$
$x_p(n) = (1; 1; 0; 0);$
$h_p(n) = (-2; -1; 1; 0);$
$y_p(0) = x_p(0)h_p(0) + x_p(1)h_p(-1) + x_p(2)h_p(-2) + x_p(3)h_p(-3) =$
$\quad = x_p(0)h_p(0) + x_p(1)h_p(3) + x_p(2)h_p(2) + x_p(3)h_p(1) = -2;$
$y_p(1) = x_p(0)h_p(1) + x_p(1)h_p(0) + x_p(2)h_p(-1) + x_p(3)h_p(-2) =$
$\quad = x_p(0)h_p(1) + x_p(1)h_p(0) + x_p(2)h_p(3) + x_p(3)h_p(2) = -3;$
$y_p(2) = 0;$
$y_p(3) = 1;$
$y_p(n) = (-2; -3; 0; 1).$

С использованием циклической свёртки и ДПФ

Пусть
$x_p(n) = (1; 1; 0; 0);$
$h_p(n) = (-2; -1; 1; 0).$
Тогда

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0,1, \dots, N-1.$$

$X_p(k) = \sum_{n=0}^{3} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} =$
$\quad = 1e^{-j\frac{2\pi}{4}k0} + 1e^{-j\frac{2\pi}{4}k1} + 0e^{-j\frac{2\pi}{4}k2} + 0e^{-j\frac{2\pi}{4}k3} =$
$\quad = 1 + e^{-j\frac{2\pi}{4}k};$
$H_p(k) = \sum_{n=0}^{3} h_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} =$
$\quad = -2e^{-j\frac{2\pi}{4}k0} - 1e^{-j\frac{2\pi}{4}k1} + 1e^{-j\frac{2\pi}{4}k2} + 0e^{-j\frac{2\pi}{4}k3} =$
$\quad = -2 - e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + e^{-j\frac{2\pi}{4}k2};$
$Y_p(k) = X_p(k)\, H_p(k) =$
$\quad = \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{4}k}\right) \cdot \left(-2 - e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + e^{-j\frac{2\pi}{4}k2}\right) =$
$\quad = -2 - e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + e^{-j\frac{2\pi}{4}k2} - 2e^{-j\frac{2\pi}{4}k} - e^{-j\frac{2\pi}{4}k2} + e^{-j\frac{2\pi}{4}k3} =$
$\quad = -2 - 3e^{-j\frac{2\pi}{4}k} + e^{-j\frac{2\pi}{4}k3};$
$y_p(n) = (-2; -3; 0; 1).$

Список рекомендуемой литературы

1. Андреева А.А. Основы теории линейных дискретных систем: конспект лекций. Чебоксары: Изд-во Чуваш ун-та, 2005. 36 с.

2. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие для вузов. СПб.: БХВ-Петербург, 2013. 756 с.

3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.

4. Белов Г.А. Сигналы и их обработка в электронных устройствах: учеб. пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1996. 376 с.

5. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций / А.И. Солонина и др. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 748 с.

Оглавление

**ТЕОРИЯ
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**

Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы

Редактор М.В. Яковлева

Согласно Закону № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года
данная продукция не подлежит маркировке

Подписано в печать 22.04.2014. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,62. Уч.-изд. л. 1,54.Тираж 150 экз. Заказ № 331.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15